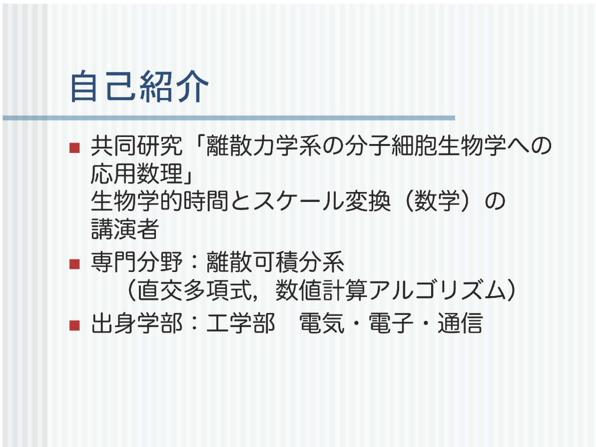
数理解析研究所講究録
第 1698 巻 2010 年 78-91

京都大学大学院情報学研究科 辻本諭

タイトル「離散可積分系とスケール変換 ～連続･離散･超離散～」

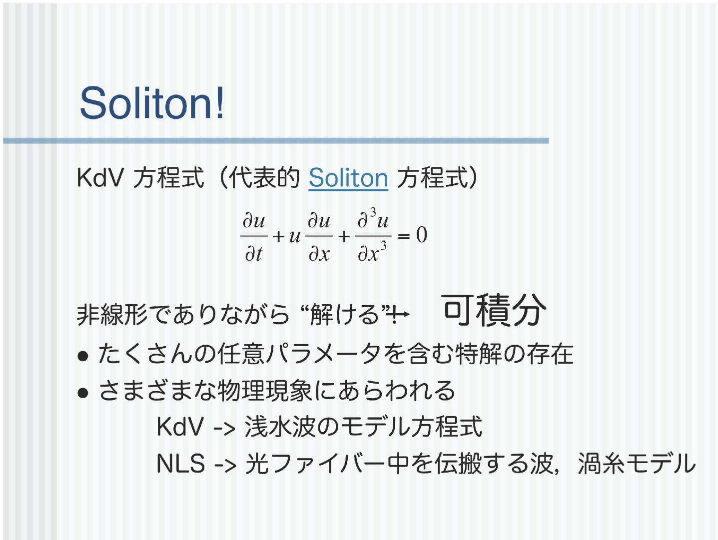
No.1 自己紹介

私は、離散可積分系とよばれる力学系を専門にしています。離散可積分系は直交多項式や数値計算アルゴリズムとも関係しています。出身学部は工学部の電子通信で、元々数学科でも無ければ理学部でもありませんので、他の方とは異なっております。今回は数学サイドとして紹介して頂きまして、大変光栄に思っております。



No.2 soliton!

代表的な Soliton 方程式（KdV 方程式）は次の数式で表されます。



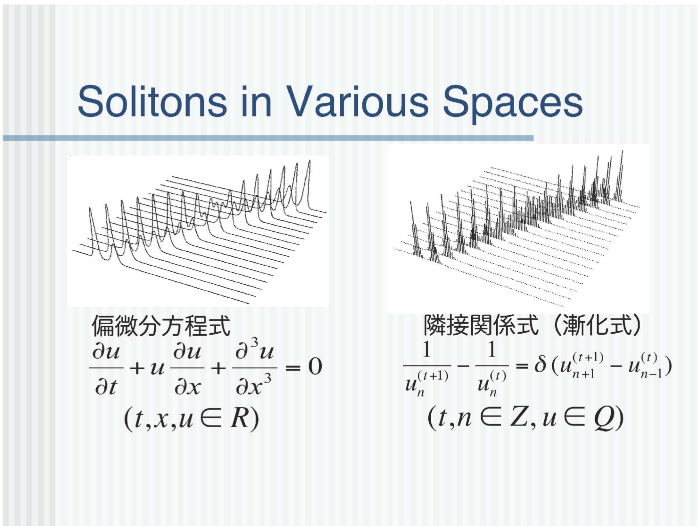
KdV 方程式の第 2 項である $u\ du\ /\ dx$ が非線形項です．非線形項が無ければ線形方程式ですから、フーリエ変換などを用いて何なりと解くことが出来ます。非線形項があると、通常はどのように解けば良いか分かりませんが、ある特別な性質を持っておりまして、非線形でありながら解くことができます。「解ける」というのは、微分方程式が「積分可能」であるという意味です。積分可能という意味から我々は「可積分」という名前を総称として使っております。厳密な意味で数学の人に可積分とは何か聞けば定義はないと答えられるのが普通ですが、ここではもう少しラフに「解ける」という言葉も人それぞれ自由に定義してくださいというスタンスです。可積分は「解ける」ということですから、解を持っているということと表裏一体です。それも解析関数で書ける。ソリトンであれば、指数関数の有理関数で書けます。すなわち、指数関数の線形結合を分母分子に持つ関数として書けます。KdV 方程式は偏微分方程式ですので、その中に無限自由度の解があり、さらに沢山の任意パラメータを含む特解が存在します。それは N-ソリトン解と呼ばれるもので、ソリトンを N=1,2,3,...といくつでも入れることができます。

