

自由剛体の力学系にあらわれる 楕円ファイバー空間

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

多羅間 大輔 (Daisuke Tarama)¹

Department of Applied Mathematics and Physics,

Kyoto University

立命館大学総合理工学研究機構

成木 勇夫 (Isao Naruki)²

Research Organization of Science and Engineering,

Ritsumeikan University

1 序論

自由剛体の力学系は解析力学や幾何学的力学系理論の典型的な例の一つである。よく知られたことであるが、自由剛体の運動は角運動量 $p \in \mathbb{R}^3$ に関する次の Euler 方程式で記述される。

$$\frac{dp}{dt} = p \times (A^{-1}p). \quad (1)$$

ここで、 A は 3×3 正値対称行列であり、物理的には慣性テンソルと呼ばれ、剛体のかたちをあらわすものである。この力学系の性質で最も基本的なのは、2つの第一積分を持つことである。ひとつはエネルギーであり、もうひとつは角運動量の大きさである。このことによって、積分曲線は2つの第一積分の等位面のなす2次曲面の交叉

$$\begin{cases} \frac{1}{I_1}p_1^2 + \frac{1}{I_2}p_2^2 + \frac{1}{I_3}p_3^2 & = 2h, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 & = 2l \end{cases}$$

¹JSPS Research Fellow DC2, e-mail: dsktrm@amp.i.kyoto-u.ac.jp

²e-mail: naruki@se.ritsumeai.ac.jp

に含まれることがわかる。ここで、 $p = (p_1, p_2, p_3)^T$ は A を対角行列 $\text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ へと対角化する座標で、 h と l は初期値によって定まるエネルギーと角運動量の大きさの値である。実際はこの2次曲面の交叉は2つの連結成分からなる楕円曲線で、解曲線がこのうちひとつの連結成分に一致することがわかる。したがって、自由剛体の力学系を考察することは、2次曲面交叉の幾何学を考察することへと読み替えることができるのである。さらに、自由剛体の力学系の分岐現象に着目すると、慣性テンソル A の固有値（物理学的には慣性主軸と呼ぶ）でパラメタ付けられた楕円曲線の族の考察へと自然に導かれる。自由剛体の力学系の分岐現象に関してはここでは詳述しないが、たとえば [4] に自由剛体の力学系に関わる数学の豊かさとともに書かれている。

他方で、可積分系の理論とのかかわりから、Euler 方程式に同値な Lax 方程式 (Manakov 方程式と呼ばれる) がよく考察される。実は、この Lax 方程式に付随するスペクトル曲線もまた楕円曲線であって、上と同じパラメタをもつ別の楕円曲線の族を得ることができる。本稿では、以上のようにして自由剛体の力学系から現れる楕円曲線のいくつかの族に関して、複素代数幾何学的な観点から考察する。以下では変数はすべて複素数とする。なお、証明などより詳しいことに関しては [14] をみられたい。

これまでの完全積分可能系の代数幾何学的な研究では Lax 方程式のスペクトル曲線とその Jacobi 多様体や固有ベクトルの作る正則直線束等に興味をもたれることが普通である。(たとえば, [1, 2, 8] などを参照されたい。) しかし、完全積分可能な力学系に関してより代数幾何的に豊かな側面が明らかになると期待することは、自然であろう。筆者らは、この研究がそのような問題意識に根ざす試みの一例となればと思っている。

2 素朴楕円ファイバー空間

はじめに Euler 方程式の解曲線について考える。序論にも述べたが、Euler 方程式の解曲線は第一積分のなす2次曲面の交叉に一致する。この2次曲面の交叉を表す方程式は、適当な座標変換によって次のように表される。

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 & = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 & = 0. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $(a : b : c : d)$, $(x : y : z : w)$ はそれぞれ $P_3(\mathbb{C})$ の斉次座標である。

各 $(a : b : c : d)$ を固定するごとに (2) が $P_3(\mathbb{C})$ 内に定める代数曲線に関しては次のよく知られた結果が基本的である。

命題 1. パラメタ a, b, c, d が相異なるとすると, (2) が $P_3(\mathbb{C})$ 内に定める代数曲線 C は滑らかな楕円曲線であり, 射影直線 $P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の4点 a, b, c, d で分岐する2重被覆となる.

次に, パラメタ $(a:b:c:d)$ も変数として, (2) が直積空間 $P_3(\mathbb{C}) \times P_3(\mathbb{C})$ に定める4次元の代数多様体 F に関して考察する. ただし, $((a:b:c:d), (x:y:z:w)) \in P_3(\mathbb{C}) \times P_3(\mathbb{C})$ である. このようにして得られた代数多様体 F に関して次がわかる.

補題 1. 4次元代数多様体 F は滑らかな有理多様体 ($P_4(\mathbb{C})$ に双有理同値) である.

直積空間 $P_3(\mathbb{C}) \times P_3(\mathbb{C})$ の第一成分への射影を F 上に制限したものを π_F とあらわす. すると, 命題2によって, $\pi_F: F \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ が楕円ファイバー空間の構造を持つことがわかる. これを, 素朴楕円ファイバー空間と呼ぶ. ただし, 楕円ファイバー空間とは複素解析空間のあいだの全射正則写像で一般ファイバーが楕円曲線となるものを指す. 楕円ファイバー空間 π_F の特異ファイバーについては以下のようになることがわかる. これについては, [3] で本質的に分類されていることに注意する.

