

渦波の非線形相互作用によって誘導される平均流

九州大学 大学院数理学研究院 福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

日本原子力機構

廣田 真 (Makoto Hirota)
Japan Atomic Energy Agency

1 はじめに

1858 年, Helmholtz [9] は“渦度 (vorticity)”という概念を導入し, 渦度が流体に凍結して運ばれることを証明した. ここに渦運動という分野が誕生した. 翌 1859 年*, Helmholtz [10] はオルガンパイプから出る音波に関する記念碑的な論文を発表した. “ヘルムホルツ方程式”によってオルガンパイプから放射される音波の解析を行い, 周波数や強度, 節の位置などを決めることに成功した. 波動方程式の解に Green 関数を初めて本格利用したこの論文は, 数理的な音響学の始まりであると同時に, Kirchhoff の光の回折公式などに多大な影響を与えるなど, その後大きく発展する Green 関数による偏微分方程式の数学解析の規範となっている. 時を隔てて, 20 世紀の中頃, 「渦」と「音波」が結びつく. Lighthill [20] によるジェットノイズの解析を契機として, 20 世紀中頃から後半にかけて, 音源 = 渦と音波の双方を包括的に扱う数学的方法が発達した [15].

局在した渦の非定常運動によって生成される音波の理論的扱いは比較的整備されてきたが, 生成された音波からの跳ね返りが渦にどのように作用するのかを計算する系統的な手立てはまだない. ここがエアリード楽器の発音機構の鍵を握るようである [18].

これとは別に, 非圧縮性の制限下でも, 渦は 3 次元振動運動を行う. 円柱渦に立つ波を Kelvin 波という [27, 5]. 渦核内が剛体回転運動を行っている場合, それと同じ角速度でまわる回転座標系から見た振動を慣性波という [16]. これらは線形波であるが, Kelvin 波, あるいは, 慣性波の非線形相互作用によって生成される付加的な平均流 [7] については知られていないように思われる. 図 1 に示したような問題が念頭にある.

純粋ずり流によって断面が楕円形に変形した渦管の 3 次元攪乱に対する不安定性は, Moore-Saffmann-Tsai-Widnall 不安定性 (MSTW 不安定性) としてよく知られている [24, 27, 3, 5]. これは, 楕円ひずみを介して, 方位波数が 2 だけ異なる Kelvin 波間のパラメータ共鳴である. 基本流が一様渦度をもつ場合は, スペクトルはすべて離散的で, 有限自由度の Hamilton 力学系に対する Krein の理論によって説明できる [1, 2]. 軸方向に一様な円柱渦は, その対称性のおかげで中立安定である. 純粋ずり流を摂動として受けたとき,

*この年号は Lamb の教科書 [19] の p. 498 の脚注に依拠する. 論文が出版されたのは 1860 年である.

Generation of waves and their interaction

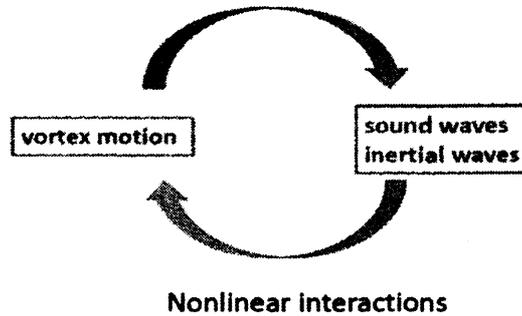


図 1: 渦による波の生成とそれの渦への跳ね返り

固有値の縮退によってのみ不安定化が可能になる。不安定化するための必要条件は、縮退する2つのモードのエネルギーの符号が異なるか、あるいは、両方ともエネルギーが0であることである。攪乱振幅について2次までエネルギーを計算すればよいわけであるが、基本流が存在する場合には、これが一筋縄ではいかない。純粹ずりを受けていない円柱渦を考えよう。基本流を \mathbf{U} 、攪乱を $\tilde{\mathbf{u}}$ とおいて、 $\tilde{\mathbf{u}}$ を微小振幅 α について展開する。攪乱を受けた速度場全体を \mathbf{u} とおくと、

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{u}}; \quad \tilde{\mathbf{u}} = \alpha \tilde{\mathbf{u}}_{01} + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{\mathbf{u}}_{02} + \dots \quad (1)$$

である。下付き添字の左側の0は、ひずみを受けていないことを意味し、右側の添字は α についての次数をあらわす。攪乱の初項 $\alpha \tilde{\mathbf{u}}_{01}$ が Kelvin 波である。流体は非圧縮性、密度は一様と仮定し、密度を1とおこう。Kelvin 波のエネルギー ΔH は、Kelvin 波が立った後と立つ前の運動エネルギーの差として定義される：

$$\Delta H = \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^2 dV - \frac{1}{2} \int \mathbf{U}^2 dV = \alpha H_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 H_2 + \dots; \quad (2)$$

$$H_1 = \int \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{01} dV, \quad H_2 = \int (\tilde{\mathbf{u}}_{01}^2 + \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{02}) dV. \quad (3)$$

