

## 量子乱流の普遍的な性質

### ～量子乱流と古典乱流の対応～

大阪市立大学理学研究科 藤山 将士 (Shoji Fujiyama)

Department of Physics,  
Osaka City University

## 導入

液体 $^4\text{He}$ を $2.17\text{K}$ 以下まで冷却すると二次の相転移を起こし超流動状態へと転移する。超流動は古典流体とは決定的に異なる性質を示す。まず第一に粘性が無いことである。そして循環が量子化されていることである。そのため超流動中では渦度は量子渦と呼ばれ、極めて安定に存在する。循環量子 $\kappa$ は $h/m$  ( $h$ はプランク定数、 $m$ は $^4\text{He}$ 原子質量) で表され、量子数 $l$ の渦がエネルギー的に最も安定に存在する。超流動 $^4\text{He}$ において渦芯は $1\text{\AA}$ と他のどのようなサイズよりも小さいため、「渦糸」として扱うことが出来る。

古典乱流は大小さまざまな渦から構成されていることが知られている。古典乱流同様、超流動中でも乱流が発生することが知られている。特に流体力学的な相違(完全流体、渦の量子化)があるため、古典乱流と対比して超流動中での乱流は「量子乱流」と呼ばれている。

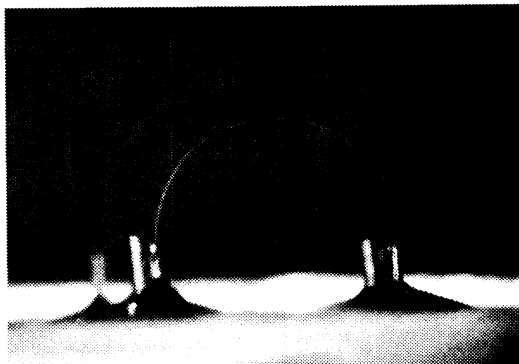


図 1、振動細線 (写真は大阪市立大学超低温研究室提供)

古典乱流を生成する手法は様々あるが、量子乱流の生成は極低温での実験に限られるため高度な技術が必要となる。一般的に用いられる手法は、超流動中で何らかの物体を高速に振動させることである。ワイヤー (図 1)、グリッド、球、フォーク状のクォーツを電磁気的な外場で振動させることが実験的に行われている[1-8]。実験的には物体に外力を加えた際の振動速度の応答を測定することで量子乱流を観測している (図 2)。これらの物

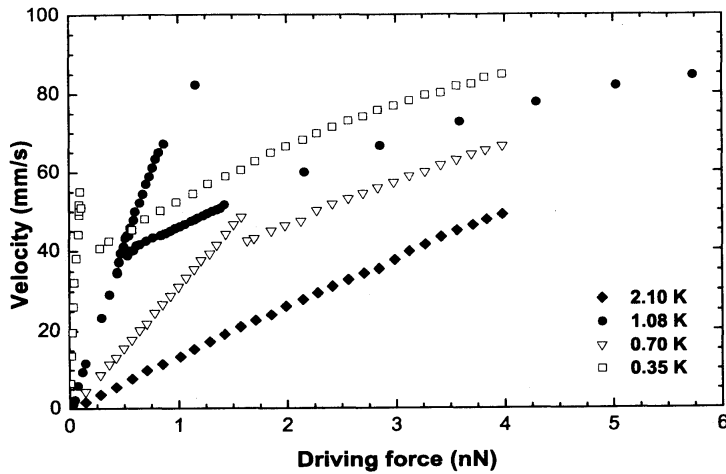


図2、Schoepe等による振動球の実験

L. Skrbek and W. F. Vinen, Progress in Low Temperature Physics Vol. 16

体を振動させた場合、その振動速度が低速であれば、外力と振動速度は比例する。しかし外力を強くし、振動速度がある臨界速度を超えると急激に振動速度が減少する、つまり跳びを示す。この急激な速度の減少は物体の運動エネルギーが散逸されていることを表し、量子乱流生成のエネルギーに費やされたと考えることが出来る。物体にそれ以上の外力を加えても、もはや線形ではなく外力の2乗に比例して振動速度が増加する。