- a, b, c, d のうち2だけが等しい場合 (たとえば, $a = b \neq c \neq d \neq a$ のとき): 特異ファイバーは, 2つの滑らかな有理曲線が2点で交わったもの (I_2 型特異ファイバー).
- a, b, c, d のうち2つずつ等しい組が2つある場合 (たとえば, $a = b \neq c = d$): 特異ファイバーは, 4つの滑らかな有理曲線が数珠状に交わったもの (I_4 型特異ファイバー).
- a, b, c, d のうち3つが等しい場合 (たとえば, $a = b = c \neq d$ のとき): 特異ファイバーは, ひとつの滑らかな有理曲線 (重複度2).
- $a = b = c = d$ の場合: 特異ファイバーは, 空間2次曲面.

この分類により, 楕円ファイバー空間 π_F は平坦でないことがわかる. ただし, 分類の中に現れる I_2 型, I_4 型とは, [9] による楕円曲面の特異ファイバーの分類で使われた記号である. 以下の節でも同様である. 上の分類から, 素朴楕円ファイバー空間の1次元ファイバーで [9] による楕円曲面の特異ファイバーの分類にないようなファイバーが現れることがわかる.

さらに, 素朴楕円ファイバー空間 $\pi_F: F \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ は有理型切断を持たない. 4節で F に付随して Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間を構成するが, これは F そのものと双有理同値ではなく次節で考える商楕円ファイバー空間と双有理同値である. このことは, 素朴楕円ファイバー空間に有理型切断がないことに起因している.

3 商ファイバー空間

この節では、前節で考察した素朴ファイバー空間 F の対称性に関して考えたい。この楕円ファイバー空間の方程式 (2) は斉次座標 $(x : y : z : w)$ の各成分の符号を替える変換に関して不変である。したがって、この座標の符号変化によって Abel 群 $\{\pm 1\}^4$ が F に作用していることがわかる。対角部分群 $\{\pm(1, 1, 1, 1)\} \subset \{\pm 1\}^4$ は F に自明に作用するため、剰余群 $G := \{\pm 1\}^4 / \{\pm(1, 1, 1, 1)\}$ が F に作用していると考えることができる。明らかに、 G の F への作用はファイブレーション π_F の各ファイバーを保つ。

ところで、Abel 群 $\{\pm 1\}^4$ の各成分を掛け合わせることによって自然な準同型 $\{\pm 1\}^4 \ni (s_1, s_2, s_3, s_4) \mapsto s_1 s_2 s_3 s_4 \in \{\pm 1\}$ が得られるが、これは群準同型 $G \rightarrow \{\pm 1\}$ を惹き起こす。その核を $N \subset G$ と書くことにする。実は、 N は素朴楕円ファイバー空間 F の各正則ファイバー上に自由に作用している。このことによって、商空間 F/N は $P_3(\mathbb{C})$ 上の楕円ファイバー空間の構造を持つことがわかる。

次に、商ファイバー空間 F/N の具体的な記述を与える。そのために、重み付 4 次元複素射影空間 $P_4(\mathbb{C}; 2 : 1 : 1 : 1 : 1)$ を考え、 $(P : X : Y : Z : W)$ でその斉次座標を表すこととする。重み付複素射影空間 $P_4(\mathbb{C}; 2 : 1 : 1 : 1 : 1)$ は $\mathbb{C}^5 \setminus \{0\}$ を \mathbb{C}^* の $\mathbb{C}^5 \setminus \{0\} \ni (P, X, Y, Z, W) \mapsto (u^2 P, uX, uY, uZ, uW) \in \mathbb{C}^5 \setminus \{0\}$, $u \in \mathbb{C}^*$ なる作用に関する商空間であることに注意する。次の 3 つの方程式で定義される直積 $P_4(\mathbb{C}; 2 : 1 : 1 : 1 : 1) \times P_3(\mathbb{C})$ 内の 4 次元代数多様体を Q と書くこととする：

$$\begin{cases} P^2 &= XYZW, \\ 0 &= aX + bY + cZ + dW, \\ 0 &= X + Y + Z + W. \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 $(a : b : c : d)$ は $P_3(\mathbb{C})$ の斉次座標である。定義式 (3) から、この 4 次元代数多様体 Q も $P_3(\mathbb{C})$ 上の楕円ファイバー空間の構造を持つことが簡単にわかる。また、楕円ファイバー空間 $Q \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ が有理型切断をもつことも簡単に示される。

さて、上のように定義された 4 次元代数多様体 Q と商楕円ファイバー空間との関係については次が成り立つ。

命題 2. 商楕円ファイバー空間 F/N は Q と同型である。

ところが、商楕円ファイバー空間の全空間 $F/N \cong Q$ は特異点を持つ。この特異点の解消を行って、 $P_3(\mathbb{C})$ 上の滑らかな楕円ファイバー空間を構成することができるが、得られた楕円ファイバー空間はやはり平坦でなく、しかも [9] による楕円曲面の特異ファイバーの分類にないような 1 次元特異ファイバーが現れる。(詳しくは、[14] を参照のこと。) そこで、次節では商楕円ファイバー空間 $F/N \cong Q$ に双有理同

値であって、平坦かつ特異ファイバーがすべて [9] による楕円曲面の特異ファイバーの分類に現れるものに限るような滑らかな楕円ファイバー空間を、Weierstraß 標準形を用いて構成する。

4 Weierstraß 標準形

4.1 一般事項

はじめに、Weierstraß 標準形の一般的な事柄について述べる。詳しいことや関連する事柄に関しては、[9, 5, 6, 11, 12, 13] 等を見られたい。

