数理解析研究所講究録
第 1696 巻 2010 年 144-157

調和振動子のある摂動の基本解の非有界性

谷島　賢二
学習院大学理学部

1 Introduction, Theorem

d-次元シュレーディンガー方程式の初期値問題

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Delta u+V(t,x)u, \quad u(s,x)=\varphi(x) \tag{1}$$

を考える。$V(t,x)$ は実可測関数とする。もし, 任意の $s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して, $\|u(t)\|_{\mathcal{H}}=\|\varphi\|$, $t\in\mathbb{R}$ を満たす (1) の解 $u(t)\in\mathcal{H}$ が一意的に存在して, $\mathbb{R}\ni t\mapsto u(t)\in\mathcal{H}$ が強連続とすると, 解作用素 $U(t,s)$: $\mathcal{H}\ni\varphi\mapsto u(t)\in\mathcal{H}$ は Chapman-Kolmogorov の等式

$$U(t,s)U(s,r)=U(t,r), \quad U(t,t)=\mathbf{1}$$

を満たす (t,s) に関して強連続に依存する $\mathcal{H}$ のユニタリー作用素の族である. $U(t,s)$ を (1) の $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^d)$ での **unitary propagator**, $U(t,s)$ の超関数核 $E(t,s,x,y)$ を (1) の **基本解**という。

$$U(t,s)\varphi(x)=\int E(t,s,x,y)\varphi(y)dy.$$

以下, $s=0$ の時は変数 s を省略し $E(t,x,y)=E(t,0.x,y)$ などと書く。自由シュレーディンガー方程式に対しては（即ち $V=0$ なら）,

$$E_0(t,x,y)=\frac{e^{\mp\frac{i\pi d}{4}}}{|2\pi t|^{d/2}}e^{i(x-y)^2/2t}, \quad \pm t>0. \tag{2}$$

調和振動子に対しては（即ち $V(x)=|x|^2/2$ なら), $m\pi<t<(m+1)\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ のとき

$$E_h(t,x,y)=\frac{e^{-id(1+2m)\pi/4}}{|2\pi\mathrm{sin}t|^{d/2}}e^{(i/\mathrm{sin}t)(\mathrm{cos}t(x^2+y^2)/2-x\cdot y)} \tag{3}$$

$t = m\pi$ のときは

$$E_h(m\pi, x, y) = e^{-im\pi/2}\delta(x - (-1)^m y). \tag{4}$$

であることはよく知られている。この講演では調和振動子の摂動, すなわち $V(t,x) = x^2/2 + W(t,x)$ で $W(t,x)$ が $|x| \to \infty$ において $W(t,x) = o(|x|^2)$ で, W のヘッシアン行列が正値性の条件 $\partial^2 W(t,x) \geq C\langle x\rangle^{-\delta}$, あるいは負値性の条件 $\partial^2 W(t,x) \leq -C\langle x\rangle^{-\delta}$ を $0 < \delta < 1$ に対して満たすとき, 基本解 $E(m\pi, x, y)$ が滑らかで $|x| \to \infty$ において $|E(t,x,y)| \geq C\langle x\rangle^{d\delta/2(1-\delta)}$ のように増大する関数であることを示す。

定理を述べる前に, まず V がより一般の場合に知られていることを復習し, なぜこのような問題に興味があるのかを説明しよう。$\dot{x}$, $\dot{p}$ は時間変数 t に関する $x(t), p(t)$ の微分である。(1) に対応する古典力学のハミルトニアン

$$H(t,x,p) = \frac{1}{2}p^2 + V(t,x)$$

の生成する正準方程式

$$\dot{x} = \partial_p H(t,x,p) = p, \quad \dot{p} = -\partial_x H(t,x,p) = -\nabla_x V(t,x) \tag{5}$$

の $x(s) = y$, $p(s) = k$ を満たす解を

$$(x(t,s,y,k), p(t,s,y,k)).$$

と書く。ポテンシャル $V(t,x)$ が空間の無限遠方で二次関数より早く増大しない場合についての次の定理は藤原大輔氏 [3] による。

定理 1 ([3]). $V(t,x)$ は x について C^∞, 任意の α に対して $\partial_x^\alpha V(t,x)$ は (t,x) について連続とする。さらに：

$$|\partial^\alpha V(t,x)| \leq C_\alpha, \quad |\alpha| \geq 2 \tag{6}$$

とする。この時, ある $T > 0$ が存在して, $0 < \pm(t-s) < T$ において次が成立する：
(1) $\mathbb{R}^d \ni k \mapsto x(t,s,y,k) \in \mathbb{R}^d$ は微分同相である. $x = x(t,s,y,k)$ を満たす k を k^* とすれば, $(x(r), p(r)) = (x(r,s,y,k^*), p(r,s,y,k^*))$ は $x(t) = x$, $x(s) = y$ を満たす (5) の一意的な解である。この解を用いて

$$S(t,s,x,y) = \int_s^t (x(r)\cdot p(r) - H(r, x(r), p(r)))ds \tag{7}$$

と定義する. S は (t,s,x,y) に関して C^1, (x,y) に関して C^∞ 級で, (1) に対応する古典力学の Hamilton-Jacobi 方程式

$$\partial_t S(t,s,x,y) + \tfrac{1}{2}(\partial_x S(t,s,x,y) - A(t,x))^2 + V(t,x) = 0, \tag{8}$$

$$\partial_s S(t,s,x,y) - \tfrac{1}{2}(\partial_y S(t,s,x,y) + A(t,y))^2 - V(t,x) = 0 \tag{9}$$