基本流が存在する場合 ($\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$)、 α について2次までエネルギーを計算するためには、攪乱も、Kelvin 波を超えて、 $\tilde{\mathbf{u}}_{02}$ を、すなわち、 α について2次まで計算しなければならない。しかし、非線形項 $\tilde{\mathbf{u}}_{02}$ の計算は特異摂動の定義から始めなければならない、非自明である。

文献 [5] では、電磁波のエネルギーが誘電率・透磁率の周波数による微分と関係づけられることとの類推をとって、試行錯誤によって、分散関係の微分から Kelvin 波のエネルギーを計算する工夫を行った。ただし、数学的な正当づけは得られぬままであった。攪乱を等循環面 (isovortical sheet) に制限すると、定常 Euler 流は、運動エネルギーの極値

状態として特徴づけられる [1, 2, 14]. この極値性を最大限に活かすことによって, 振幅 1 次、すなわち、線形攪乱のみから, 振幅 2 次のエネルギー H_2 を計算することが可能になる. そして、平行流 [12, 13] と回転流に [7] に対して, 分散関係の周波数による微分と H_2 の間の関係を構成的に証明した. 極値性から $H_1 = 0$ が平均をとらなくても厳密に成り立つ.

円柱渦が攪乱を受けて不安定化するということは, 負あるいはゼロのエネルギーモード ($H_2 \leq 0$) が存在するということである. 基本流 U を円筒対称性をもつ回転流としよう. ここで, 再び (3) の H_2 の形に目を遣ると, $H_2 \leq 0$ となることは, とりもなおさず, $\bar{\mathbf{u}}_{02}$ の回転成分が定常かつ直流項 (軸対称かつ軸方向に一様) をもち, 時間平均をとった $\overline{\mathbf{u}}_{02}$ の回転成分に直流項が残るということである. しかも, 積分すると, 基本流の回転を全体的に減速するように働かなければならない: $\int U \cdot \overline{\mathbf{u}}_{02} dV < 0$. 以下, この直流成分をとくに '平均流' と呼ぼう. isovortical という拘束条件付きの攪乱を表現するには, 通常 Euler 的表記法では不可能で, Lagrange 的記述に頼らざるを得ない. Lagrange 変数によって構成された振幅 2 次の速度の直流項をすべて凝視すると, 回転成分はもちろん, 副産物として, 軸流成分も存在することが読み取れる [7]. この軸流成分の出現は, 3 次元攪乱に固有の現象で, 平面攪乱に対しては消えてしまう. 本稿では, レクチャーノート [11] をもとに, Kelvin 波が自身の非線形相互作用によって誘導する平均流の計算法について解説する (文献 [12, 13] も参照されたい.).

Malkus [21] は断面が楕円形にひずんだ筒状容器内の回転流の室内実験を行い, MSTW 不安定モードがいくつか立った後, 無数のモードが励起されてそれらが一挙に発達して回転流が崩壊することを発見した (文献 [4, 16] も参照). これが引き金となって, 弱非線形理論の展開がはじまるが, 従来の Euler 的アプローチでは Kelvin 波の非線形相互作用によって誘起される平均流を決め切ることができない [29, 26]; 方位波数の差が 2 の Kelvin 波が縮退する特定の軸方向波数においてのみ, 振幅について 2 次かつひずみ流効果について 1 次の高次での攪乱方程式に対する可解条件から, かりうじて, 平均流の振幅の時間微分が計算できるのみである. しかも, エネルギー保存則を外部から借りなければならない. より高次の可解条件に頼る導出法は間接的であるし, 得られる情報 (限られた波数と周波数でのみ, 振幅関数の時間微分のみ) も限定される.

最近, われわれは, Lagrange 変数を用いて計算した平均流 [7] を用いて, 楕円容器内の回転流に対する 3 次元攪乱の弱非線形振幅方程式を導出するプログラムを完成した [23]. このプログラムでは, 弱非線形振幅方程式が, 直に, ハミルトンの標準形 (Hamiltonian normal form) [17] の形でもたらされ, 最初からぜい肉がそぎ落とされている. このことによって, 従来の結果 [29, 26] が不完全であることが浮き彫りになる; Euler 的記述のみによる導出法によって導かれた平均流の振幅関数の時間微分を積分すると, 積分定数が生じる. これを, Euler 的記述の枠内で決定する手立てはない. しかし, この積分定数は線形項を変えてしまうもので, 自由にとると, MSTW 不安定性が安定化するなど物理的にあり得ない結論に導かれる. 一方, 文献 [7] では攪乱を isovortical なものに限定しているが, これは外部から余分な渦度を持ち込まないで基本流の渦線群の 3 次元変形だけを起こ

す攪乱で、物理的には受け入れられる問題設定であろう。ほかにも、弱非線形振幅方程式導出の試みはあるが、平均流はないものと理由づけしたり [22]、恐らく平均流が生じない攪乱のみを扱ったり [25] して、これまでの Euler 的取り扱いが波が誘起する平均流に向き合うのを避けている節がある。