B を代数多様体とし、 $L \rightarrow B$ をその上の正則直線束とする。 B の構造層 \mathcal{O}_B を自明な直線束と同一視する。 $P_2(\mathbb{C})$ -束 $P = P(L^{\otimes 2} \oplus L^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_B) \rightarrow B$ の斉次ファイバー座標 $(x : y : z)$ をとり、3つの正則直線束の大域的切断 $e_1, e_2, e_3 \in H^0(B, L^{\otimes 2})$ で $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ を満たすものによって定まる方程式

$$\begin{aligned} y^2 z &= 4(x - e_1 z)(x - e_2 z)(x - e_3 z) \\ &= 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3 \end{aligned} \quad (4)$$

で定義される P 内の超曲面 W_B を考える。ここで、 $g_2 \in H^0(B, L^{\otimes 4})$, $g_3 \in H^0(B, L^{\otimes 6})$ は、 $g_2 = 4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + 3e_1)$, $g_3 = -e_1 e_2 e_3$ によって定まる。標準射影を制限することにより、 W_B が B 上の平坦な楕円ファイバー空間になることがわかる。これを楕円ファイバー空間の Weierstraß 標準形という。ただし、 W_B は一般に特異点を持つ。より詳しくは次が成り立つ。

命題 3 ([11]). G_2, G_3, D を各々 g_2, g_3 , および判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ の零点の定める B 上の因子とする。

1. W_B が $((x : y : z), \sigma) \in P$ で特異点を持つなら、 $y = 0$ かつ $z \neq 0$ である。ただし、 $\sigma \in B$ である。
2. W_B が $((0 : 0 : 1), \sigma) \in P$ で特異点を持つ $\iff \sigma \in \text{Supp}(G_2) \cap \text{Supp}(G_3)$, かつ G_3 は σ で特異点を持つ。
3. W_B が $((x : 0 : z), \sigma) \in P$ で特異点を持つ $\iff \sigma \notin \text{Supp}(G_2) \cup \text{Supp}(G_3)$, かつ D は σ で特異点を持つ。
このとき、 $(x : z) = (-3g_3 : 2g_2)$ である。

4.2 素朴楕円ファイバー空間 F に対する Weierstraß 標準形

素朴楕円ファイバー空間 F に付随して, Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間を構成する. 命題 1 によって楕円ファイブレーション π_F の正則ファイバーの $P_1(\mathbb{C})$ の 2 重被覆としての分岐点は a, b, c, d であった. この 4 点を一次分数変換 $\frac{(z-c)(b-d)}{(z-d)(b-c)}$ によって変換すると, $\kappa := \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}, 1, 0, \infty$ へとそれぞれ移される. さらに前の 3 つの平均を全体から引くことによって, これらは $\frac{2\kappa-1}{3}, \frac{2-\kappa}{3}, -\frac{\kappa+1}{3}, \infty$ へとそれぞれ移される. 3 つ組 $\frac{2\kappa-1}{3}, \frac{2-\kappa}{3}, -\frac{\kappa+1}{3}$ によって本質的に正則切断 e_1, e_2, e_3 は決定されるが, スケール変換の不定性が残る. したがって, 分母 $(a-d)(b-c)$ を取り除いて正則直線束 $\mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(1)$ の非自明な正則切断 s に置き換えることができ, $s \neq 0$ なる開集合 U_s 上次のようになることがわかる.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{3s^2} \{(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d)\}, \\ e_2 &= \frac{1}{3s^2} \{-2(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d)\}, \\ e_3 &= \frac{1}{3s^2} \{(a-b)(c-d) - 2(a-c)(b-d)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

これらに対しては,

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{4}{3s^4} \{(a-b)^2(c-d)^2 - (a-b)(c-d)(a-c)(b-d) + (a-c)^2(b-d)^2\}, \\ g_3 &= \frac{4}{27s^6} \left\{ -2(a-b)^3(c-d)^3 + 3(a-b)^2(c-d)^2(a-c)(b-d) \right. \\ &\quad \left. + 3(a-b)(c-d)(a-c)^2(b-d)^2 - 2(a-c)^3(b-d)^3 \right\} \end{aligned}$$

となることに注意する. (5) は開集合 U_s 上での正則直線束 $\mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(2)$ の正則切断 e_1, e_2, e_3 を局所表示したものとみなせることに注意する. したがって, 前節の L としては $L = \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(1)$ ととればよいことがわかる. すると, $g_2 \in H^0(P_3(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(4)), g_3 \in H^0(P_3(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(6))$ である. さて, 上の正則切断 (5) に対応して, 方程式 (4) で定義される $P_3(\mathbb{C})$ 上の $P_2(\mathbb{C})$ -束 $P(\mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(2) \oplus \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(3) \oplus \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})})$ の全空間の超平面として Weierstraß 標準形 W が定義される. 判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ は

$$\Delta = \frac{16}{s^{12}} (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2$$

と計算されるので, 命題 3 より W の特異点は $P_3(\mathbb{C})$ の 6 枚の平面 $a = b, a = c, a = d, b = c, b = d, c = d$ の点のファイバー上に特異点を持つ. この特異点の解消

を行って、 W に双有理同値（正則ファイバーのなす開集合の上では双正則同型）で次を満たす楕円ファイバー空間 \widehat{W} を求める：

- (A) \widehat{W} は平坦かつ滑らかな楕円ファイバー空間である。
- (B) \widehat{W} の特異ファイバーはすべて [9] による楕円曲面の特異ファイバーの分類に含まれている型のものである。