をみたす. S は次の評価をみたす:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \left(S(t,s,x,y) - \frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right)\right| \le C_{\alpha\beta}|t-s|, \quad |\alpha+\beta| \ge 2. \tag{10}$$

(2) 基本解 $E(t,s,x,y)$ は次のように書ける：

$$E(t,s,x,y) = \frac{e^{\mp d\pi i/4}}{|2\pi(t-s)|^{d/2}} e(t,s,x,y) e^{iS(t,s,x,y)}. \tag{11}$$

ただし, $e(t,s,x,y)$ は (x,y) について C^∞ 級, 任意の α, β に対して $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta e(t,s,x,y)$ は (t,s,x,y) に関して C^1 級で次を満たす：

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (e(t,s,x,y) - 1)| \le C_{\alpha\beta}|t-s|. \tag{12}$$

調和振動子の例 (4) から分かるように, (6) の条件の下では一般には定理 1 は大きい $t-s$ に対しては成立しない。しかし, $V(t,x)$ の無限大での増大度が二次関数より緩やかな場合は, 定理 1 の結果が任意の t,s に対して拡張される。$V(t,x)$ は定理 1 の条件とともに次を満たす時**劣二次型**と言われる。

$$\lim_{|x|\to\infty} |\partial_x^\alpha V(t,x)| = 0, \quad |\alpha| = 2\,. \tag{13}$$

$Q(T,R) = \{(t,s,x,y)\colon 0 < |t-s| < T,\ x^2+y^2 \ge R^2\}$ と定義する.

定理 2 ([10, 12]). $V(t,x)$ を劣二次型とする。この時, $E(t,s,x,y)$ は $t \ne s$ において (x,y) の C^∞ 級, 任意の α,β に対して $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta E(t,s,x,y)$ は (t,s,x,y) の C^1 級関数である. 任意の $T>0$ に対して, $R>0$ が存在し次が成立する：

(1) $x^2+y^2 \ge R^2$ を満たす $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ と $0 < |t-s| < T$ に対して $x(t) = x$, $x(s) = y$ を満たす (5) の解が一意的に存在する。$(t,s,x,y) \in Q(T,R)$ に対して $S(t,s,x,y)$ を (7) によって定義する。

(2) $Q(T,R)$ において $E(t,s,x,y)$ は (11) の形に書ける。$e(t,s,x,y)$ は定理 1 の性質に加えて次を満たす：

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (e(t,s,x,y) - 1)| = 0. \quad |\alpha| + |\beta| \ge 0.$$

一方, $V(t,x)$ が空間の無限遠方で二次関数より早く増大する場合は空間次元 $d=1$ で $V(t,x) = V(x)$ が t に依存しない場合に限ってではあるが, $E(t,x,y)$ に定理 1 や定理 2 の様な性質は望むべくもないことが示されている。

定理 3 ([10, 14]). $d=1$, $V(t,x)=V(x)\in C^3$, 定数 $c>2$ と $C>0$ が存在して, 十分大きな $|x|>R$ に対して次が成立とする。

$$V \text{ は下に凸}, \quad xV'(x)\geq cV(x)>0, \quad c>2, \tag{14}$$

$$|V^{(j)}(x)|\leq C\langle x\rangle^{-1}|V^{(j-1)}(x)|, \quad j=1,2,3. \tag{15}$$

この時, 任意の (t_0,x_0,y_0) のどんなに小さな近傍においても基本解 $E(t,x,y)$ は C^1 級ではない. さらに, 適当な定数 $0<C_1<C_2<\infty$ に対して $C_1\langle x\rangle^k\leq V(x)\leq C_2\langle x\rangle^k$ なら. $k>10$ の時, $E(t,x,y)$ は任意の t において (x,y) に関して非有界である.

(14) の条件 $xV'(x)\geq cV(x)>0$ が満たされるとき, 十分大きな x に対して, $V(x)\geq C|x|^c$ であることを注意する.