アニメーションを見てみましょう。ご覧の様に一つの孤立波が安定的に伝播する。線形ではこのような現象はありえません。アニメーションでは一つの波ですが、２つのソリト

ン波を重ね合わせることができて、重なりあう時に非線形な相互作用をして、位相のズレを起こします。このアニメーションは空間 1 次元時間 1 次元でしたが、空間を 2 次元にしても解を持っていて、方程式を解くことができます。この辺は佐藤幹夫先生による、非常に素晴らしい KP 理論が構築されています。

KdV 方程式はもともと物理現象として発見されました。今から 100 年くらい前、John Scott Russell がスコットランドの用水路で孤立波を観測したのが始まりです。それを Korteweg と de Vries がモデル化しました。したがって、空間方向も時間方向も連続な偏微分方程式として記述されています。さらに、ソリトンは Non-linear Schrodinger (NLS)方程式においても見られるといった報告が重なりまして、今では可算無限個のソリトン方程式があることが知られています。

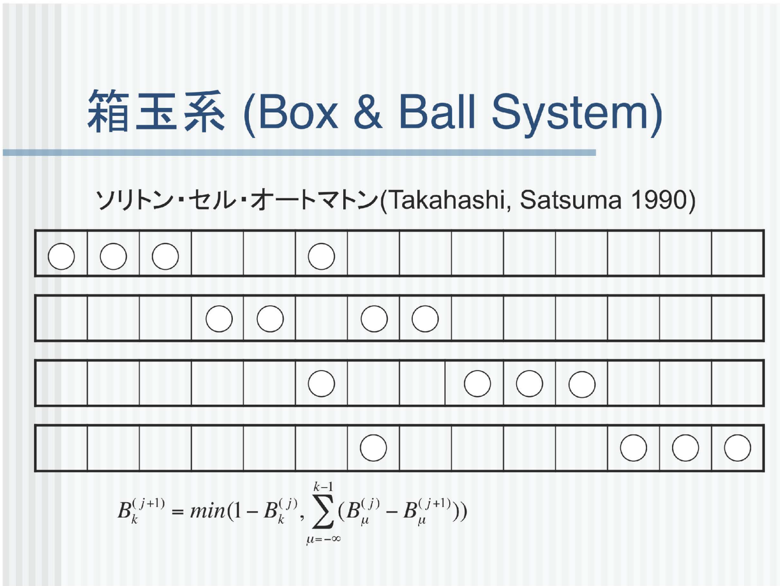
No.4 Solitons in various spaces



ソリトンは物理現象として発見されましたので、空間も時間も連続な偏微分方程式として記述されます（左）。しかし、ソリトン（可積分系）は必ずしも連続変数の中だけに存在するのではなく、右の隣接関係式の中にみることも出来ます。ここで、隣接関係式中の $u_n^{(t)}$ や $u_n^{(t+1)}$ は u のべき乗ではなく、離散時刻 t におけるサイト n の間の関係を示します。図は 2 次元ですから漸化式と呼ぶことがふさわしいかどうか分かりませんが、一次元の場合は漸化式そのものです。このようにソリトンは非線形な隣接関係式においても存在します。さらに、ソリトンは空間時間について離散な隣接関係式の中にだけではなくて、セル･オートマトン中においても存在することが知られています。

No.5 箱玉系（Box & Ball System）

箱玉系（Box & Ball System）



ソリトン・セルオートマトンの最も基本的な系は、Takahashi-Satsuma により 1990 年に発見された箱玉系（BBS）と呼ばれる系です。箱玉系では無限、ないしは半無限個の箱を用意し、一つの箱には一つの玉しか入らないとして、何個か（有限個）の玉で箱を埋めて初期値として与えます。その初期値に対して、時間発展として一番左側にある玉(●)を再近接の右側の空き箱(□)に移していくという処理をします。仮に、

初期状態　　　●●●□□●□□□□□□□□

としたとき、一番左側にある玉を最近接にある、右側の空き箱に移します。同様に、左から 2 番目の玉を最近接にある空き箱へ、3 番目、4 番目と移しますと、時刻 t から t+1 へと移動させた結果は次の通りになります。