次に乱流の発生過程について考えてみる。古典乱流では粘性の影響によって渦度が発生し、渦度が複雑な様相を示すことにより乱流が形成される。一方超流動中ではそもそも粘性が存在しないので渦度は発生し得ない。そこで現在有力とせられる説は、超流動への相転移が起きた際に位相欠陥として渦が生成され、渦が物体の壁面等に付着し残留しているという説である。物体の振動により生じる相対的な流速が渦を成長させ、渦が複雑に絡み合った乱流が実現するというものである。

この説を決定的に支持する実験が大阪市立大学の超低温実験グループによってなされた [7]。概して説明すると、彼らは振動細線をセルで覆い、セルに開けられた微細な孔から超流動を充填し、渦を「濾しとる」手法で残留渦の無い状態を実現した。実際に渦を濾しとった状態

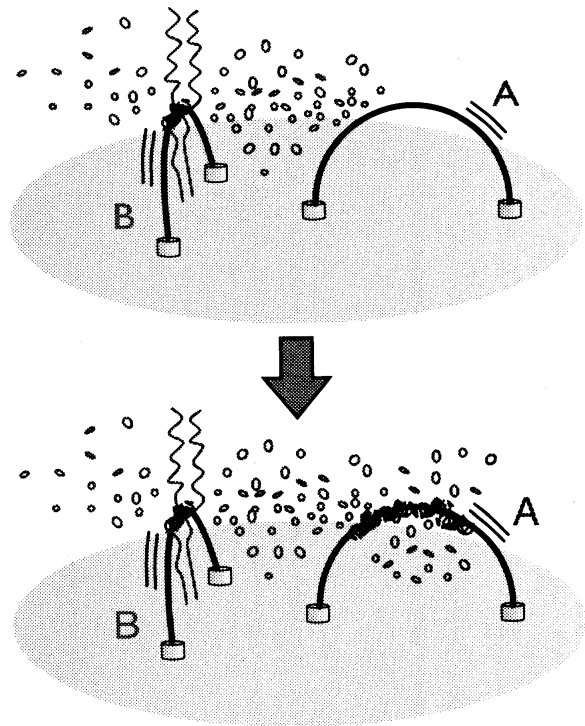


図3、模式図。細線Aを振動させたまま細線Bを振動させると、細線A、B両方とも乱流状態へ遷移する。

で細線を1m/sの速度で振動させても振動速度の跳びは観測されず、乱流状態に遷移しない事が確認されている。更に彼らはセルの中に細線を2本設置し、一方には残留渦が付着し（細線B）、もう一方には残留渦が付着していない状態（細線A）を共存させる事に成功した [7]。この事実は、それぞれの細線を個別に振動させたとき、一方の細線には振動速度の跳びが観測されず、もう一方では観測される事で確認される。この特殊な状況を利用して彼らは非常に興味深い実験を行った（図3）。まず始めに細線Aのみを振動させる。もちろんこれだけでは乱流は生成されていない。次に細線Aの振動を保ったまま細線Bを振動させる。すると細線Bには残留渦が付着しているため細線Bでは乱流状態へ遷移し振動速度に跳びが見られる。それと同時に図3のように離して設置されている細線Aも乱流状態に遷移する事が確認されたのである。この実験結果に対して以下のような解釈が考えられた。残留渦の付着した細線が振動することによって乱流状態に遷移し、渦輪が放出される。放出された渦輪の一部は細線Aへ伝播し、乱流を引き起こす「種」として振る舞う。細線Aは振動しているため、振動により誘起される速度場により渦輪は引き延ばされ、最終的に複雑に絡まったもつれた状態（タングル）になる。即ち乱流状態に遷移する。この解釈を検証すべく我々は数値計算を行った。