以上の３つの定理から分かるように, 基本解の性質はポテンシャルの空間無限遠方での増大度 $V(x)\sim C|x|^2$ を境に大きく変化する。このためこの境目での振る舞い, とくに V が調和振動子の摂動の時, すなわち

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2+W(t,x), \quad W \text{ は劣二次型} \tag{16}$$

の時の基本解の性質は興味ある対象である。これについて以下が知られている。t がいわゆる non-resonant time の時, すなわち $m\pi<t-s<(m+1)\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ の時, 調和振動子の基本解の構造は劣二次型の摂動 W に対して安定で, 基本解はほぼ (3) と同じ形である:

定理 4 ([4]). V は C^∞ 級で, (16) を満たすとする。この時, $E(t,s,x,y)$ は $m\pi<t-s<(m+1)\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ において (x,y) の C^∞ 関数, $\partial_x^\alpha\partial_y^\beta E(t,s,x,y)$ は (t,s,x,y) の C^1 関数である。任意の $0<\varepsilon<\pi/2$, $m\in\mathbb{Z}$ に対して次が成立する：

(1) $R>0$ が存在し $m\pi+\varepsilon<t-s<(m+1)\pi-\varepsilon$, $x^2+y^2\geq R^2$ を満たす (x,y) と t に対して $x(t)=x$, $x(s)=y$ を満たす (5) の解 $(x(r),p(r))$ が一意的に存在する。$S(t,s,x,y)$ をこの解の作用積分とする. $S(t,s,x,y)$ は次を満たす：

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\left(S(t,s,x,y)-\frac{((\cos(t-s)(x^2+y^2)-2xy)}{2\sin(t-s)}\right)=0, \ \ |a|+|\beta|\geq 2.$$

(2) $m\pi+\varepsilon<t-s<(m+1)\pi-\varepsilon$, $x^2+y^2\geq R^2$ に対して

$$E(t,s,x,y)=\frac{e^{-id(1+2m)\pi/4}}{|2\pi\sin(t-s)|^{d/2}}e^{iS(t,s,x,y)}e(t,s,x,y)$$

が成立する。但し, $e(t,s,x,y)$ は (x,y) について C^∞ 関数, $\partial_x^\alpha\partial_y^\beta e(t,s,x,y)$ は (t,s,x,y) について C^1 で次を満たす：

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \partial_x^\alpha\partial_y^\beta(e(t,s,x,y)-1)=0.$$

t が resonant time $t=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ の時, 基本解の性質は摂動に関してより敏感である。W は劣二次型でかつ $|x|\to\infty$ の時, 次を満たすとき**劣線形型**であるという：

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|\partial_x^\alpha W(t,x)|=o(1),\quad |\alpha|=1.$$

劣線形型の摂動に対しては調和振動子の基本解の性質は $t=m\pi$ でも安定である。

定理 5 ([4, 1, 2]). $V=x^2/2+W(t,x)$ で W は劣線形型, $m\in\mathbb{Z}$ とする. この時, $E(m\pi+s,s,x,y)$ には初期条件の特異性が回帰し

$$\mathrm{WF}_x E(m\pi+s,s,x,y)=\{(-1)^m(y,\xi)\colon \xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\}.$$

$E(m\pi+s,s,x,y)$ は $|x-y|\to\infty$ において急減少である：任意の N に対して定数 C_N が存在して

$$|E(m\pi+s,s,x,y)|\le C_N\langle x-y\rangle^{-N},\quad |x-y|\ge 1. \tag{17}$$

W は劣二次型でさらに次を満たす時, **線形型**と言われる：

$$|\partial_x^\alpha W(t,x)|\le C,\quad |\alpha|=1.$$

定理 6 ([11, 1, 2]). W が線形型の時, 一般には初期条件の特異性 $\delta(x-y)$ は $t=m\pi$ において伝播する. 例えば $W=a\langle x\rangle$ の時, $\hat{\xi}=\xi/|\xi|$ として

$$\mathrm{WF}_x E(m\pi,x,y)=\{(-1)^m(y+2am\hat{\xi},\xi)\colon \xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\},$$

$E(m\pi,x,y)$ は $|x-y|\to\infty$ において急減少である：任意の N に対して定数 C_N が存在して

$$|E(m\pi,x,y)|\le C_N\langle x-y\rangle^{-N},\quad |x-y|\ge R. \tag{18}$$

しかし, 摂動が $|x|\to\infty$ において線形型より早く増大すると, 適当な符号条件のもとで, $E(m\pi,x,y)$ の特異性は「無限遠方に吹き飛ばされ」, (x,y) の滑らかな関数となる：$s=0$ としよう。

定理 7 ([11]). $V=x^2/2+W(t,x)$, W は劣二次型で, $\partial_x^2 W=(\partial^2 W/\partial x_j\partial x_k)$ が, 定数 $0<\delta<1$, $0<C_1<C_2<\infty$ （あるいは $-\infty<C_1<C_2<0$）に対して符号条件:

$$C_1\langle x\rangle^{-\delta}\le\partial_x^2 W(t,x)\le C_2\langle x\rangle^{-\delta}, \tag{19}$$

を満たすとする．この時，$E(m\pi, x, y)$, $m \in \mathbb{Z}$ は (x, y) に関して C^∞ である。

この講演では定理 7 の場合に基本解 $E(m\pi, x, y)$ が $|x-y| \to \infty$ において無限大に発散することを示す．これは線形型以下の時の (17), (18) と鋭いコントラストをなし，調和振動子の摂動の基本解 $E(m\pi, x, y)$ の滑らかさや有界性の性質が摂動 W が劣線形型から優線形型に変わる時に鋭く変化することを意味する。