□□□●●□●●□□□□□□

これは次の時間発展のための初期条件となります。玉の数は前後で 4 つと変化なく、これは保存系です。以下同様に時間発展させて行きますと、次の通りになります。

□□□□□●□□●●●□□□

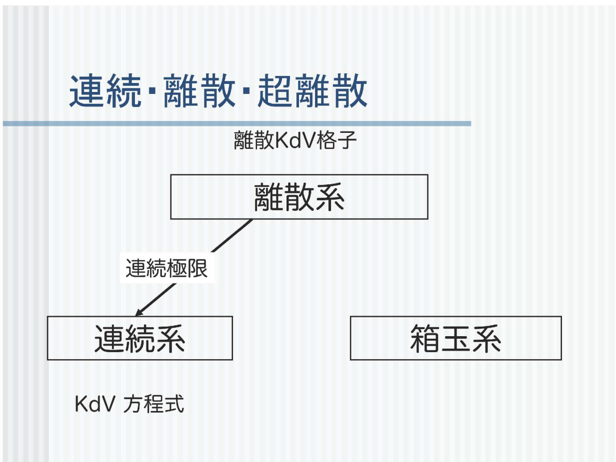
□□□□□□●□□□□●●●

先ほどアニメーションでお見せしたソリトン（孤立）波と比べていただきたいのですが、ソリトンとは孤立波が安定して伝播する。２つの孤立波が衝突した後にも保存している。かつ、衝突前後で位相のズレを起こす特徴をもち、それは箱玉系でも保存します。

箱玉系において波は高さが１と制限されていますが、その分横に連なります。相互作用中の状態は別に議論することにして、ソリトン同士が十分離れている状態で、一連の横並びの玉を１つのソリトンと思うと、ソリトンは横のつながりが多いほど速く移動します。つまり３つ横に繋がった玉は速さが３のソリトンとなります。それに対して、玉が一つの場合は各時間ごとに１つずつしか移動しない、速さが１のソリトンになります。KdV 方程式など、通常のソリトンでは波が高いほど速いのですが、箱玉系においては、連なっている玉の数が波の高さに相当します。波同士が衝突して相互作用すると、高さ１（連なった玉の数が１）のソリトンでは速さ１の移動が２時間ステップ分停止するという位相のズレを実現します。これは元々の KdV 方程式で見てきた位相のずれに対応します。この箱玉系は、KdV 方程式などとはまったく独立に、Takahashi-Satsuma 先生の洞察力によって天から降ってくるように発見されました。

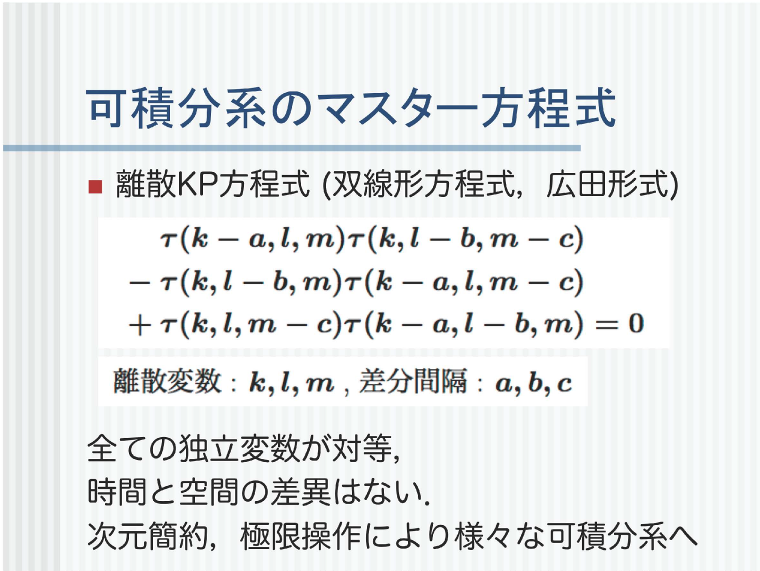
No.6 連続、離散、超離散

箱玉系の話は、見た目はもちろん離散系・連続系の KdV 方程式と違うわけで、離散系・連続系・箱玉系はそれぞれ独立に存在するように見えます。もちろん、離散系と連続系の間は深い関係があり、離散系の連続極限は連続系になることは想像の範囲内です。では箱玉系と他の可積分系（離散系・連続系の KdV 方程式）の間では何らかの意味で直接の関係は見て取れないか？ということを知りたくなります。そこで、まず前段階として、離散系と連続系の間の関係を見たいと思います。



No.7 可積分系のマスター方程式

行列式の恒等式は、可積分系に隠れている最も基本的な構造です。行列式の恒等式はケースバイケースで色々な方程式がありますが、行列式の恒等式を導く一番単純な方程式、すなわち離散 KP 方程式（双線形方程式、広田形式）を考えることができます。