§2 で Lagrange 変位の発展方程式を振幅について 2 次まで書き下し、§3 において、定常 Euler 流に加えられた波のエネルギーと波の非線形相互作用によって誘導される平均流に対する一般公式を書き下す [11]。§4 で Kelvin 波を思い出し、§5 で Kelvin 波が振幅について 2 次で誘導する平均流を計算する。楕円形の断面をもつ筒状容器内の回転流に対する攪乱の弱非線形振幅方程式の導出までの全体的なプログラムの概要は文献 [8] に記してある。

2 Lagrange 変位の発展方程式

Arnol'd [1, 2] による先駆的な研究以来、波-平均流相互作用を含むような弱非線形波動理論において、Euler 的記述よりも流体運動のトポロジーを忠実に反映できる Lagrange 的記述の方が優位であることが実証されてきた [14]。われわれの方法 [12, 13, 7] もこの路線上にあるが、Lagrange 変位を攪乱振幅について 2 次まで扱う点が新しい。従来の理論はすべて 2 次変位の存在を見落としている。

領域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内の非圧縮非粘性流体の運動は、体積保存微分同相写像群 $SDiff(D)$ の軌道とみなせる。その Lie 環 \mathfrak{g} は流体の速度場である。自然な対 $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathbb{R}$ に関して、 \mathfrak{g} の双対空間を \mathfrak{g}^* とかこう。すなわち、元 $u \in \mathfrak{g}$ と $v \in \mathfrak{g}^*$ に対して、 $\langle u, v \rangle$ とかく。流体運動に対しては、 \mathfrak{g}^* の元はベクトル場で、対 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は単にベクトル場同士の内積 (空間積分も込めて) である。Lie 括弧 $[\cdot, \cdot]$ は \mathfrak{g} の随伴表現 ad でもあり、ベクトル場に対しては次のように作用する：

$$ad(u_1)u_2 = [u_1, u_2] = (u_2 \cdot \nabla)u_1 - (u_1 \cdot \nabla)u_2 \quad \text{for } u_1, u_2 \in \mathfrak{g}. \quad (4)$$

ここで、ボールド体 $u_i = u_i \in \mathfrak{g}$ はベクトル場であることを強調するために用いた。

双対空間 \mathfrak{g}^* 上の関数の対 F_1 と F_2 に対して、Lie-Poisson 括弧

$$\{F_1, F_2\} = \left\langle \left[\frac{\delta F_1}{\delta v}, \frac{\delta F_2}{\delta v} \right], v \right\rangle \quad (5)$$

を導入しよう。非圧縮非粘性流体に対する Euler 方程式は Poisson 方程式 $\partial F / \partial t = \{F, H\}$ の形をとる。双対空間 \mathfrak{g}^* 上の余随伴表現 ad^* は、 $\xi \in \mathfrak{g}$ として、随伴表現 ad の双対作用素 $\langle u, ad(\xi)^*v \rangle = \langle ad(\xi)u, v \rangle$ である。これを用いると、Poisson 方程式は $v \in \mathfrak{g}^*$ の発展方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -ad^* \left(\frac{\delta H}{\delta v} \right) v. \quad (6)$$

に焼き直せる [1]。この式において、 $\delta H / \delta v$ を任意の元 $u(t) \in \mathfrak{g}$ で置き換えたものは、Euler-Poincaré 方程式とよばれる [14]。Euler 方程式に対して、作用 ad^* を成分で書きあ

らわすと, i 成分は

$$[\text{ad}^*(\xi)v]_i = [-\xi \times (\nabla \times v) + \nabla f]_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

となる. ここで, f は \mathcal{D} 上の関数, ξ は \mathcal{D} 上のベクトル場である. 関数 f をうまく調整することによって, $v \in \mathfrak{g}^*$ を, \mathcal{D} の境界 $\partial\mathcal{D}$ で $\partial\mathcal{D}$ に接する \mathcal{D} 上のソレノイダルなベクトル場とできる.

方程式 (6) の解は余随伴軌道 $v(t) = \text{Ad}^*(\varphi_t^{-1})v(0)$ である. ここで, φ_t は $\delta H/\delta v$ によって生成される $\text{SDiff}(\mathcal{D})$ の部分群で, 時刻 t をパラメータにもつ. 出発点を固定して可能な限りの余随伴軌道を尽くした集合 $\{\text{Ad}^*(\varphi)v(0) \in \mathfrak{g}^* | \varphi \in \text{SDiff}(\mathcal{D})\}$ が等循環面 (isovortical sheet) である. 時刻 t_0 における速度場は

$$u(t_0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t_0} (\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}) = \left. \frac{\delta H}{\delta v} \right|_{t_0} \quad (8)$$

によって与えられる.