定理 8 ([5])**.** $V(x) = x^2/2 + W(t, x)$, $W(t, x)$ は劣二次型で符号条件 (19) を満たすとする。$m \in \mathbb{Z}$ と $y \in \mathbb{R}^d$ を任意に固定する。この時，任意の $0 < a < b < \infty$ に対して，$a \le |x| \le b$ の時 $\chi(x) = 1$ を満たす任意の関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ に対して，$R \ge 1$ によらない定数 $0 < M_1 < M_2$ が存在して次が成立する：

$$M_1 R^{d\delta/(2-2\delta)} \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |E(m\pi, x, y)|^2 \chi\left(\frac{x}{R}\right)^2 \frac{dx}{R^d} \right)^{1/2} \le M_2 R^{d\delta/(2-2\delta)}. \qquad (20)$$

注意 9. δ が 0 から 1 に増大するとき，$|x| \to \infty$ での $W(t, x)$ の増大度 $2 - \delta$ は減少し，摂動 $W(t, x)$ の大きさは小さくなるにもかかわらず，$E(m\pi, x, y)$ の $|x| \to \infty$ での増大度

$$r(\delta) = d\delta/(2 - 2\delta)$$

は 0 から無限大に増大する。この「矛盾」は準古典的「説明」できる。準古典論では初期関数 $\delta(x-y) = E(0, x, y)$ は，時間 0 において $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ の Lagrange 平面 $\{(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x = y, p \in \mathbb{R}^d\}$ に密度 $(2\pi)^{-d/2} dp$ で一様分布する粒子群 Γ を表す。時間 $m\pi$ 後，Γ は古典力学のハミルトン流によって $\{(x(m\pi, y, k), p(m\pi, y, k)) : k \in \mathbb{R}^d\}$ に移相される．今の場合，$|k| \to \infty$ で

$$|p(m\pi, y, k)| \sim |k|, \quad |x(m\pi, y, k)| \sim |k|^{1-\delta}$$

である（補題 12 を参照）．ゆえに準古典理論（WKB 法）によって $|x| \to \infty$ の時，

$$|E(m\pi, x, y)| \sim \left| \det\left(\frac{\partial x}{\partial k} \right) \right|^{-1/2} \sim |k|^{d\delta/2} \sim |x|^{d\delta/(2-2\delta)}.$$

上の「矛盾」にはまた別の説明もある：$\delta = 0$ の時，$W = c\langle x \rangle^2$ で $m\pi$ は $V = x^2/2 + W$ に対する resonant 時間ではないから対応する $E(m\pi, x, y)$ は有界である。$\delta = 1$ の時は，$W = c\langle x \rangle$ だから，前定理によって $E(m\pi, x, y)$ は有界領域 $|x - y| \le 2cm$ に集中する。これは $C\langle x \rangle^{d\delta/(2-2\delta)}$ の $\delta \to 1$ での極限と考えることができる。波動関数の無限遠方における挙動や特異性は $|x| \to \infty$ や運動量変数 $|\xi| \to \infty$ における挙動で決まる。このような極限的な量が摂動に関して不連続的に変化することはそれほど珍しくはない。

注意 10. 定理 8 の条件のもとで (1) の解に対して分散型評価は $(0,\pi)$ を超えては成立しない。これはもちろん $E(\pi,x,y)$ が有界でないためであるが，これまでに知られている分散型評価が不成立な例は，$E(t,x,y)$ が有限領域で特異性をもつために非有界になるもので，基本解が滑らかで無限遠方で増大する様な例はこれが多分はじめてであると思う。

注意 11. 定理は [7] で予想されていた。[7] では準古典型のシュレーディンガー方程式

$$ih\frac{\partial u}{\partial t}=\left(-\frac{h^2}{2}\Delta+\frac{1}{2}x^2+h^\mu W(x)\right)u,$$

の基本解が始点 $x(0)=y$ と終点 $x(m\pi)=x$ を結ぶ軌道の作用積分 $S(x,y)$ と $\mathbb{R}^{2d}\setminus\{(x,(-1)^m x)\colon x\in\mathbb{R}^d\}$ のコンパクト集合上 $C^{-1}\le|a(x,y,h)|\le C$ を満たす関数 a を用いて

$$E(m\pi,x,y)=h^{-d(1+\nu)/2}a(x,y,h)e^{iS(x,y)/h},\ \ \nu=\mu/(1-\delta),$$

と表せることが示されている。$E(m\pi,x,y)$ は通常の $h^{-d/2}$ に比べ $h^{-d\nu/2}$ だけ大きな因子を含む。この論文 [7] の手法が特異性のある $W(x)=C|x|^{2-\delta}$ に対しても適用できれば，この結果からこの W にたいして定理 8 の結果が成立することが方程式の斉次性を用いて導ける。

2 正準変換の母関数

定理の証明をスケッチしよう。まず $t=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ の近傍において解作用素 $U(t,0)$ を Fourier 積分作用素によって

$$U(t,0)u(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{i^{-(m+1)d}e^{ix\cdot\xi-i\tilde{\varphi}(t,\xi,y)-\varepsilon\xi^2}a(t,\xi,y)}{(2\pi)^d|\mathrm{cos}t|^{d/2}}u(y)dyd\xi \tag{21}$$