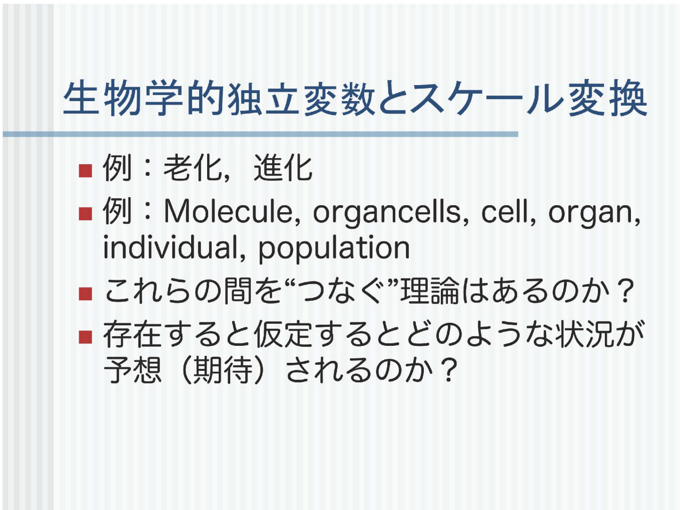


KP 方程式は 2 次形式、双線形形式になっており、広田先生によって導入された関数 τ で表現されています。ここで k, l, m は離散変数で、a, b, c は差分間隔です。差分間隔とは、例えばある離散変数の値 k について、次に a+k, a+2k と離散変数が取りうる値の間隔を与えます。式は、τ という変数の 3 次元空間中における 6 点格子上の値の関係式を要請しています。次元簡略すると、空間 1 次元時間 1 次元に落とすこともできます。KP 方程式に次元簡約ともう一つひねりを加えると KdV 方程式を得ることもできます。KdV 方程式のみならず、次元簡約、極限操作で様々な、多くの可積分方程式を離散 KP 方程式から導出することができます。

ここで注目して欲しいのは、独立変数 k, l, m がすべて対等であるということです。式中、各項は一つの離散変数ついてのみシフトしています。式は非常に対称性に富んでおり、ここに対称群が関与しているとする話も納得がいきます。式中、時間と空間の差異はありません。午前中の話とあわせますと、KP 方程式は大変未分化な、ある種の幹細胞のように考えても良いかも知れません。

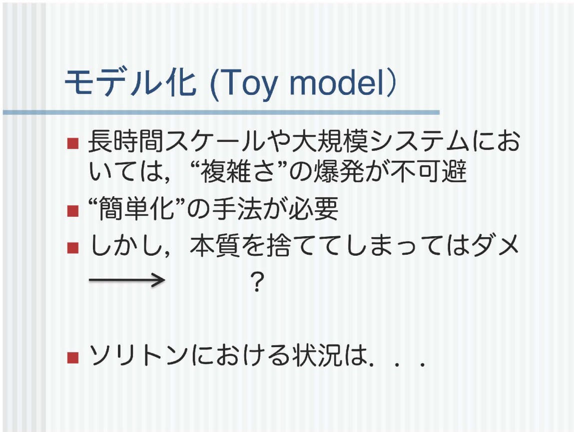
No.8 生物学的独立変数とスケール変換

ここで、やっとスケール変換という言葉が出てきます。加藤先生が「スケール変換」というテーマの元で私を呼んでくださったのは、これから話すことが役に立つのではないかと期待されたのではないかと想像します。すなわち、生物学的「独立変数」におけるスケール変換のような物があるか？というテーマです。可積分系においては、時間と空間は対等です。もちろん、物理の世界では、時間と空間では空間の方が粗くてもよろしいとか区別がありますが、その辺は度外視して、生物学的「独立変数」のスケール変換があるのか？もちろん現在私には良いアイディアはありませんが、時間方向の老化や進化と、空間方向の分子、器官、細胞、個人、集団をつなぐ理論はあるのか？という事です。存在すると仮定すると、どのような状況が期待されるのか？考えましょう。