## モデル、及び計算方法

乱流遷移に対して量子渦の運動が本質的であることから、超流動中の量子渦のダイナミクスを計算する。実験は30mKという、二流体モデルにおける常流動成分が無視できる極低温で行われているため、数値計算は絶対零度と近似して行う。つまり量子渦と常流動成分の相互作用である相互摩擦力を無視する。実験では境界として

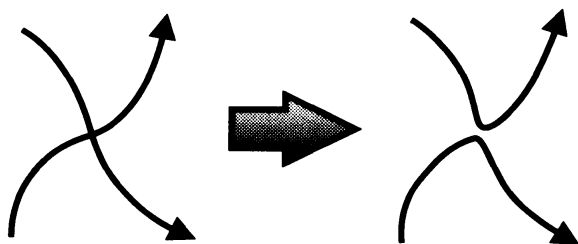


図4、量子渦同士の再結合

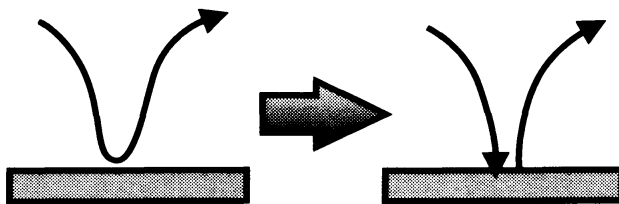


図5、量子渦と壁面の再結合

で振動細線が存在するが、数値計算では計算の簡単のため振動する球を採用する。振動している球に対して渦輪を衝突させ、それらが球の振動によって乱流状態へと遷移するか検証する。

ここで量子渦の運動について考える [9]。Helmholtzの定理から、完全流体中の渦糸は流体の速度場に乗って運動することが演繹される。従って量子渦の運動を追うには量子渦上の各点の超流動速度場を計算し、それを時間で積分すればよい。超流動

速度場  $\mathbf{v}_s$  は量子渦が作る速度場  $\mathbf{v}_{\text{vor}}$  と球状境界が存在することで生じる速度場  $\mathbf{v}_b$  から成る。量子渦が位置  $\mathbf{r}$  に作る速度場はBiot-Savart積分で計算される。

$$\mathbf{v}_{\text{vor}} = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}|^3} \dots (1)$$

ここで  $\mathbf{s}_1$  は量子渦上の点の位置ベクトル、積分範囲は全ての量子渦にわたる。振動球の影響は、境界条件を課す事によって考慮される。今球は振動しているので、運動する球に乗った座標系で境界条件を課さなければならない。従って球上境界に対する完全流体の境界条件は

$$(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{n} = 0 \dots (2)$$

で表される。ここで  $\mathbf{v}_p$  は球の速度、 $\mathbf{n}$  は球面上の外向き法線ベクトルを意味する。この条件を満たすように  $\mathbf{v}_b$  を求めればよいが、球上境界の場合、球内部に鏡像渦糸を置く事により満たされる[10]。以上のようにして量子渦の速度が計算される。量子渦のダイナミクスを計算していると二本の渦糸が交差したり、量子渦が球に衝突する事がある。量子渦同士が衝突した際の渦の振る舞いについては、渦が再結合を起こす事がGross-Pitaevski方程式を使った数値計算から確認されている[11]。従って今回の数値計算プログラムには2本の渦が空間分解能よりも接近した際に再結合が起こるアルゴリズムを加える(図4)。また量子渦と壁面との衝突に対しても再結合を起こすアルゴリズムも加える(図5)[12]。球のサイズを  $3 \mu\text{m}$ 、球の振動数を  $1590 \text{ Hz}$ 、注入される渦輪の半径を  $1 \mu\text{m}$ 、渦輪注入周期を  $0.05 \text{ ms}$  に設定し、実験と同じ数値を用いる。

## 計算結果

図6は球が  $90 \text{ mm/s}$  (乱流遷移の臨界速度以上) で振動している場合の量子渦のダイナミクスである。球は水平方向に振動していて、渦輪は下方から注入される。なお渦輪が球に衝突するように、渦輪の注入箇所を球と同様に振動させている。注入された渦輪は球と衝突し、球の表面に引っ付く。一方球は振動しているため球表面の渦は引