実際にこのような条件を満たす楕円ファイバー空間を得るためには、さらに底空間を改変しなければならない。

4.3 \widehat{W} の構成

ここでは、商楕円ファイバー空間 $F/N \cong Q$ に双有理同値で条件 (A), (B) を満たす楕円ファイバー空間 \widehat{W} の構成について説明する。

4.3.1 W の特異点解消

ファイブレーション π_W の $(a:b:c:d) = (1:1:1:1)$ での様子を詳しく知るため、底空間 $P_3(\mathbb{C})$ を 1 点 $(a:b:c:d) = (1:1:1:1)$ でブローアップする。これによって得られた空間を B と書き、標準的全射を $\Phi_B: B \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ とあらわす。ブローイングアップによる例外集合を E とかいて、 $B^* = B \setminus E$, $P_3(\mathbb{C})^* = P_3(\mathbb{C}) \setminus \{(1:1:1:1)\}$ とあらわすと、 $B^* \cong P_3(\mathbb{C})^*$ である。例外集合 E は $P_3(\mathbb{C})$ の 1 点 $(1:1:1:1)$ を通る射影直線全体の集合 \mathcal{L} と同一視でき、 B も \mathcal{L} に含まれる直線の和集合と同一視する。これによって、自然に射影 $\tau_B: B \rightarrow E$ が定まる。さらに、 E は $P_3(\mathbb{C})$ の $(a:b:c:d) = (1:1:1:1)$ を通らない任意の射影平面 E' と、 \mathcal{L} の任意の直線を E' との交点に対応付ける同一視できる。以下で用いるため、 $E \cong P_2(\mathbb{C})$ 上の正則直線束 $L_E = \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(1)$ をとる。このとき、 $(\tau_B^*(L_E))|_{B^*} \cong (\Phi_B^*(L))|_{B^*}$ なる正則直線束の同型が得られる。

任意の正整数 k に対して、 $H^0(P_3(\mathbb{C}), L^{\otimes k}) \cong H^0(P_3(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(k))$ の元は、 a, b, c, d を変数とする k 次斉次多項式と同一視できる。 $b-a, c-a, d-a$ で生成される k 次斉次多項式の空間を H'_k と書くと、 H'_k は $H^0(P_3(\mathbb{C}), L^{\otimes k})$ の部分空間とみなせる。さらに、次の正則切断の空間の同型が得られる。

$$H'_k \cong H^0(E, L_E^{\otimes k}).$$

さて、前節の W を定める $e_1, e_2, e_3 \in H^0(P_3(\mathbb{C}), L^{\otimes 2})$, $g_2 \in H^0(P_3(\mathbb{C}), L^{\otimes 4})$, $g_3 \in H^0(P_3(\mathbb{C}), L^{\otimes 6})$, $\Delta \in H^0(P_3(\mathbb{C}), L^{\otimes 12})$ はそれぞれ $H'_2, H'_4, H'_6, H'_{12}$ の元である。

したがって、上のことから e_1, e_2, e_3 によって $E \cong P_2(\mathbb{C})$ 上の楕円ファイバー空間 $\pi_T : T \rightarrow E$ が構成できる。このとき、 $W|_{B^*}$ は T の射影 $\tau_B|_{B^*}$ によるリフトと同一視できる。したがって、楕円ファイバー空間の同型 $\tau_B^*(T)|_{B^*} \cong \Phi_B^*(W)|_{B^*}$ が得られ、 $\tau_B^*(T)$ と $\Phi_B^*(W)|_{B^*}$ は双有理同値となる。

そこで、上での E' として射影平面 $a+b+c+d=0$ を選んで E 上の楕円ファイバー空間 T を定める正則切断 e_1, e_2, e_3 を H_2^1 の元として記述する。ブローイングアップ $\Phi_B : B \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ は $m = \frac{a+b+c+d}{4}$ とおいて次を満たす $(t_0 : t_1 : t_2 : t_3) \in P_3(\mathbb{C})$ を選ぶことによって得られる：

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a-m & b-m & c-m & d-m \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix} < 2.$$

すると、 $(t_0 : t_1 : t_2 : t_3)$ で $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 0$ を満たすようなものをブローイングアップ座標とみなすことができる。このとき、対応する正則切断は次のようになる。

$$e_1 = \frac{1}{3s^2} \{(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) + (t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\},$$

$$e_2 = \frac{1}{3s^2} \{-2(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) + (t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\},$$

$$e_3 = \frac{1}{3s^2} \{(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) - 2(t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\},$$

$$g_2 = \frac{4}{3s^4} \{(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) + \omega(t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\} \{(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) + \omega^2(t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\},$$

$$g_3 = \frac{4}{27s^6} \{(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) + (t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\} \{-2(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) + (t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\} \\ \times \{(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) - 2(t_0 - t_2)(t_1 - t_3)\},$$

$$\Delta = \frac{16}{s^{12}} (t_0 - t_1)^2 (t_0 - t_2)^2 (t_0 - t_3)^2 (t_1 - t_2)^2 (t_1 - t_3)^2 (t_2 - t_3)^2.$$

ここで、1次式 s は4.2節のように、これらが正則直線束の正則切断の開集合 $s \neq 0$ 上での局所表示となるように選ばれる。さらに、函数不変量は次のようになる。

$$J = \frac{\{(t_0 - t_1)^2 (t_2 - t_3)^2 + (t_0 - t_2)^2 (t_1 - t_3)^2 + (t_0 - t_3)^2 (t_1 - t_2)^2\}^3}{54(t_0 - t_1)^2 (t_0 - t_2)(t_0 - t_3)(t_1 - t_2)^2 (t_1 - t_3)^2 (t_2 - t_3)^2}.$$