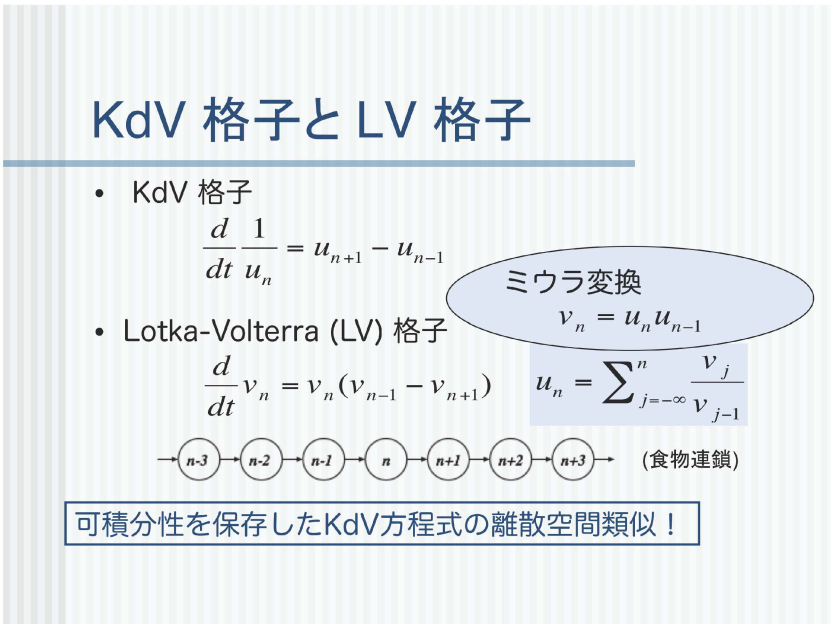
No.9 モデル化（Toy model）

そのような議論をするためには、モデル化が必要でしょう。なぜなら、小規模システムでさえ非線形なものを長時間スケールや大規模システムにしておくと複雑さの爆発が不可避です。これを我々が扱うことはできません。したがって、ある種の簡単化の手法が必須になりますが、簡単化の過程で本質を捨ててしまっては、例えば、すべて線形近似してしまっては何も面白いものは出てこない。では、本質とは何でしょう？生物学における大事なものはそのときそのときで異なると思いますが、ソリトンにおける状況は比較的はっきりしています。対象とするどのレベルでもソリトン解を持っていることです。このような本質的なものを保存した単純化が必要です。



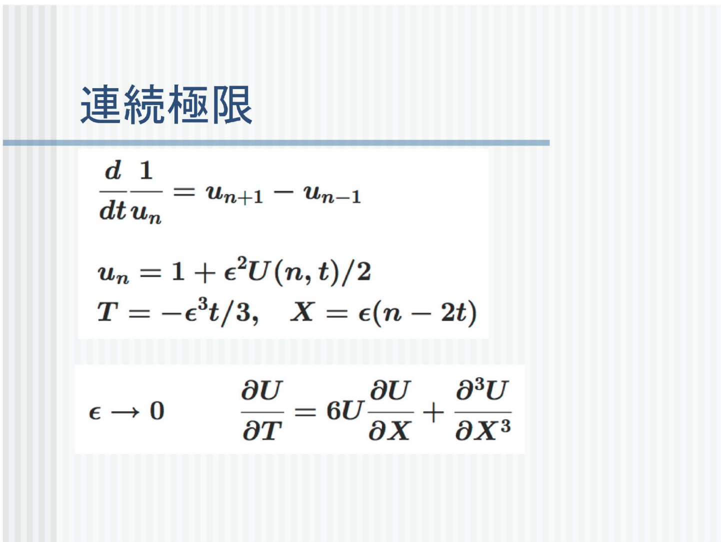
No.10 KdV 格子と LV（Lotka-Volterra）格子

もちろん、ソリトン解を持つといった本質を保存した単純化は、生物学にそのまま使えることは期待できません。しかし、先ほど紹介した箱玉系はとても簡単でした。箱玉系と離散系や連続系の KdV 方程式の間にある種の対応がつく、単純化の原理みたいなものが隠れていると非常に嬉しいです。そのような単純化の原理がソリトン系あるいは可積分系の世界では見つかっています。たとえこれが直接生物系に使えなくとも、このような成功例をご紹介することは意義あることと思っております。



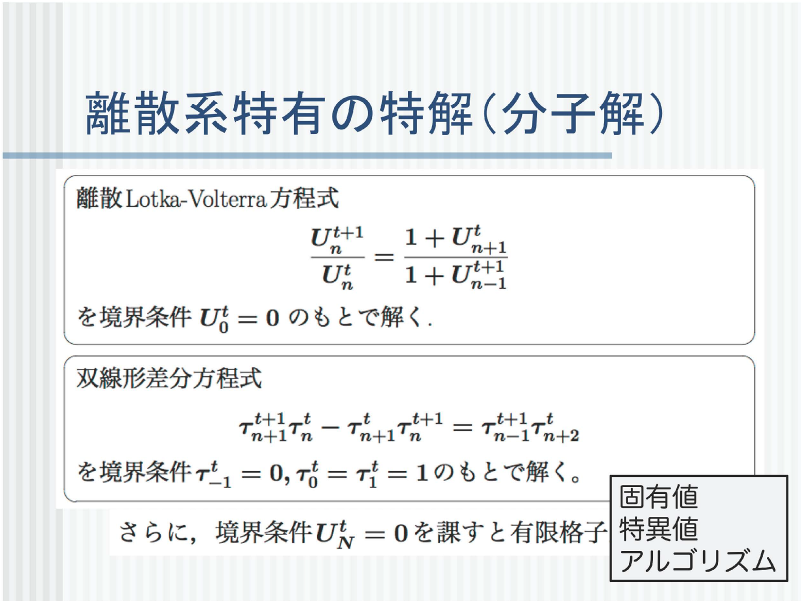
偏微分方程式をいきなり箱玉系に持ってゆくことは、ソリトン系においても非常に難しいですので、一旦、離散系を経由して箱玉系との対応を考えます。上には既に答えを示しています。離散空間類似というもので、上記離散 KdV 格子と離散 LV 格子は、見かけは違いますがどちらもそれぞれ適当な変数変換とスケーリング、そして差分間隔 $\varepsilon \to 0$ の極限操作をすることで KdV 方程式に帰着させることができます。