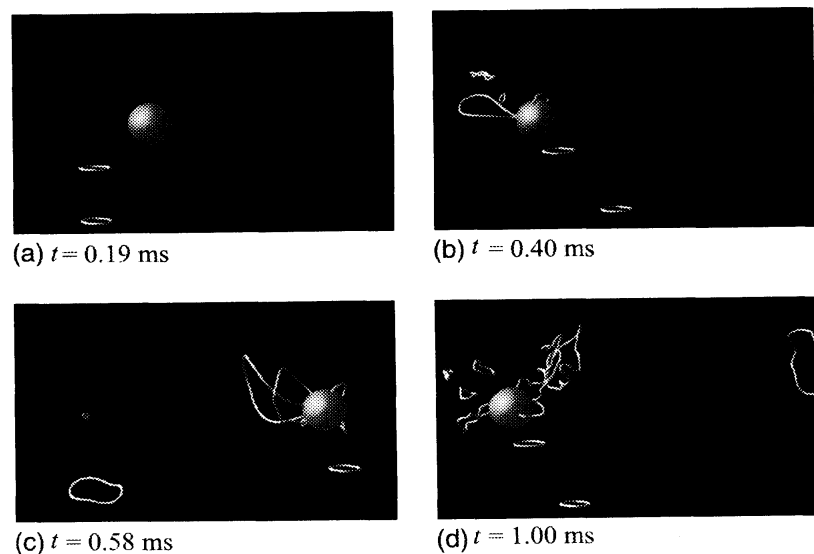


図6、量子渦のダイナミクス

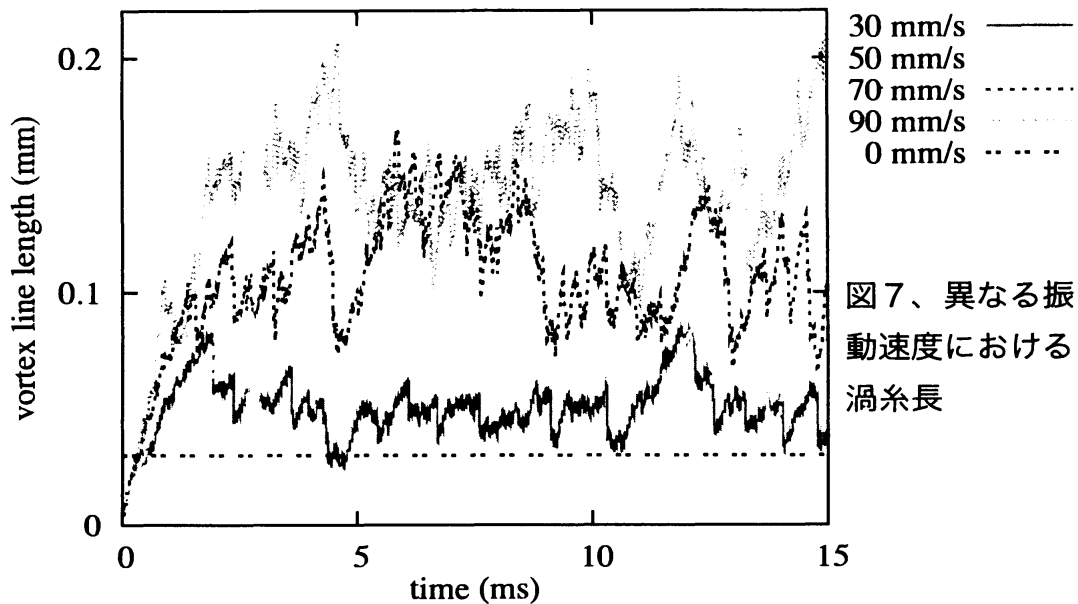


図7、異なる振動速度における渦糸長

き延ばされて成長する [図6 (b)]。渦は引き延ばされつつも、球の振動で誘起される速度場により渦の端点がよどみ点へと追いやられ渦同士が再結合を起こして球から外れる。渦輪は注入され続けているので同様の過程が繰り返され乱流状態へと遷移する。渦糸長の時間変化を図7に示す。渦糸長は、球を含む一辺40  $\mu\text{m}$ の立方体セル内で計測されている。5 ms までは球の振動によって渦糸が引き延ばされ渦糸長は増加するが、それ以降セルから脱出する渦の渦糸長と成長する渦糸長が釣り合って平衡状態に達する。図7のまっすぐな点線は注入によって生じるセル内の渦糸長を表している。振動速度が30 mm/s の場合渦の成長がほとんど見られない一方、90 mm/s の振動速度では注入された渦糸長と比べ十分成長しているのが見て取れる。このように、実験結果から推測されていた乱流遷移への描像が確かに数値計算で確認された。

## 球に働く抗力、古典乱流と量子乱流との対応

ところで実験で観測されている物理量は振動速度と振動物体に働く抗力である。数値計算を定量的に実験結果と比較するためには振動球に働く抗力を求める必要がある。最後に数値計算から振動物体に働く抗力を求める方法及びその結果を紹介する。そして数値計算から得られた抗力が古典乱流中での抗力と対応づけられる事が発見されたので報告する。

古典乱流中で物体にどのような抗力が働いているか考える。簡単な例として一様流中に柱がおかれている場合を考える。一様流の流速が小さい（レイノルズ数が小さ