と表現する（[12]）。このために正準変換

$$(y,k)\mapsto(x,p)=(x(t,y,k),p(t,y,k)) \tag{22}$$

の母関数 $\varphi(t,\xi,y)$, $(\partial_\xi\varphi)(t,p(t,y,k),y)=x(t,y,k)$, $(\partial_y\varphi)(t,p(t,y,k),y)=k$ を p^2+y^2 がおおきい領域において構成する。古典軌道 $(x(t),p(t))=(x(t,y,k),p(t,y,k))$ の性質を調べよう。$(x(t),p(t))$ は積分方程式

$$x(t)=y\mathrm{cos}t+k\mathrm{sin}t-\int_0^t\sin(t-s)\partial_x W(s,x(s))ds, \tag{23}$$

$$p(t) = -y\mathrm{sin}t + k\mathrm{cos}t - \int_0^t \cos(t-s)\partial_x W(s, x(s))ds. \tag{24}$$

を満たす。 W の仮定から $|\dot{x}| + |\dot{p}| \le C(1 + |x| + |p|)$, これを積分すれば

$$e^{-C|t|}(1 + |y| + |k|) \le (1 + |x(t)| + |p(t)|) \le e^{C|t|}(1 + |y| + |k|).$$

これを積分方程式 (23), (24) の右辺に適用し, W の劣二次性を用いれば, $y^2 + k^2 \to \infty$ において, t に関してコンパクト一様に

$$|x(t) - (y\mathrm{cos}t + k\mathrm{sin}t)| = o(|y| + |k|), \tag{25}$$
$$|p(t) - (-y\mathrm{sin}t + k\mathrm{cos}t)| = o(|y| + |k|) \tag{26}$$

であることが分かる。$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $I = [m\pi - \varepsilon, m\pi + \varepsilon]$ とする. 積分方程式 (24) を k で微分し, さらに y, k で微分して Gronwall の不等式を用いて帰納的に議論すれば

(a) 任意の α, β に対して $R^2 = y^2 + k^2 \to \infty$ の時 $\|\partial_y^\alpha \partial_k^\beta(\partial_k p(t) - \mathrm{cos}t)\| \to 0$

であることがわかる. I 上で $|\mathrm{cos}t| \ge \cos\varepsilon$ だからこれを用いて $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の写像 $(y, k) \mapsto (y, p(t, y, k))$ に陰関数の定理を大きな球の外部領域において用いれば ([4]),

(b) $R > 1$ が十分大きい時, 任意の $t \in I$ と $\xi^2 + y^2 \ge R^2$ をみたす $\xi, y \in \mathbb{R}^d$ に対して, $p(t, y, k) = \xi$ を満たす $k \in \mathbb{R}^d$ が一意に存在する

ことがわかる。これは $x(0) = y$, $p(t) = \xi$ を満たす (5) の唯一の解である。そこで, $t \in I$ と $\xi^2 + y^2 > R^2$ に対してこの k を取って

$$\varphi(t, \xi, y) = x(t, y, k) \cdot \xi - \int_0^t L(s, x(s, y, k), \dot{x}(s, y, k))ds, \tag{27}$$

と定義する。 ただし, $L(t, x, v) = v^2/2 - x^2/2 - W$ は $H(t, x, p)$ に対するラグランジアンである. この φ は $\xi^2 + y^2 \ge R^2$, $t \in I$ において正準変換 (22) の母関数である. $t \in I$ の時, この $\varphi(t, \xi, y)$ を用いて $U(t, 0)$ をフーリエ積分作用素として (21) のように表現できる (詳細は [12] を参照)。ただし $\tilde{\varphi}(t, \xi, y)$, $a(t, \xi, y)$ は (ξ, y) について C^∞ 級で, その導関数 $\partial_\xi^\alpha \partial_y^\beta \tilde{\varphi}(t, \xi, y)$, $\partial_\xi^\alpha \partial_y^\beta a(t, \xi, y)$ は (t, ξ, y) について C^1 級, $\tilde{\varphi}$ は $\varphi(t, \xi, y)$ の拡張で

$$\xi^2 + y^2 \ge R^2,\ t \in I \text{ の時},\ \tilde{\varphi}(t, \xi, y) = \varphi(t, \xi, y)$$

を満たす. また $a(t, \xi, y)$ は次を満たす関数である。

$$\lim_{\xi^2 + y^2 \to \infty} \sup_{t \in I} |\partial_\xi^\alpha \partial_y^\beta (a(t, \xi, y) - 1)| = 0 \tag{28}$$

(21) から基本解 $E(t,x,y)$ は次の振動積分として得られる:

$$E(t,x,y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{i^{-(m+1)d} e^{ix\cdot\xi - i\tilde{\varphi}(t,\xi,y) - \varepsilon\xi^2} a(t,\xi,y)}{(2\pi)^d |\mathrm{cos}t|^{d/2}} d\xi. \tag{29}$$

この積分 (29) は C^∞-位相で収束する。以下 $\lim_{\varepsilon\to 0}$ と減衰因子 $e^{-\varepsilon\xi^2}$ を省略する。以上は一般の劣二次型の W に対して成立することである。(29) から定理 8 を証明するには $\varphi(\pi,y,\xi)$ が次の性質をみたすことが本質的である：簡単のため $m=1$ とする.