この一見違う 2 つの式は、ミウラ変換という非線形変換の公式（$v_n = u_n u_{n-1}$）で結ぶことが出来ます。KdV 格子を二つずらしてミウラ変換にしたがって v_n を定義すると、それは Lotka-Volterra 方程式の解になっています。



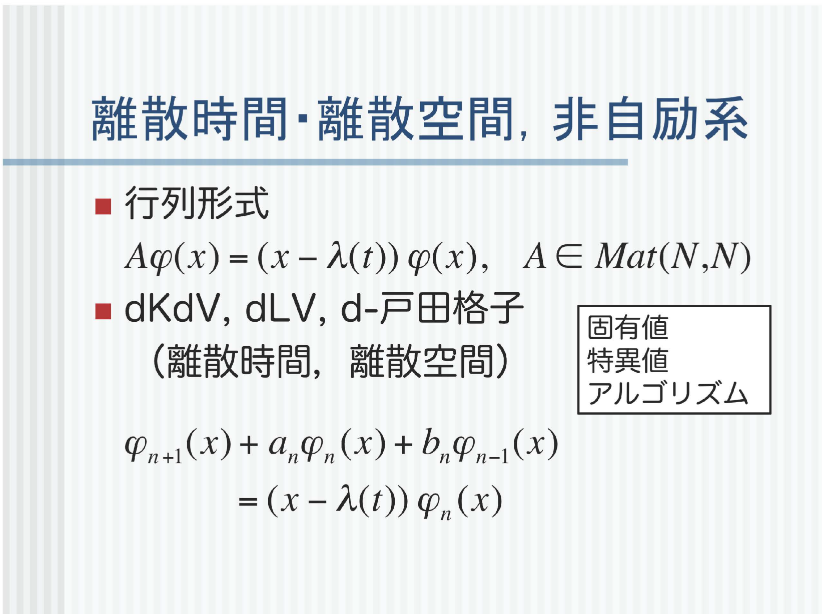
No.11 離散系特有の解(分子解) & No.12 分子解とソリトン解

さらに、これまでソリトン解の話しかしませんでしたが、境界を 0 とした分子解に拡張することができます（以下、時間の都合で省略）。



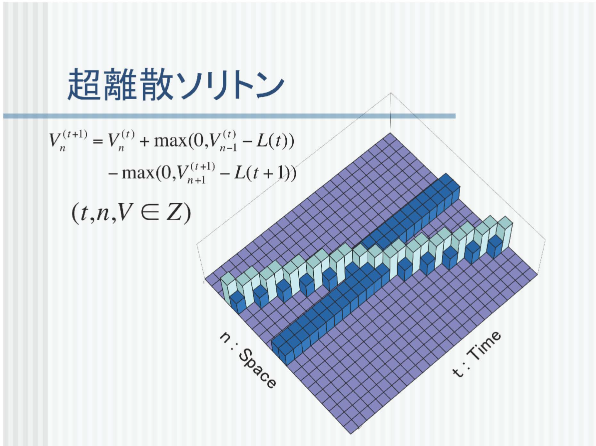
No.24 超離散系

超離散系を定義しますと、すべての独立変数、従属変数が整数の中に閉じたシステムのことです。箱玉系では、波の高さは１でしたが、波の高さも１、２､､､と言った整数に制限します。