基本流として, $\text{SDiff}(\mathcal{D})$ 上の軌道 φ_t とそれによって発展する双対空間 \mathfrak{g}^* 内の軌道 $v(t)$ が与えられたとする. さて, 初期時刻 $t=0$ において, $v(0)$ が $\varphi_{\alpha,0} \in \text{SDiff}(\mathcal{D})$ による攪乱を受けて, $v_\alpha(0) = \text{Ad}^*(\varphi_{\alpha,0}^{-1})v(0)$ までわずかにずらされたとしよう. ここで, $\alpha \in \mathbb{R}$ は攪乱振幅の大きさを表わす非負の微小パラメータである. この形に制限すると, 攪乱を受けた初期条件 $v_\alpha(0)$ は $v(t)$ と同じ等循環面上にあり, $\text{SDiff}(\mathcal{D})$ の元によって発展させられる引き続く軌道 $v_\alpha(t)$ も同じ等循環面上に留まる. したがって, 各時刻 t ごとに, 体積保存微分同相写像 $\varphi_{\alpha,t} \in \text{SDiff}(\mathcal{D})$ が存在して, 攪乱を受けた軌道 $v_\alpha(t)$ と $v(t)$ との関係が

$$v_\alpha(t) = \text{Ad}^*(\varphi_{\alpha,t}^{-1})v(t) = \text{Ad}^*((\varphi_{\alpha,t} \circ \varphi_t)^{-1})v(0). \quad (9)$$

のようにあらわせる.

パラメータ α が小さい場合には, $\varphi_{\alpha,t}$ は恒等写像に近い. この場合, 時間 t について滑らかに変化する Lie 環の元 $\xi_\alpha(t) \in \mathfrak{g}$ が存在して, 指数写像によって, $\varphi_{\alpha,t} = \exp \xi_\alpha(t)$ と関係づけられる. この生成子 ξ_α をパラメータ α について $O(\alpha^2)$ まで展開しよう:

$$\xi_\alpha = \alpha \xi_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \xi_2 + \dots \quad (10)$$

定義からしたがう関形式 $\text{Ad}^*(\varphi_{\alpha,t}^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} [-\text{ad}^*(\xi_\alpha)]^n / n!$, を用いると, (9) は次のように展開される:

$$\begin{aligned} v_\alpha &= v + \alpha v_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 v_2 + \dots; \\ v_1 &= -\text{ad}^*(\xi_1)v, \quad v_2 = -\text{ad}^*(\xi_2)v + \text{ad}^*(\xi_1)\text{ad}^*(\xi_1)v. \end{aligned} \quad (11)$$

ベクトル場と同一視すると ($v = v \in \mathfrak{g}^*$), これらは

$$v_1 = \mathcal{P}[\xi_1 \times \omega], \quad v_2 = \mathcal{P}[\xi_1 \times (\nabla \times (\xi_1 \times \omega)) + \xi_2 \times \omega] \quad (12)$$

と表示できる。ここで、 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ は渦度で、 \mathcal{P} はソレノイダル・ベクトル場に射影演算子である。同様に攪乱された軌道 $\varphi_{\alpha,t} \circ \varphi_t$ の速度場は

$$\begin{aligned} u_\alpha(t_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t_0} (\varphi_{\alpha,t} \circ \varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,t_0}^{-1}) \\ &= u(t_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} [\text{ad}(\xi_\alpha)]^n \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} - \text{ad}(v)\xi_\alpha \right) \end{aligned} \quad (13)$$

と展開できる。最初の数項を書き下すと、

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u + \alpha u_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 u_2 + \cdots; \\ u_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \text{ad}(u)\xi_1, \\ u_2 &= \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \text{ad}(u)\xi_2 + \text{ad}(\xi_1) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \text{ad}(u)\xi_1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

である。

ハミルトニアン H を導入すると、 \mathcal{D} 上のベクトル場 $u_\alpha \in \mathfrak{g}$ とその双対元 $v_\alpha \in \mathfrak{g}^*$ をハミルトン・ベクトル場として同一視できる：

$$u_\alpha(t) = \left. \frac{\delta H}{\delta v} \right|_\alpha (t) = v_\alpha(t). \quad (15)$$

流体の密度を 1 とするとハミルトニアンは運動エネルギー $H = \int_{\mathcal{D}} v_\alpha^2 / 2 dV$ であるからであり、 $v_\alpha(t)$ と $u_\alpha(t)$ がまったく同じものになる。

この同一視によって、(12) と (14) が結びついて、ラグランジュ変位 ξ_1, ξ_2 の発展方程式

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\xi_1 - (\xi_1 \cdot \nabla)\mathbf{U} = \mathbf{v}_1, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\xi_2 - (\xi_2 \cdot \nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\xi_1 - (\xi_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad (17)$$

が導かれる。右辺の $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は (12) によって与えられる。記号 $\mathbf{U} = \mathbf{v}$ は基本流の速度場で、(12) における $\omega = \nabla \times \mathbf{U}$ はそれがもつ渦度をあらわす。1 次の変位に対する方程式 (16) はよく知られているが、2 次変位に対する方程式 (17) は見かけない。おそらく、文献 [7] ではじめて導出されたものであろう。文献 [7] でのベクトル解析による導出法に比べて、ここでの代数的な導出法ははるかに簡便で、(17) にいたる道筋が見通しよく、高次への拡張も容易である。

3 攪乱場のエネルギーと平均流の生成

攪乱の等循環面への制限は、攪乱を加えることによって生じたエネルギーの増加分の計算を容易にする。エネルギーの増分を微小パラメータ α による展開形

$$H(v_\alpha) = H(v) + \alpha H_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 H_2 + \dots \quad (18)$$