補題 12. W が符号条件 (19) を満たすとする. 任意の $L>0$ に対して, $R>0$ が存在し, $|\xi| \geq R$, $|y| \leq L$ に対して

$$C_1|\xi|^{1-\delta} \leq |\partial_\xi \varphi(\pi,y,\xi)| \leq C_2|\xi|^{1-\delta}, \tag{30}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \varphi(\pi,y,\xi)| \leq C|\xi|^{-\delta}, \quad |\alpha| \geq 2. \tag{31}$$

が適当な定数 $C_1, C_2, C>0$ に対して成立する。

証明のアイデア. $\partial^2 W(t,x)$ は正定値とする。(25) によって $|x(t)| \leq C(1+|k|)$ である。$|\partial_x W(t,x)| \leq C\langle x\rangle^{1-\delta}$ だから, 積分方程式 (23) によって, k が十分大きいとき

$$|x(\pi,y,k)| \leq |y| + \int_0^\pi |\partial_x W(t,x(t))| dt \leq C|k|^{1-\delta}$$

である。積分方程式 (23) を k で微分して

$$\partial_k x(t) = \mathrm{sin}t - \int_0^t \sin(t-s)(\partial_x^2 W)(s,x(s))\partial_k x(s) ds \tag{32}$$

Gronwall の不等式を用いれば $\|\partial_k x(t)\| \leq C$, $0 \leq t \leq \pi$. (32) を iterate して $t=\pi$ とおくと

$$\begin{aligned}\partial_k x(\pi) = &- \int_0^\pi \sin^2 t(\partial_x^2 W)(t,x(t)) dt \\ &- \int_0^\pi dt \int_0^t ds\, \mathrm{sin}t \sin(t-s)\partial_x^2 W(t,x(t))\partial_x^2 W(s,x(s))\partial_k x(s).\end{aligned} \tag{33}$$

W に対する符号条件によってある $C>0$ が存在して

$$C\langle k\rangle^{-\delta} \leq C\langle x\rangle^{-\delta} \leq (\partial_x^2 W)(t,x(t))$$

これを用いると, (33) の右辺の第一項は

$$\int_0^\pi \sin^2 t(\partial_x^2 W)(t,x(t)) dt \geq C\langle k\rangle^{-\delta} \tag{34}$$

と評価される。第2項は $\|\partial_k x(t)\| \le C$ だから

$$C\int_0^\pi dt\int_0^t ds\,\|\partial_x^2 W(s,x(s))\|\|\partial_x^2 W(t,x(t))\| = \frac{C}{2}\left(\int_0^\pi \|\partial_x^2 W(t,x(t))\|dt\right)^2$$

で評価できる。積分 $\int_0^\pi \|\partial_x^2 W(s,x(s))\|ds$ を評価するのに，十分大きな $|k|$ に対して，積分区間 $[0,\pi]$ を $I_1 = \{t\in[0,\pi]\colon |x(t)| < \varepsilon|k|\}$ と $I_2 = \{t\in[0,\pi]\colon |x(t)| \ge \varepsilon|k|\}$ に分解する。明らかに

$$\int_{I_2}\|\partial_x^2 W(s,x(s))\|ds \le C\langle k\rangle^{-\delta}.$$

一方，I_1 は高々2個の区間から成り，各々の区間上ある定数 C, a に対して $|x(t)| \ge C|k||t-a|$ となる（[12], Lemma 2.1, Lemma 2.2 を参照)。従って，

$$\int_{I_1}\|\partial_x^2 W(s,x(s))\|ds \le C\int_{a-\pi}^{a+\pi}(1+|k||t-a|)^{-\delta}dt \le C|k|^{-\delta}$$

これから，| 第二項 | $\le C\langle k\rangle^{-2\delta}$ である．$\hat{k} = k/|k|$ と書けば

$$x(\pi,y,k) = x(\pi,y,0) + \int_0^{|k|}\partial_k x(\pi,y,s\hat{k})\hat{k}ds.$$

両辺と $\hat{k}$ の内積を取り，(34) と | 第二項 | $\le C\langle k\rangle^{-2\delta}$ を用いれば，十分大きな k に対して

$$\begin{aligned}|x(\pi,y,k)\cdot\hat{k}| &= \left|x(\pi,y,0)\cdot\hat{k} + \int_0^{|k|}x_k(\pi,y,s\hat{k})\hat{k}\cdot\hat{k}ds\right|\\ &\ge C(|k|^{1-\delta}-|k|^{1-2\delta}) - C_2 \ge C|k|^{1-\delta}.\end{aligned}$$