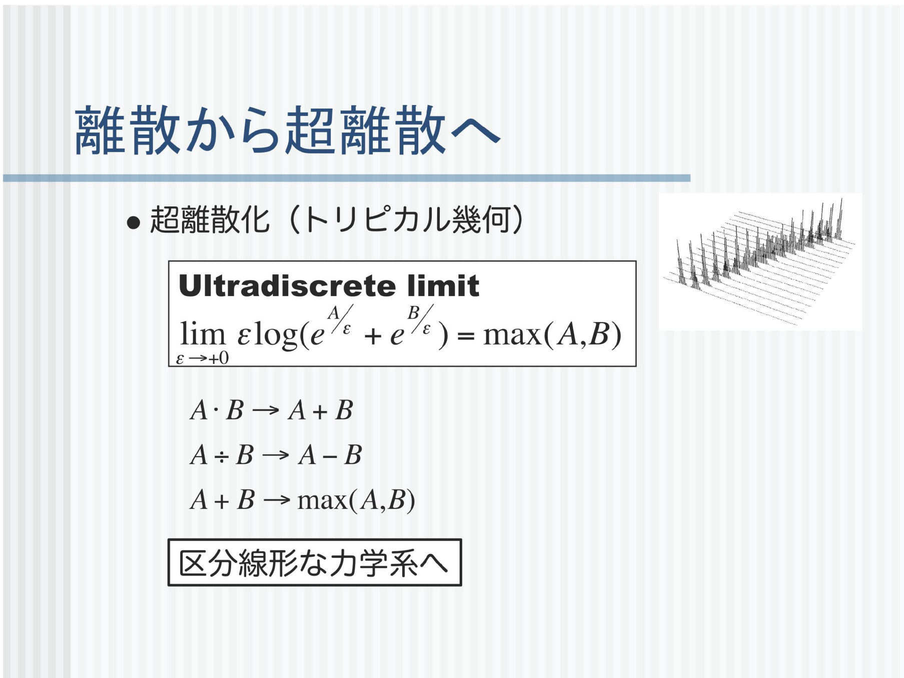
No.25 超離散ソリトン

超離散ソリトンの図を示します。箱の強度 1 、強度 2 といった不連続な強度のソリトン波同士の非線形相互作用をみることができます。



No.26 離散から超離散へ

このような離散から超離散への変換は系統的に導出することが出来て、我々の業界ではそれを超離散化と呼んでいます。一方、代数幾何の分野ではトロピカル幾何と呼びます。



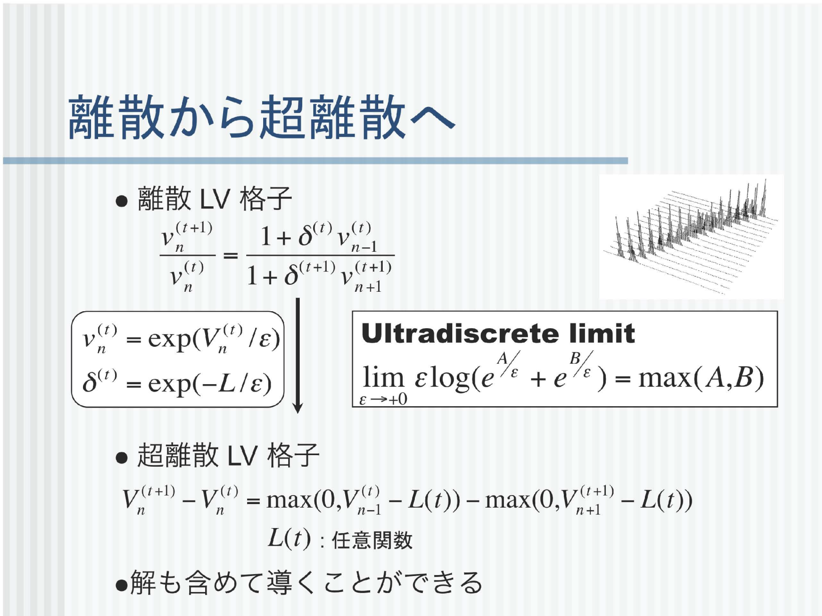
上に示す、Ultradiscrete limit と呼ばれる極限を離散系に適用します。それは下に示すように、掛け算を足し算に、割り算を引き算に、足し算を max にする変換になります。

A・B → A + B

A + B → A – B

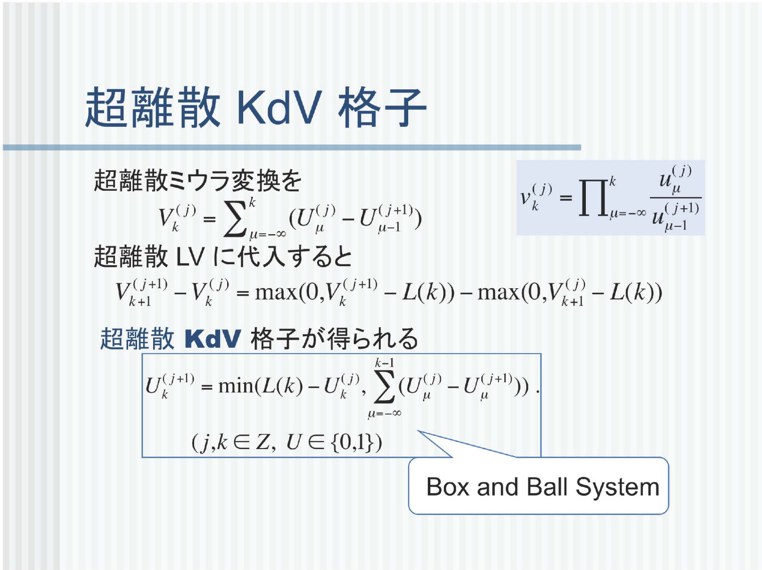
A + B → max(A,B)