特に、 Δ のかたちから、楕円ファイバー空間 $\pi_T : T \rightarrow E$ の特異ファイバーは E の6本の射影直線

$$l_{01} : t_0 = t_1, \quad l_{02} : t_0 = t_2, \quad l_{03} : t_0 = t_3, \quad l_{12} : t_1 = t_2, \quad l_{13} : t_1 = t_3, \quad l_{23} : t_2 = t_3$$

上にあることがわかる。これら6本の射影直線の配位は図1のようになる。

T の改変

これまでに、Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間 $\pi_W : W \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ の底空間 $P_3(\mathbb{C})$ の 1 点ブローイングアップ $\Phi_B : B \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ による例外集合 E 上に Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間 $\pi_T : T \rightarrow T$ を構成した。そこで、まずこの楕円ファイバー空間の全空間 T を改変して、先に述べた条件 (A), (B) を満たす楕円ファイバー空間を構成しそれを射影 $\tau_B : B \rightarrow E$ によって W 上に引き上げることを考えたい。実は、以下でみるように条件 (B) を満たす楕円ファイバー空間を構成するためにはさらに底平面 E を改変する必要がある。

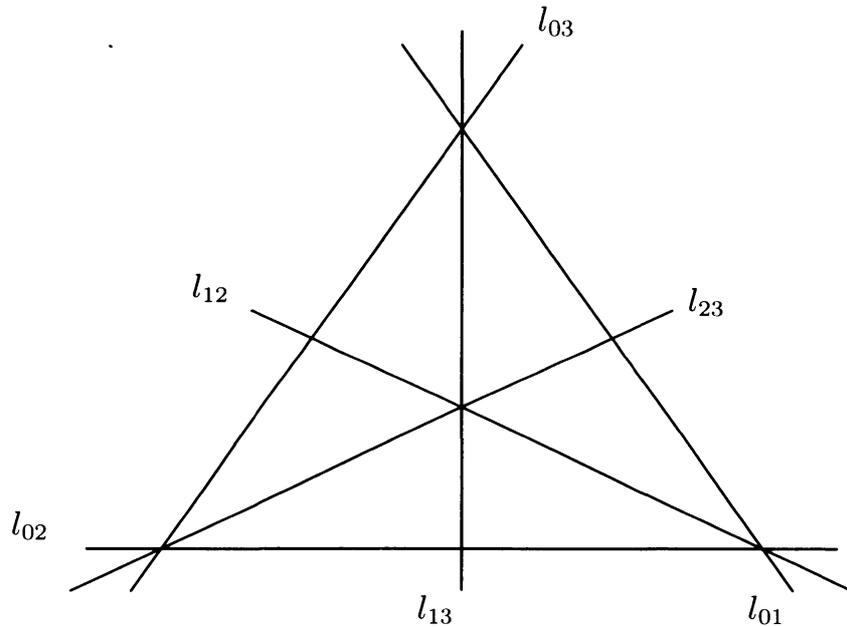


図 1

命題 3 によって、3 次元代数多様体 T の特異点集合は次の曲線の和集合として与えられることがわかる：

$$(x : y : z) = \left(\frac{(t_0 - t_2)(t_0 - t_3)}{3s^2} : 0 : 1 \right), t_0 = t_1;$$

$$(x : y : z) = \left(\frac{(t_0 - t_1)(t_0 - t_3)}{3s^2} : 0 : 1 \right), t_0 = t_2;$$

$$(x : y : z) = \left(\frac{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)}{3s^2} : 0 : 1 \right), t_0 = t_3;$$

$$\begin{aligned} (x : y : z) &= \left(\frac{(t_1 - t_3)(t_1 - t_0)}{3s^2} : 0 : 1 \right), t_1 = t_2; \\ (x : y : z) &= \left(\frac{(t_0 - t_2)(t_1 - t_0)}{3s^2} : 0 : 1 \right), t_1 = t_3; \\ (x : y : z) &= \left(\frac{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)}{3s^2} : 0 : 1 \right), t_2 = t_3. \end{aligned}$$

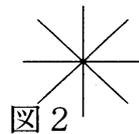
ただし, $(x : y : z)$ は E 上の $P_2(\mathbb{C})$ -束 $P(\mathcal{O}_E(2) \oplus \mathcal{O}_E(3) \oplus \mathcal{O}_E)$ の斉次ファイバー座標とする.

(i) はじめに, T の次の特異点の解消を行う.

$$\begin{aligned} (x : y : z) &= (0 : 0 : 1), P_0 : t_0 = t_1 = t_2; \\ (x : y : z) &= (0 : 0 : 1), P_1 : t_1 = t_2 = t_3; \\ (x : y : z) &= (0 : 0 : 1), P_2 : t_2 = t_3 = t_0; \\ (x : y : z) &= (0 : 0 : 1), P_3 : t_3 = t_0 = t_1. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで, E 上の 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 はそれぞれ 6 直線 $l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{12}, l_{13}, l_{23}$ のうち 3 本の交点となっていることに注意されたい. 上の (6) の特異点解消はトロイダル埋め込みの方法 ([7]) を用いて与えられる. 詳しい計算は [14] を参照していただくことにし, ここでは 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 の近くでどのようにして条件 (A), (B) を満たす楕円ファイブレーションを構成するかについて要点を述べたい.