の形で計算しよう。基本流が定常であるとき ($\partial v/\partial t = 0$), (11) を用いると、1次の項が消えることが示せる：

$$H_1 = \left\langle \frac{\delta H}{\delta v}, v_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\delta H}{\delta v}, -\text{ad}^*(\xi_1)v \right\rangle = - \left\langle \xi_1, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle = 0. \quad (19)$$

これは、シンボリックな表現形式であるが、「定常 Euler 流が等循環面に制限した攪乱に関して運動エネルギーの極値状態であること」[1, 2]の構成的な証明を与えている。結果的に、第2項

$$\begin{aligned} H_2 &= \left\langle \frac{\delta H}{\delta v}, v_2 \right\rangle + \left\langle \frac{\delta^2 H}{\delta v^2} v_1, v_1 \right\rangle = - \left\langle \xi_2, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \xi_1, \frac{\partial v_1}{\partial t} \right\rangle \\ &= - \left\langle \xi_1, \frac{\partial v_1}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \xi_1, \text{ad}^* \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right) v \right\rangle = \int_{\mathcal{D}} \omega \cdot \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} \times \xi_1 \right) dV \end{aligned} \quad (20)$$

がエネルギーの増分の主要項を担う。これが波のエネルギーとよばれるものである。最終形 (20) の中身の簡潔さは注目すべきものである；(20) は全体として振幅について2次の量だが、被積分関数からは2次の Lagrange 変位 $\xi_2(\mathbf{x}, t)$ は落ちてしまって、1次の変位 $\xi_1(\mathbf{x}, t)$ 、すなわち、線形解だけでかけている。波のエネルギーに対する表式 (20) はすいぶん前に導かれた (たとえば [2]) が、いずれも、2次変位 ξ_2 の存在を忘れたままになっている。

波のエネルギーと同じ要領で、波の非線形相互作用によって誘導される $O(\alpha^2)$ の直流成分、すなわち、平均流を導出することができる [11]。与えられた元 $\eta \in \mathfrak{g}$ 、に対して、「この方向の運動量」 $J = \langle \eta, v \rangle$ を導入しよう。ハミルトン力学系に対する Noether の定理によって、ハミルトニアンが変換 $\exp \eta$ のもとで不変ならば、 J は一定不変である。攪乱を受けた双対元 v_α に関する運動量 $J_\alpha = \langle \eta, v_\alpha \rangle$ を定義し、運動量 J_α の J からの増加分を α についてべき展開の形

$$J_\alpha = \langle \eta, v \rangle + \alpha J_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 J_2 + \dots \quad (21)$$

で計算しよう。具体形 (11) を代入して変形を行うと、2次までの増分は

$$\begin{aligned} J_1 &= \langle \eta, v_1 \rangle = \langle \eta, -\text{ad}^*(\xi_1)v \rangle = \langle \xi_1, \text{ad}^*(\eta)v \rangle, \\ J_2 &= \langle \eta, v_2 \rangle = \langle \xi_2, \text{ad}^*(\eta)v \rangle + \langle \xi_1, \text{ad}^*(\eta)v_1 \rangle \end{aligned} \quad (22)$$

に帰着する。

さらに、基本流 $v(t)$ が次の対称性 $\text{ad}^*(\eta)v = 0$, をもてば、1次の増分は $J_1 = 0$, したがって、2次の増分が J_2 主要項となり、Euler 方程式の文脈では、

$$J_2 = \langle \text{ad}(\eta)\xi_1, -\text{ad}^*(\xi_1)v \rangle = \int_D \omega \cdot (\xi_1 \times \mathcal{L}_\eta \xi_1) dV \quad (23)$$

の形の積分となる。ここで $\mathcal{L}_\eta \xi_1 = -\text{ad}(\eta)\xi_1$ は ξ_1 の η に関する Lie 微分である。2次の運動量の増分 J_2 が1次の Lagrange 変位 ξ_1 だけでかけていることは、再び、強調してもよいであろう。

4 Kelvin 波

Kelvin 波について手短かに思い出そう。ここでは、無限にのびる円筒容器に閉じ込められた状況を考え、この中の剛体回転流の上に立つ $O(\alpha)$ の線形攪乱に対する解を書き下す。境界円の半径を $r = 1$ とし、内部の流体は非圧縮・非粘性であるとする。

円筒の中心軸を z -軸とする円筒座標系 (r, θ, z) を導入する。2次元基本流の r 成分, θ 成分をそれぞれ U_0, V_0 と、圧力を P_0 としよう。下付き添字 0 は、これらが円形断面内の領域の流れに関する量であることをあらわす。別の論文 [26, 23] で、断面形状の楕円への変形を考える。基本流の速度場は

$$U_0 = 0, \quad V_0 = r, \quad P_0 = r^2/2 - 1 \quad (24)$$

で与えられる。攪乱 $\tilde{\mathbf{u}} = \alpha \mathbf{u}_{01}$ として、一般性を失うことなく、3次元基準モード

$$\mathbf{u}_{01}^{(m)} = A_m(t) \mathbf{u}_{01}^{(m)}(r) e^{im\theta} e^{ikz}, \quad A_m(t) \propto e^{-i\omega_0 t} \quad (25)$$