い) 場合流れは層流を保っている。このときNavier-Stokes方程式の非線形項を無視する近似を行うことで柱に働く抗力が求められ、

$$F = 6\pi\mu aU \dots (3)$$

のように表される (ストークスの式)。ここで $\mu$ は粘性率、 $a$ は円柱の半径、 $U$ は流速を表す。一方流速が大きい (レイノルズ数が大きい) 場合、円柱の背後に渦が生成され始めもはや層流ではなくなる。このとき次元解析から円柱に働く抗力は

$$F = \frac{1}{2}C_D\rho AU^2 \dots (4)$$

で表され、流速の二乗に比例する事が知られており、実験的にも確認されている。ここで $C_D$ は抗力係数、 $\rho$ は流体の密度、 $A$ は物体の断面積である。式(3)、

(4)は古典乱流のみならず量子乱流でも成り立つ事が実験データの解析から確認された。図2の振動速度と抗力の関係

係を式(4)を用いて振動速度と抗力係数のグラフにプロットし直すと図8が得られる。振動速度が小さい領域で抵抗係数は速度の逆数に比例する。式(4)から、抗力が振動速度に比例する事を示している。一方振動速度が大きい領域では抵抗係数がある一定値に収束する傾向にあり、抗力が振動速度の二乗に比例している事が分かる。この事から古典乱流と量子乱流の間には、流体力学的な違いがあるにも拘らず普遍的な法則で結びつけられている事が分かる。

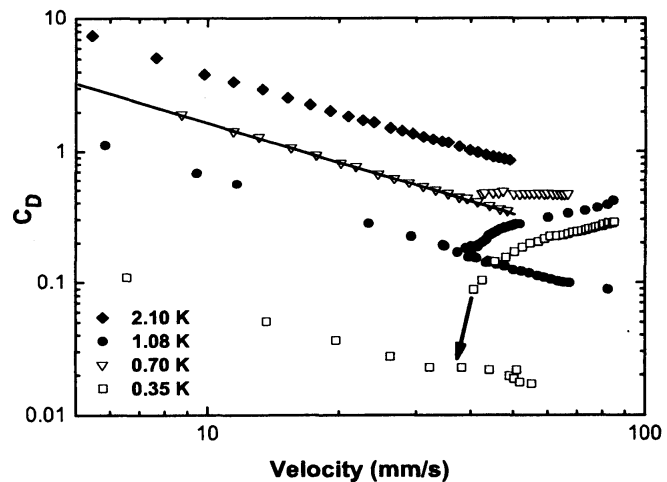


図8、量子乱流における抗力と流速の関係  
L. Skrbek and W. F. Vinen, Progress in Low Temperature Physics Vol. 16