従って，$|x(\pi,y,k)| \ge C|k|^{1-\delta}$ である。R が十分大きければ $\xi = p(\pi,y,k)$ の時，(26) によって $|k|\sim|\xi|$, 従って，

$$C_1\langle\xi\rangle^{1-\delta} \le |(\partial_\xi\varphi)(\pi,\xi,y)| = |x(\pi,y,k)| \le C_2\langle\xi\rangle^{1-\delta}$$

となって (30) が成立することが分かる。微分の評価 (31) の証明は省略する。 □

3 定理の証明

$\tilde{\varphi}$ の高階微分が例えば $|\partial_\xi^\alpha\varphi(\pi,\xi,y)| \le C|\xi|^{-\delta-|\alpha|}$ の様に $|\xi|\to\infty$ においてより高い $|\xi|^{-1}$ のべきで減衰すれば，通常の停留位相法とスケール変換を用いて定理 8 の結果より精密な各点評価

$$|E(m\pi,x,y)| \sim C|x|^{d\delta/(2-2\delta)}$$

を得ることができる。しかし $\tilde{\varphi}$ の高階微分に対するこの様な評価は成立しそうもない。そこで平均をとって定理の

$$I(R) = \frac{1}{R^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\chi\left(\frac{x}{R}\right)E(\pi, x, y)\right|^2 dx. \tag{35}$$

を評価する。π, y を省略し, $\tilde{\varphi} = \varphi$ と書く. (35) に

$$E(x, y) = (-2\pi)^{-d}\int e^{ix\cdot\xi - i\varphi(\xi)}a(\xi)d\xi$$

を代入し x で先に積分すると

$$I(R) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \hat{\chi_2}(R(\eta-\xi))e^{i(\varphi(\eta)-\varphi(\xi))}a(\xi)\overline{a(\eta)}d\xi d\eta,$$

ただし $\chi_2(x) = \chi^2(x)$ で $\hat{f}$ は f のフーリエ変換である。$\eta = \zeta + \xi$ と変数変換し,

$$a(\xi+\zeta) = \sum_{|\alpha|\le N}\frac{1}{\alpha!}\zeta^\alpha a^{(\alpha)}(\xi) + \sum_{|\alpha|=N+1}\frac{1}{\alpha!}\zeta^\alpha b_\alpha(\xi,\zeta)$$

と Taylor 展開する. 剰余項の $I(R)$ への寄与 $B_N(R)$ は次の定数倍の和：

$$\iint \hat{\chi_2}(R\zeta)\zeta^\alpha e^{i(\varphi(\xi+\zeta)-\varphi(\xi))}a(\xi)\overline{b_\alpha(\xi,\zeta)}d\xi d\zeta = \int e^{-i\varphi(\xi)}a(\xi)I(\xi,R)d\xi,$$

$$I(\xi, R) \equiv \int e^{i\varphi(\xi+\zeta)}\hat{\chi_2}(R\zeta)\zeta^\alpha\overline{b_\alpha(\xi,\zeta)}d\zeta.$$

$\ell \in \mathbb{N}$ を $\ell(1-\delta) > d$ と取って固定し, 積分 $I(\xi, R)$ に部分積分を ℓ 回行う。$|\partial_\xi\varphi|$ の下からの評価 $C|\xi|^{1-\delta} \le |\partial_\xi\varphi(\xi)|$ と高階微分の上からの評価 $|\partial_\xi^\alpha\varphi(\xi)| \le C|\xi|^{-\delta}$, $|\alpha| \ge 2$ を用いれば $\hat{\chi}$ が急減少であることから $|I(\xi,R)| \le R^{-N-1-d+\ell}\langle\xi\rangle^{-\ell(1-\delta)}$, 従って

$$|B_N(R)| \le \frac{C}{R^{N+d+1-\ell}}\int |a(\xi)|\langle\xi\rangle^{-\ell(1-\delta)}d\xi \le \frac{C'}{R^{N+d+1-\ell}}$$

と評価でき, 剰余項の寄与は無視できる. 従って $I(R) \sim \sum_{|\alpha|\le N}(\alpha!)^{-1}(2\pi)^{-d}A_\alpha(R)$,

$$A_\alpha(R) = \int\left(\int \hat{\chi_2}(R\zeta)\zeta^\alpha e^{i(\varphi(\xi+\zeta)-\varphi(\xi))}d\zeta\right)a(\xi)\overline{a^{(\alpha)}(\xi)}d\xi$$

である。内側の積分の位相関数を平均値の定理を用いて

$$\varphi(\xi+\zeta) - \varphi(\xi) = \zeta\cdot\partial_\xi\varphi(\xi) + \Psi(\xi,\zeta)$$

と書いて $e^{i\Psi}$ を Taylor 展開して

$$e^{i(\varphi(\xi+\zeta)-\varphi(\xi))} = e^{i\zeta\cdot\partial_\xi\varphi(\xi)}\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{(i\Psi)^j}{j!} + (i\Psi)^{(N+1)}\frac{e^{i\theta\Psi}}{(N+1)!}\right).$$