4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 でのトロイダル埋め込みを用いた特異点解消を実行すると底平面 E での P_0, P_1, P_2, P_3 の近傍では 6 直線 $l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{12}, l_{13}, l_{23}$ の一般の点の上には I_2 型特異ファイバーが並び, 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 の上には各々次の図 2 のような 4 本の射影直線が 1 点で交わったファイバーが得られる.



このようなファイバーは小平による楕円曲面の特異ファイバーの分類にはない. そこで, さらに次のステップに沿って改変を行う.

(a) はじめに, トロイダル埋め込みによって得られた全空間を, 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 各々の上のファイバーの 4 直線の交点で別々にブローアップする. 例外集合は $P_2(\mathbb{C})$ に同型であり, それぞれファイバーの 4 直線の固有変換と 1 点ずつで交わる.

(b) 次に, 底平面 E を 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 で別々にブローアップする. このとき現れる各々の例外曲線 (射影直線に同型) は, (a) で現れた例外集合 (射影平面に同

型) のファイバーの 4 直線との 4 交点を通る円錐曲線のペンシルとなることがわかる. ここで現れた新たな底平面を \hat{E} とあらわすことにする.

(c) 最後に, (a) の改変で得られた全空間を 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 それぞれについてのファイバーの 4 直線の固有変換 (合計 16 本の有理曲線) を中心にしてブローアップする. すると, (b) で現れた底平面 \hat{E} の 4 つの例外曲線の一般の点の上には I_0^* 型特異ファイバーが現れ, それぞれの円錐曲線ペンシルの 3 つの特異円錐曲線 (2 つの射影直線のペア) に対応して I_1^* 型の特異ファイバーが現れることがわかる.

(ii) 次の 3 点での特異点解消については, やはりトロイダル埋め込みの方法を用いれば得られる.

$$(x : y : z) = \left(\frac{(t_0 - t_2)^2}{3s^2} : 0 : 1 \right), \quad Q_0 : t_0 = t_1 \neq t_2 = t_3;$$

$$(x : y : z) = \left(\frac{(t_0 - t_1)^2}{3s^2} : 0 : 1 \right), \quad Q_1 : t_0 = t_2 \neq t_1 = t_3;$$

$$(x : y : z) = \left(\frac{(t_1 - t_0)^2}{3s^2} : 0 : 1 \right), \quad Q_2 : t_0 = t_3 \neq t_1 = t_2.$$

この際は, 底平面を改変することなく, 条件 (A), (B) を満たす楕円ファイブレーションを得ることができる. 詳しい計算は [14] を参照されたい. ここでは, 底平面の 3 点 Q_0, Q_1, Q_2 の上には I_4 型特異ファイバーが現れることを述べるにとどめる.

(iii) 最後に, 6 直線 $l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{12}, l_{13}, l_{23}$ の固有変換を中心に全空間をブローアップして張りあわせを行うことで, 楕円ファイバー空間 $\pi_{\hat{T}} : \hat{T} \rightarrow \hat{E}$ が構成されることがわかる. 以上をまとめると次の定理を得る.

定理 1. Weierstrass 標準形の楕円ファイバー空間 $\pi_T : T \rightarrow E$ は, E の 4 点 $t_0 = t_1 = t_2, t_1 = t_2 = t_3, t_2 = t_3 = t_0, t_3 = t_0 = t_1$ でのブローアップ \hat{E} 上に定まる条件 (A), (B) をみたす楕円ファイバー空間 $\pi_{\hat{T}} : \hat{T} \rightarrow \hat{E}$ に双有理同値である. さらに, $\pi_{\hat{T}}$ の特異ファイバーは次のようになる:

- ブローアップ $\tau_{\hat{E}}$ による例外集合と 6 直線 $t_0 = t_1, t_0 = t_2, t_0 = t_3, t_1 = t_2, t_1 = t_3, t_2 = t_3$ の固有変換との交点上の特異ファイバーは I_1^* 型.
- ブローアップ $\tau_{\hat{E}}$ による例外集合の一般の点の上の特異ファイバーは I_0^* 型.
- 3 点 $Q_0 : t_0 = t_1, t_2 = t_3; Q_1 : t_0 = t_2, t_1 = t_3; Q_2 : t_0 = t_3, t_1 = t_2$ 上の特異ファイバーは I_4 型.
- 6 直線 $t_0 = t_1, t_0 = t_2, t_0 = t_3, t_1 = t_2, t_1 = t_3, t_2 = t_3$ の一般の点の上の特異ファイバーは I_2 型.

ほかのファイバーは正則ファイバーである。ここで、座標 $(t_0 : t_1 : t_2 : t_3)$ で $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 0$ を満たすものを E 上の点とみなしている。

W の改変

楕円ファイバー空間 $\pi_{\hat{T}} : \hat{T} \rightarrow \hat{E}$ を射影 $\tau_B : B \rightarrow E$ を用いて引き上げることにより、Weierstraß 標準形 $\pi_W : W \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ の改変を得ることができる。より厳密には以下の定理が得られる。 π_W の底空間 $P_3(\mathbb{C})$ の 4 直線 $a = b = c$, $b = c = d$, $c = d = a$, $d = a = b$ の B での固有変換を中心とした B のブローイングアップを \hat{B} とあらわし、例外集合を C とあらわす。

定理 2. Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間 $\pi_W : W \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ は、 \hat{B} 上に定まる条件 (A), (B) をみたす楕円ファイバー空間 $\pi_{\hat{W}} : \hat{W} \rightarrow \hat{B}$ に双有理同値である。さらに、 $\pi_{\hat{W}}$ の特異ファイバーは次のようになる：