さて、ここで数値計算で振動球に働く抗力を求める方法に戻る事にする。物体に働く抗力を求めるには物体上の各点の圧力を計算し、全表面にわたって積分すれば良い。しかし現在採用している計算方法で圧力を積分するには膨大な計算時間を要するため、代替の方法を用いる事にする。そのために、まずなぜ抗力が発生するかを考える必要がある。振動物体が乱流を形成するという事は物体が乱流生成のためにエネルギーを与えていると考えられる。量子乱流の場合は量子渦が本質的であるから、量子渦成長にエネルギーが費やされているであろう。そのとき振動物体は流体に仕事をする事になるが、その反作用として物体が抗力を受ける事になる。そこ

で振動球が流体に与えたエネルギーを考慮することで抗力を求める。流体の運動エネルギー増加は

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho_s v_s^2 dV \quad \dots (5)$$

で与えられる。積分範囲は全流体、つまり球を除く全領域にわたる。しかし球は振動しているため積分範囲が時々刻々変化する事になり計算は単純ではない。そこで積分範囲を球を含めた全領域に拡張して時間的に固定し、流体の密度を球の内部で0となるよう定義する。即ち

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_s \theta[|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)| - a] \quad \dots (6)$$

とする。ここで $\theta$ は階段関数、 $\mathbf{x}(t)$ は球中心の位置ベクトル、 $a$ は球の半径とする。式(6)を式(5)に代入して式変形の途中でEuler方程式、及び境界条件を代入する事で

$$\frac{dK}{dt} = -\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{F}_{\text{drag}} \quad \dots (7)$$

が得られる [13]。この式は流体の運動エネルギー変化が球の速度と抗力の内積で表される事を意味している。また、質点系の古典力学で粒子が受ける仕事率は受ける力と速度の内積で表される事に対応している。図7から分かるように振動球によって生成された乱流は平衡状態を保っている。そして振動速度と球にかかる抗力は平均的には逆の方向を向いているので、式(7)を振動周期と比べ十分に長い時間で平均を取るとそれぞれの項は0でない有限な値を持ち、

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = \langle -\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{F}_{\text{drag}} \rangle \cong u_p^0 \cdot F_{\text{drag}}^0 \quad \dots (8)$$

となる。ここで $u_p^0$ 及び $F_{\text{drag}}^0$ は振動速度及び抗力の振幅を表す。式(8)の左辺は単位時間当たりの運動エネルギー増加を表し、単位時間当たりどれだけ渦の成長にエネルギーが費やされたかを表す。渦の単位長さ当たりのエネルギーは

$$\epsilon = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \left( \frac{L}{a_0} \right) \quad \dots (9)$$

で見積もられる。ここで $L$ は典型的な系のサイズ、 $a_0$ は渦糸のコアサイズを表す。従って式(8)の左辺は渦糸長の増加と式(9)を用いて求められる。振動速度は分かっているので式(8)から抗力を求める事が出来る。こうして数値計算の結果から求められた抗力を図9に示す。両対数でプロットされており、点線は振動速度の二乗を表す。数値計算結果は速度の二乗で表現される事が分かる。そして図10は式(4)から得られる抵抗係数をプロットしたものであり、1のオーダーである事が分かる。従って量子乱流でも古典乱流で観測されるような抗力の速度依存性が数値計算によって確認された。