を考えよう。ここで、振幅 $A_m(t)$ は時刻 t の複素数値関数で、 ω_0 は周波数である。これが、方位波数 $m (\in \mathbb{Z})$, 軸方向波数 $k (\in \mathbb{R})$ の Kelvin 波をあらわす。動径固有関数 $\mathbf{u}_{01}^{(m)}(r)$ は線形化された Euler 方程式を解くことによって求められる：

$$\mathcal{L}_{m,k} \mathbf{u}_{01}^{(m)} + \nabla p_{01}^{(m)} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_{01}^{(m)} = 0. \quad (26)$$

ここで、

$$\mathcal{L}_{m,k} = \begin{pmatrix} -i(\omega_0 - m) & -2 & 0 \\ 2 & -i(\omega_0 - m) & 0 \\ 0 & 0 & -i(\omega_0 - m) \end{pmatrix} \quad (27)$$

である。

解は容易に求まり、動径関数の各成分は、 m -次の第1種 Bessel 関数 J_m を用いて、

$$\begin{aligned} u_{01}^{(m)} &= \frac{i}{\omega_0 - m + 2} \left\{ -\frac{m}{r} J_m(\eta_m r) + \frac{\omega_0 - m}{\omega_0 - m - 2} \eta_m J_{m+1}(\eta_m r) \right\}, \\ v_{01}^{(m)} &= \frac{1}{\omega_0 - m + 2} \left\{ \frac{m}{r} J_m(\eta_m r) + \frac{2\eta_m}{\omega_0 - m - 2} J_{m+1}(\eta_m r) \right\}, \\ w_{01}^{(m)} &= \frac{k}{\omega_0 - m} J_m(\eta_m r), \quad p_{01}^{(m)} = J_m(\eta_m r) \end{aligned} \quad (28)$$

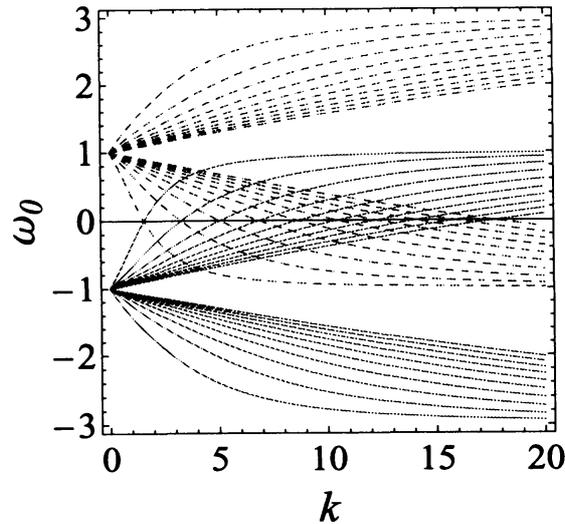


図 2: 円筒容器内に閉じ込められた Kelvin 波の分散関係. 実線が左巻きらせん波 ($m = -1$), 波線が右巻きらせん波 ($m = +1$) に対するものである.

とかける. ここで, η_m は動径波数で, $\eta_m^2 = [4/(\omega_0 - m)^2 - 1] k^2$ によって与えられる. この線形解 (28) に境界条件 $u_{01}^{(m)} = 0$ at $r = 1$ を課すと, 分散関係

$$J_{m+1}(\eta_m) = \frac{(\omega_0 - m - 2)m}{(\omega_0 - m)\eta_m} J_m(\eta_m) \quad (29)$$

が得られる [28, 23].

図 2 にらせん波 ($m = \pm 1$) の分散関係を示す. 左巻きらせん波 ($m = -1$) に対する分散関係を実線で, 左巻きらせん波 ($m = +1$) に対するものを破線で描いた. 右巻き ($m = 1$) に対しては $(k, \omega_0) = (0, 1)$ から, 左巻き ($m = -1$) に対しては $(k, \omega_0) = (0, -1)$ から無限本の枝が出る. うち, それぞれ 20 本ずつを図示した. 無限に広がる領域の場合 [27, 5] と違い, 閉じ込め系では孤立枝 (isolated modes) が存在しない.

5 Kelvin 波によって誘導される平均流

Kelvin 波 αu_{01} 同士の非線形相互作用によって, 攪乱 \tilde{u} の $O(\alpha^2)$ 項 $\alpha^2 u_{02}$ の中に定常直流成分 (θ と z によらない項) が生み出される. 基本流が z -軸方向の並進対称性と z -軸まわりの回転対称性をもつ場合, 速度場の θ 成分と z 成分としては, 任意の動径分布が許される. この事実と符号して, Euler 的記述による流体力学の枠組み [26] では, $O(\alpha^2)$ で誘導される平均流を完全に決めることができない [7] ことは, 冒頭 (§1) に述べたとおりである. Lagrange 変位はこの困難を解消してくれる. ひずみ流など余計なものをもち出さなくても, 2 次の平均流が素直に計算できる. 以下は, Lagrange 的方法の要約である [7, 8].