- 例外集合 C と 6 平面 $a = b$, $a = c$, $a = d$, $b = c$, $b = d$, $c = d$ の固有変換との交点上の特異ファイバーは I_1^* 型。
- 例外集合 C の一般の点の上の特異ファイバーは I_0^* 型。
- 3 直線 $a = b$, $c = d$; $a = c$, $b = d$; $a = d$, $b = c$ 上の特異ファイバーは I_4 型。
- 6 平面 $a = b$, $a = c$, $a = d$, $b = c$, $b = d$, $c = d$ の一般の点の上のファイバーは I_2 型。

ほかのファイバーは正則ファイバーである。

4.3.2 $F/N \cong Q$ と W の間の双有理写像

ここで、商楕円ファイバー空間 $F/N \cong Q$ と Weierstraß 標準形 W との間の双有理写像を構成する。4 次元代数多様体 Q は (3) によって定義されているのであった。そこで、次のような変数を導入する。

$$\begin{aligned} U &= a^2X + b^2Y + c^2Z + d^2W, \\ V &= a^3X + b^3Y + c^3Z + d^3W. \end{aligned} \tag{7}$$

ここでの W は $P_5(\mathbb{C}; 2 : 1 : 1 : 1 : 1)$ の斉次座標であって、Weierstraß 標準形の全空間とは別のものであることに注意されたい。すると、代数多様体 Q 上では次のよう

になる.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}.$$

さらに, a, b, c, d がすべて異なれば,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{(b+c+d)U+V}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \\ Y &= -\frac{(c+d+a)U+V}{(b-a)(b-c)(b-d)}, \\ Z &= -\frac{(d+a+b)U+V}{(c-a)(c-b)(c-d)}, \\ W &= -\frac{(a+b+c)U+V}{(d-a)(d-b)(d-c)} \end{aligned} \quad (8)$$

となるから,

$$\begin{aligned} P^2 &= XYZW \\ &= \frac{\{(b+c+d)U+V\}\{(c+d+a)U+V\}\{(d+a+b)U+V\}\{(a+b+c)U+V\}}{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2} \end{aligned}$$

である. そこで,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \frac{1}{3(d-a)(d-b)(d-c)} \left[\{(d-b)(d-c)(b+c+d) + (d-c)(d-a)(c+d+a) \right. \\ &\quad \left. + (d-a)(d-b)(d+a+b)\}U \\ &\quad \left. + \{(d-b)(d-c) + (d-c)(d-a) + (d-a)(d-b)\}V \right], \\ \mathcal{Y} &= \frac{2(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)P}{\{(a+b+c)U+V\}}, \\ \mathcal{Z} &= -\frac{(a+b+c)U+V}{(d-a)(d-b)(d-c)} \end{aligned} \quad (9)$$

のようにおくと,

$$\mathcal{Y}^2 \mathcal{Z} = 4(\mathcal{X} - \hat{e}_1 \mathcal{Z})(\mathcal{X} - \hat{e}_2 \mathcal{Z})(\mathcal{X} - \hat{e}_3 \mathcal{Z}) \quad (10)$$

なるかたちの方程式を得る. ここで,

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{3}\{(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d)\},$$

$$\begin{aligned}\widehat{e}_2 &= \frac{1}{3}\{-2(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d)\}, \\ \widehat{e}_3 &= \frac{1}{3}\{(a-b)(c-d) - 2(a-c)(b-d)\}\end{aligned}\quad (11)$$

である. これらを $\mathcal{O}_{P_3(\mathbb{C})}(1)$ の適当な正則切断で割ることによって, (10) は Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間 W の方程式と同値となることがわかる. さらに, (7), (8), (9), および変換 $P = xyzw$, $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$, $W = w^2$ は座標 $((a : b : c : d), (x : y : z : w))$ に関して有理関数でかけるので, $F/N \cong Q$ と W の間には, 正則ファイバーのなす Zariski 開集合上双正則な双有理写像が得られる.

以上の結果をまとめると次の定理を得る.

定理 3. 素朴楕円ファイバー空間 $\pi_F : F \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ と楕円ファイバー空間 $\pi_{\widehat{W}} : \widehat{W} \rightarrow \widehat{B}$ の間には, 4:1 有理型写像 $g : F \dashrightarrow \widehat{W}$ が存在する. さらに, 写像 g は各楕円ファイバー空間の正則ファイバーのなす Zariski 開集合のあいだの 4:1 正則写像であって, 各正則ファイバー上で 4:1 の同種写像を惹き起こす.

5 スペクトル曲線族との関係

最後に, Manakov 方程式とそれに付随するスペクトル曲線, および前節までにあられた楕円ファイバー空間との関係について述べる.

自由剛体の Euler 方程式 (1) は, Lie 環の自然な同型 $R : \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, \times)$ によって,

$$\frac{dp}{dt} = p \times (A^{-1}p) \quad (12)$$

のように変換される. ここで, $p = R(\Pi) \in \mathbb{R}^3$ であり, $\Omega = (d\tilde{H})_{\Pi} = R^{-1}(A^{-1}(R(\Pi)))$ となる. 慣性テンソル A から一意的に定まる対称行列 J を用いると, $\Pi = J\Omega + \Omega J$ となる. 実際, $A = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ とすると, $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ を $I_1 = J_2 + J_3$, $I_2 = J_3 + J_1$, $I_3 = J_1 + J_2$ によって定めることができる.