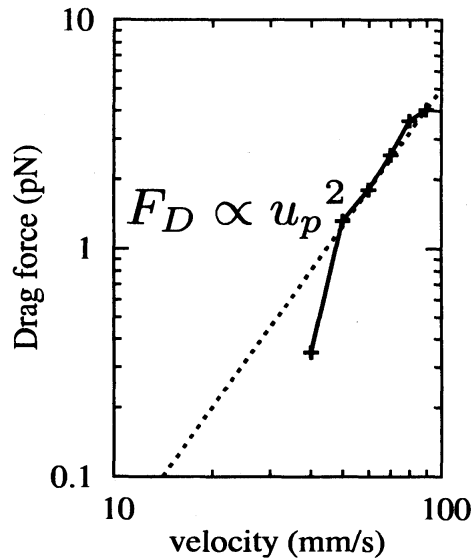


図9、抗力

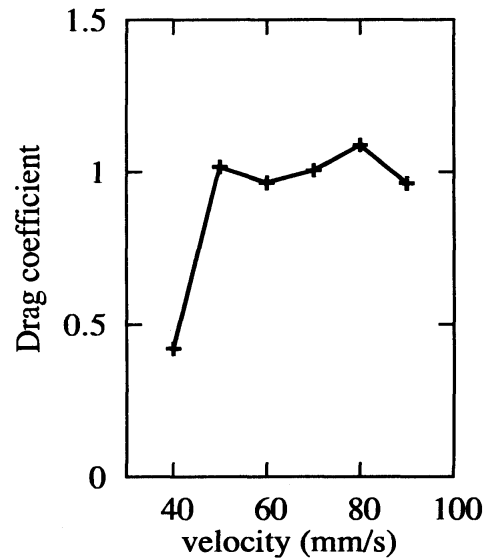


図10、抵抗係数

## まとめ

振動細線の実験で得られた乱流発生のメカニズムを数値計算を用いて解明した。実験と定量的に比較するため、振動球に働く抗力を数値計算で求める方法を定式化し、数値的に抗力、抵抗係数を求めた。その結果抗力が振動速度の二乗に比例し、抵抗係数が1のオーダーである事を発見した。即ち、古典乱流中で物体に働く抗力と同様の振る舞いが量子乱流で確認され、古典乱流、量子乱流の間に普遍的な法則がある事が数値的に示された[13]。

- [1] N. Hashimoto, R. Goto, H. Yano, K. Obara, O. Ishikawa, and T. Hata, Phys. Rev. B 76, 020504(R) (2007)
- [2] J. Jäger, B. Schuderer, and W. Schoepe, Phys. Rev. Lett. 74, 566 (1995)
- [3] S. N. Fisher, A. J. Hale, A. M. Guénault, and G. R. Pickett, Phys. Rev. Lett. 86, 244 (2001)
- [4] H. A. Nichol, L. Skrbek, P. C. Hendry, and P. V. E. McClintock, Phys. Rev. Lett. 92, 244501 (2004)
- [5] D. I. Bradley, D. O. Clubb, S. N. Fisher, A. M. Guénault, R. P. Haley, C. J. Matthews, G. R. Pickett, V. Tsepelin, and K. Zaki, Phys. Rev. Lett. 95, 035302 (2005)



- [6] H. Yano, N. Hashimoto, A. Handa, M. Nakagawa, K. Obara, O. Ishikawa, and T. Hata, Phys. Rev. B 75, 012502 (2007)
- [7] R. Goto, S. Fujiyama, H. Yano, Y. Nago, N. Hashimoto, K. Obara, O. Ishikawa, M. Tsubota, and T. Hata, Phys. Rev. Lett. 100, 045301 (2008).
- [8] M. Blažková, M. Človečko, V. B. Eltsov, E. Gažo, R. de Graaf, J. J. Hosio, M. Krusius, D. Schmoranzler, W. Schoepe, L. Skrbek, P. Skyba, R. E. Solntsev, and W. F. Vinen, J. Low Temp. Phys. 150, 525 (2008).
- [9] 坪田誠・西森拓、非線形科学シリーズ1 量子渦のダイナミクス／砂丘と風紋の動力学（中村勝弘編、培風館、東京、2008）
- [10] P. G. Saffman, Vortex Dynamics (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)
- [11] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. 71, 1375 (1993)
- [12] M. Tsubota, T. Araki, and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. B 62, 11751 (2000)
- [13] S. Fujiyama and M. Tsubota, Phys. Rev. B 79, 094513 (2009)