前節での微小パラメータ α に関する展開に対しては, (16) は

$$\mathbf{u}_{01} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_1}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_1 - (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 \quad (30)$$

となる. 基本流 (24) は剛体回転流 $\mathbf{U}_0 = r\mathbf{e}_\theta$ なので, (30) の右辺は $-i(\omega_0 - m)\boldsymbol{\xi}_1$ に帰着し, Kelvin 波 (25) の線形重ね合わせを代入すると, (30) は

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \text{Re} \left[\sum \frac{iA_m(t)}{\omega_0 - m} \mathbf{u}_{01}^{(m)}(r) e^{im\theta} e^{ikz} \right] \quad (31)$$

と解ける. 非圧縮性条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_1 = 0$. が拘束条件として課せられていることを忘れてはならない.

さて, 剛体回転流 $\mathbf{U}_0 = r\mathbf{e}_\theta$ に対しては渦度 $\nabla \times \mathbf{U}_0 = 2\mathbf{e}_z$ は一様なので, 直流成分は, (23) からよりもむしろ直接 (12) の空間平均によって計算した方が手っ取り早い. 結局, 波のエネルギー (20) 同様, 2次の Lagrange 変位を含む項 $\boldsymbol{\xi}_2$ が落ちて, 平均流として

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}_{02}} &= \overline{\mathcal{P} [\boldsymbol{\xi}_1 \times (\nabla \times (\boldsymbol{\xi}_1 \times \mathbf{e}_z))]} = \overline{\boldsymbol{\xi}_1 \times \partial \boldsymbol{\xi}_1 / \partial z} \\ &= \sum \frac{4ik}{(\omega_0 - m)^2} |A_m|^2 (0, u_{01}^{(m)} w_{01}^{(m)}, -u_{01}^{(m)} v_{01}^{(m)}) \end{aligned} \quad (32)$$

が残る. この Lagrangian 的方法は, 任意の軸方向波数 k と分散関係をみたす周波数 ω_0 の組み合わせ (k, ω_0) に対して平均流を計算できる. 何よりも, 直接的に計算できる. この平均流は3次元振動に固有の量である. 波数 k を0ととる極限で, すなわち, 2次元振動に対しては, (32) の θ 成分も z 成分も消えてしまう.

エネルギー (20) の被積分関数と平均流 (32) の形の類似性に注目されたい. 円柱の軸方向に沿って基本流は一様なので, $O(\alpha^2)$ のエネルギーの増分 H_2 の単位長さ当たりの量を E_2 , $O(\alpha^2)$ の平均流の断面全体にわたる積分を

$$\mathbf{J}_2 = \int \overline{\mathbf{u}_{02}} dA \quad (33)$$

とかこう. 単一の基準モード (25) に対して, 作用 (action) を $\mu_0 = E_2/\omega_0$ によって定義すると, 直流成分は

$$J_{2\theta} = m\mu_0, \quad J_{2z} = k_0\mu_0$$

と, μ_0 に波数を乗じた形にあらわせる. すなわち, \mathbf{J}_2 は '擬運動量 (pseudo-momentum)' に他ならない.

6 弱非線形安定性理論に向けて

z 軸に関して回転および並進対称性をもつために, 円筒容器内の剛体回転流, あるいは, Rankine の渦は中立安定である. この対称性が破れると, 剛体回転流は不安定化し, Kelvin

波の振幅は増幅する。対称性を破る摂動として典型的なものが純粹ずり流 [24, 27, 28, 3, 5] で、流線を楕円形に変形する。

Kelvin 波の振幅の成長を弱非線形段階まで記述するには、振幅方程式を振幅 α について最低 $O(\alpha^3)$ まで計算しなければならない。この途上にあつて、壁として立ちはだかっているのが $O(\alpha^2)$ において出現する直流成分である。伝統的な Euler 的記述によるアプローチでは、本来不要であるひずみ流摂動をもち出して、摂動の強さを ϵ として、より高次である $O(\alpha^2\epsilon)$ での可解条件から決めようとする [26, 29]。しかし、平均流の振幅の時間微分しか決まらないので、その積分定数が不定パラメータとして残る。本稿では、攪乱を isovortical なもの限定して、Kelvin 波の相互作用によって誘導される $O(\alpha^2)$ の直流成分を計算した。ひずみ流という外部的な摂動を必要としないし、平均流の振幅も一意的に決まる。これを利用すれば、 $O(\alpha^3)$ までの弱非線形振幅方程式もあいまいさなく求められる [23, 8]。実際、一挙に、ハミルトンの標準形 [17] が出てきて、係数も完全に決められる。

この弱非線形振幅方程式は、Kelvin 波の成長が $O(\alpha^3)$ での非線形効果によって飽和することを示す。実際の現象はこれとは違う。Kelvin 波が立つと、次々新たなモードが励起されて乱流状態に発達し、やがて流れは崩壊する [21, 4]。Kelvin 波がある程度成長すると、飽和する前に、2次不安定によって新たな Kelvin 波が励起されるという遷移のシナリオが考えられている [22, 6]。この2次不安定性までを決定しようとする、可能な弱非線形振幅方程式はおびただしい数の項からなり、従来 Euler 的記述による手続きは煩雑すぎて、事実上遂行不可能であろう。しかも、最終形に到達できない可能性が高い。途中の $O(\alpha^2)$ において、Lagrange 変位を用いて平均流を計算するステップをかませることが、弱非線形振幅方程式の最終形に到達する近道となろう。

参考文献

- [1] Arnol'd, V. I.: Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **16** (1966) 319-361.
- [2] Arnol'd, V. I.: Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires, *J. Méc.* **5** (1966) 29-43.
- [3] Eloy, C. and Le Dizés, S.: Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field, *Phys. Fluids* **13** (2001) 660-676.
- [4] Eloy, C., Le Gal, P. and Le Dizés, S.: Experimental Study of the Multipolar Vortex Instability, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3400-3403.