さて, Euler 方程式 (12) は次のパラメタ付き Lax 方程式と同値であることはよく知られている.

$$\frac{d}{dt}(\Pi + \lambda J^2) = [\Pi + \lambda J^2, \Omega + \lambda J].$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ がパラメタである. このパラメタ付き Lax 方程式を Manakov 方程式と呼ぶ ([10]). ここで現れる, 3×3 行列 $\Pi + \lambda J^2$ の固有値は力学系の流れに沿って不変で

あり, この λ でパラメタ付けられた行列 $\Pi + \lambda J^2$ の固有値 μ の全体をスペクトル曲線とよぶ:

$$\det(\Pi + \lambda J^2 - \mu E) = 0.$$

ただし, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ で, E は単位行列である. この方程式は, \mathbb{C}^2 にアフィン 3 次曲線を定めるが, 完備化を行って楕円曲線の族を得ることができる. 実際, スペクトル曲線の方程式を次のかたちに変形できる:

$$(J_1^2 \lambda - \mu)(J_2^2 \lambda - \mu)(J_3^2 \lambda - \mu) + 2h' \lambda - 2l \mu = 0. \quad (13)$$

ここで, $h' = \frac{1}{2}(J_1^2 p_1^2 + J_2^2 p_2^2 + J_3^2 p_3^2)$ は, 次のように計算でき, 力学系の第一積分にしかよらないことがわかる.

$$h' = I_1 I_2 I_3 h + \frac{(I_1 + I_2 + I_3)^2 - 4(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1)}{4} l.$$

パラメタ J_1, J_2, J_3 は I_1, I_2, I_3, h, l によって決定される. このことによって, (13) は $(a : b : c : d)$ でパラメタ付けられた楕円曲線の族を与えることがわかる. さらに,

$$\lambda = \frac{\sqrt{-2l}}{2I_1 I_2 I_3} \left[\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} - \frac{1}{3} \left\{ \left(J_1^2 - \frac{h'}{l} \right) \left(J_2^2 - \frac{h'}{l} \right) + \left(J_2^2 - \frac{h'}{l} \right) \left(J_3^2 - \frac{h'}{l} \right) + \left(J_3^2 - \frac{h'}{l} \right) \left(J_1^2 - \frac{h'}{l} \right) \right\} \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Y}} \right],$$

$$\frac{h'}{l} \lambda - \mu = \left(J_1^2 - \frac{h'}{l} \right) \left(J_2^2 - \frac{h'}{l} \right) \left(J_3^2 - \frac{h'}{l} \right) \frac{\sqrt{-2l}}{2(I_1 I_2 I_3)^3} \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Y}}$$

とおくことによって, (13) は次のかたちに変形できることがわかる.

$$\mathcal{Y}^2 \mathcal{Z} = 4(\mathcal{X} - \hat{e}_1 \mathcal{Z})(\mathcal{X} - \hat{e}_2 \mathcal{Z})(\mathcal{X} - \hat{e}_3 \mathcal{Z}).$$

ここで, $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ は (11) とまったく同じである. したがって, Manakov 方程式に付随するスペクトル曲線の族は Weierstraß 標準形の楕円ファイバー空間 $\pi_W : W \rightarrow P_3(\mathbb{C})$ と同じものであることがわかる. 言い換えれば, スペクトル曲線族は代数幾何的な立場からは扱いやすい Weierstraß 標準形 W によって記述されるのである.

参考文献

- [1] M. Adler, P. van Moerbeke, and P. Vanhaecke, *Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2004.

- [2] M. Audin, *Spinning Tops*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] W. V. D. Hodge and D. Pedoe, *Methods of Algebraic Geometry, vol.II, Book IV*, Cambridge University Press, Cambridge, 1968.
- [4] D. D. Holm and J. Marsden, The Rotor and the Pendulum, in *Symplectic Geometry and Mathematical Physics*, P. Donato et al. (eds.), Birkhäuser, Boston-Basel, 1991, pp.189-203.
- [5] A. Kas, Weierstrass normal forms and invariant of elliptic surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 225, 1977, 259-266.
- [6] S. Kawai, Elliptic fibre spaces over compact surfaces, *Commen. Math. Univ. St. Paul*, 15, 1967, 119-138.
- [7] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings, *Lect. Notes in Math.* 339, Springer-Verlag, 1973.
- [8] H. Knörrer, Integrable Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie, *Jber. d. Dt. Math.-Verein*, 88, 1986, 82-103.
- [9] K. Kodaira, On compact analytic surfaces : I, II, III, *Ann. of Math.*, 71, 1960, 111-152; 77, 1963, 563-626; 78, 1963, 1-40.
- [10] S. V. Manakov, Note on the integration of Euler's equations of the dynamics of an n -dimensional rigid body, *Functional Anal. Appl.* 10, 1976, 328-329.
- [11] R. Miranda, Smooth models for elliptic three-folds, in *The Birational Geometry of Degenerations*, R. Friedman and D.R. Morrison (eds.), Birkhäuser, 1983, 85-133.
- [12] N. Nakayama, On Weierstrass models, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, H. Hijikata et al. (eds.), Vol.II, Kinokuniya, Tokyo, 1988, 405-431.
- [13] N. Nakayama, Global structures of an elliptic fibration, *Publ. RIMS., Kyoto Univ.*, 38, 2002, 451-649.
- [14] I. Naruki and D. Tarama, Some Elliptic Fibrations Arising from Free Rigid Body Dynamics, preprint.