N を $(N+1)\delta > d$ ととる。$|\Psi(\xi,\zeta)| \le C\langle\xi\rangle^{-\delta}\langle\zeta\rangle^{\delta}|\zeta|^2$ だから展開の剰余項からの A_α への寄与は, 任意の L に対して, 定数 C_{LN} を用いて

$$C_{LN}\iint\langle R\zeta\rangle^{-L}|\zeta|^{2(N+1)+|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-(N+1)\delta}\langle\zeta\rangle^{(N+1)\delta}d\xi d\zeta$$

と評価できる。 $L > (N+1)(2+\delta)+|\alpha|+d+1$ ととれば, これは $\le CR^{-(d+|\alpha|+2N+2)}$ となって無視できる. 残った展開の各項は次の定数倍：

$$\int\left(\int e^{i\zeta\cdot\partial_\xi\varphi(\xi)}\hat{\chi_2}(R\zeta)\zeta^\alpha(i\Psi(\xi,\zeta))^m d\zeta\right)a(\xi)\overline{a^{(\alpha)}(\xi)}d\zeta d\xi.$$

第 1 段の議論を繰り返して $\Psi(\xi,\zeta)$ を ζ に関してさらに（$\Psi = \varphi(\xi+\zeta)-\varphi(\xi)-\zeta\partial\varphi(\xi)$ を思い出せ）適当な次数まで Taylor 展開し, 積 $\Psi(\xi,\zeta)^m$ を展開する. 剰余項を含む項は部分積分を用いて無視可能であることが分かる。残ったのは, $|\beta_1|,\dots,|\beta_m| \ge 2$ として

$$\zeta^\beta\varphi^{(\beta_1)}(\xi)\dots\varphi^{(\beta_m)}(\xi),\quad \beta = \beta_1+\cdots+\beta_m$$

の定数倍でこれらの A_α への寄与は

$$\int e^{i\zeta\partial_\xi\varphi(\xi)}\hat{\chi_2}(R\zeta)\zeta^{(\alpha+\beta)}\varphi^{(\beta_1)}(\xi)\dots\varphi^{(\beta_m)}(\xi)a(\xi)\overline{a^{(\alpha)}(\xi)}d\xi d\zeta$$

これは $R^{-|\alpha|+|\beta|}R^{-d}$ 倍の

$$\begin{aligned}&\left|\int(\partial_\zeta^{\alpha+\beta}\chi_2)(\partial_\xi\varphi(\xi)/R)\varphi^{(\beta_1)}(\xi)\dots\varphi^{(\beta_m)}(\xi)a(\xi)\overline{a^{(\alpha)}(\xi)}d\xi\right|\\&\qquad\le\int|(\partial_\zeta^{\alpha+\beta}\chi_2)(\partial_\xi\varphi(\xi)/R)|d\xi\le CR^{d\delta/(1-\delta)}R^d\end{aligned}$$

で評価される。従って主要項は $\alpha = 0$ で, $m = 0$ の項

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{1}{R^d}\int\chi(\partial_\xi\varphi(\xi)/R)^2|a(\xi)|^2d\xi \tag{36}$$

で与えられる。$|\xi|\to\infty$ の時, (30) によって $|\partial_\xi\varphi(\xi)| \sim |\xi|^{1-\delta}$ で, (28) によって $a(\xi)\to 1$ だから, (36) $\sim CR^{d\delta/(1-\delta)}$ である. □

参考文献

[1] S. Doi, *Dispersion of singularities of solutions for Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **250** (2004), 473–505.

[2] S. Doi, *Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potentials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 175–221.

[3] D. Fujiwara, *Remarks on the convergence of the Feynman path integrals*, Duke Math. J. **47** (1980), 41–96.

[4] L. Kapitanski, I. Rodnianski and K. Yajima, *On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator*, Topol. Meth. Nonl. Anal. **9** (1997), 77-106.

[5] A. Jensen and K. Yajima, *Spatial growth of fundamental solutions for certain perturbations of the harmonic oscillator*, Rev. Math. Phys. **22** (2010), 193–207.

[6] A. Martinez, S. Nakamura and V. Sordoni *Analytic smoothing effect for the Schrödinger equation with long-range perturbation.* Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), no. 9, 1330–1351.

[7] A. Martinez and K. Yajima, *On the fundamental solution of semiclassical Schrödinger equations at resonant times*, Commun. Math. Phys. **216** (2001), 357–373.

[8] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrodinger operators: a survey* in Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, Ann. of Math. Stud.,**163** (2007), 255–285, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[9] K. Yajima, *Schrödinger evolution equations with magnetic fields*, J. d'Analyse Math. **56** (1991), 29–76.

[10] K. Yajima, *Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **181** (1996), 605–629.

[11] K. Yajima, *On fundamental solution of time dependent Schrödinger equations*, Contemp. Math. **217** (1998), 49–68.

[12] K. Yajima, *On the behavior at infinity of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equation*, Reviews in Math. Phys. **13** (2001), 891–920.

[13] S. Zelditch, *Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger equa-*

tion, Commun. Math. Phys. **90** (1983), 1-26.

[14] G.P. Zhang and K. Yajima, *Smoothing property for Schrödinger equations with potential superquadratic at infinity*, Commun. Math. Phys. **221** (2001), 573-590.