- [5] Fukumoto, Y.: The three-dimensional instability of a strained vortex tube revisited, *J. Fluid. Mech.* **493** (2003) 287–318.
- [6] Fukumoto, Y., Hattori, Y. and Fujimura, K.: Weakly nonlinear evolution of an elliptical flow, In *Proc. of the 3rd International Conference on Vortex Flows and Vortex Models* (ed. K. Kamemoto, the Japan Society of Mechanical Engineers (JSME), 2005) pp. 149-154.
- [7] Fukumoto, Y. and Hirota, M.: Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it, *Phys. Scr.* **T132** (2008) 014041.
- [8] Fukumoto, Y., Hirota, M. and Mie, Y.: Lagrangian approach to weakly nonlinear stability of an elliptical flow, submitted to *Phys. Scr.* (2010).
- [9] Helmholtz, H. von: Über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen, *Crelle's J. (J. Reine Angew. Math.)* **55** (1858) 25-55. [English translation] by P. Tait: On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion, *Phil. Mag. (4)* **33** (1867) pp. 485–513.
- [10] Helmholtz, H. von: Theorie der luftschwingungen in röhren mit offenen enden, *Crelle's J.* **57** (1860) 1-71.
- [11] Hirota, M: Action-angle representation of waves in fluids and plasmas: applications to stability analysis and wave-mean field interactions, In COE Lecture Note Vol. **20 Math-for-Industry Tutorial: Spectral theories of non-Hermitian operators and their application** (Faculty of Mathematics, Kyushu University, 2009) pp. 137-156.
- [12] Hirota, M. and Fukumoto, Y.: Energy of hydrodynamic and magnetohydrodynamic waves with point and continuous spectra, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 083101.
- [13] Hirota, M. and Fukumoto, Y.: Action-angle variables for the continuous spectrum of ideal magnetohydrodynamics, *Phys. Plasmas* **15** (2008) 122101.
- [14] Holm, D. D., Schmah, T. and Stoica, C.: *Geometric Mechanics and Symmetry* (Oxford University Press, 2009).
- [15] Howe, M. S.: Vorticity and the theory of aerodynamic sound, *J. Eng. Math.* **41** (2001) 367–400.
- [16] Kerswell, R. R.: Elliptical instability, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34** (2002) 83–113.
- [17] Knobloch, E., Mahalov, A. and Marsden, J. E.: Normal forms for three-dimensional parametric instabilities in ideal hydrodynamics, *Physica D* **73** (1994) 49–81.

- [18] Kobayashi, T., Takami, T., Miyamoto, M., Takahashi, K., Nishida, A. and Aoyagi, M.: Calculation with Compressible LES for Sound Vibration of Ocarina, In *Proc. of Open Source CFD International Conference 2009*.
- [19] Lamb, H.: *Hydrodynamics*, 6th ed. (Cambridge University Press, 1932).
- [20] Lighthill, J.; On sound generated aerodynamically. I. General theory, *Proc. Roy. Soc. London A* **211** (1952) 564–587.
- [21] Malkus, W. V. R.: An experimental study of the global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **48** (1989) 123–134.
- [22] Mason, D. M. and Kerswell, R. R.: Nonlinear evolution of the elliptical instability: an example of inertial wave breakdown, *J. Fluid Mech.* **396** (1999) 73–108.
- [23] Mie, Y. and Fukumoto, Y.: Weakly nonlinear saturation of stationary resonance of a rotating flow in an elliptic cylinder, *J. Math-for-Industry* **2** (2010) 27–37.
- [24] Moore, D. W. and Saffman, P. G.: Instability of a straight vortex filament in a strain field, *Proc. R. Soc. Lond. A* **346** (1975) 413–425.
- [25] Rodrigues, S. B. and Luca, J. D.: Weakly nonlinear analysis of short-wave elliptical instability, *Phys. Fluids* **21** (2009) 014108.
- [26] Sipp, D.: Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex, *Phys. Fluids* **12** (2000) 1715–1729.
- [27] Tsai, C.-Y. and Widnall, S. E.: The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field, *J. Fluid Mech.* **66** (1976) 721–733.
- [28] Vladimirov, V. A., Tarasov, V. F. and Rybak, L. Ya.: Stability of elliptically deformed rotation of an ideal incompressible fluid in a Coriolis force field, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **19** (1983) 437–442.
- [29] Walcffe, F. A.: The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence, PhD thesis. MIT.