こういった極限操作より先ほどの KdV 格子や LV 格子は区分線形な力学系へ変換され、離散 LV 格子は超離散 LV 格子へ変換されます。すなわち、独立変数、従属変数の初期値に整数を与えると整数の中で閉じた式へ変換することが出来ます。



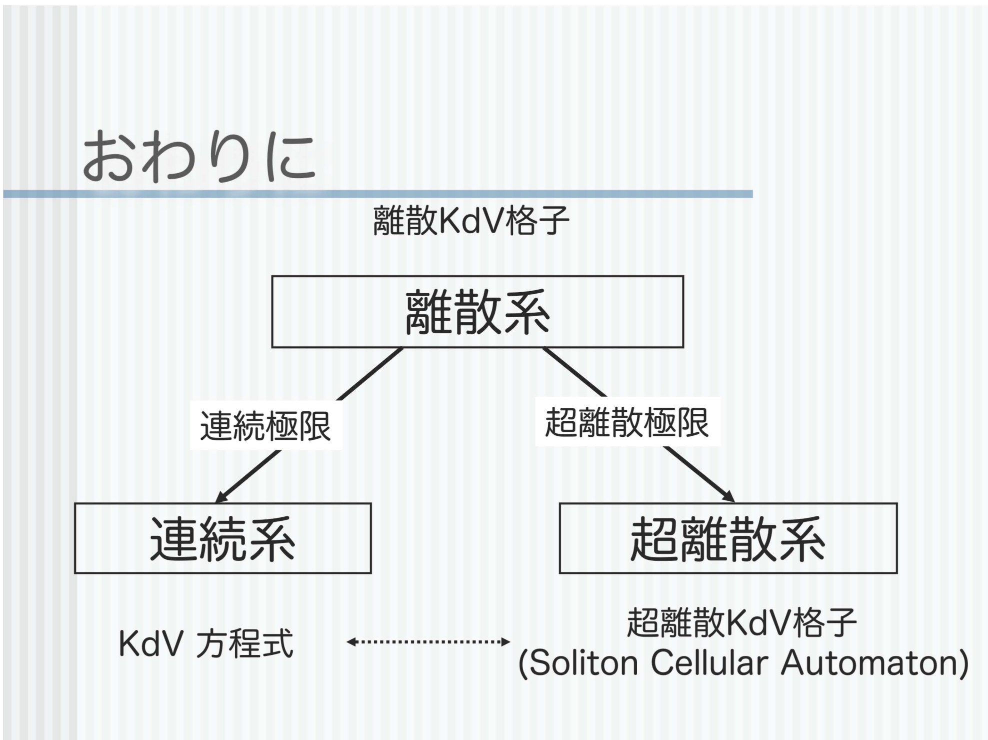
No.27 超離散 KdV 格子

これまでスライドでは離散 LV 格子の場合について解きましたが、同様の変換を離散 KdV 格子に適用しますと、箱玉系の式そのものが得られます。



No.28 終わり

まず離散系ありきとすると、離散系に対する連続極限（近似）をして連続系を得るという簡単化もありますが、逆に離散系の超離散極限をとると超離散系になり、非常に簡単な箱玉系までスケール変換することができる。離散系をミクロだとすれば、スケール変換によって得られる箱玉系はマクロであって、非常に複雑になることが予想されますが、現実にはより簡単な式が得られる。そして、その上でより複雑なことを考えることもできる。このような解析を行うことができれば我々としては非常に嬉しく思うわけです。



質問・コメント等

（質問）超離散系で出てきた方程式の解は離散系の解を形式的に手続きに従って変換すると出てくるのでしょうか？すなわち一般的に解を導くことはできるのか？

（回答）かなり一般的にできる。超離散極限を取れない解もあるが、ソリトン解、分子解のクラスなら大丈夫です。

（質問）超離散化の場合保存系が前提だが、散逸系に適用した場合は上手く行っているのか?

（回答）もともと箱玉系を作った高橋先生が研究されている。見た目はうまくいっている場合も沢山あるが解析的に解けないので判定できない。

（質問）箱玉系の玉の数を増やすとどうなるか。玉の数が無限大になると左端がなくなってどこから始まるか分からないのでは？

（回答）左右をつなげて周期系にした研究があり、玉の数が箱の数の半分よりも少なければ通常の箱玉系だが、多いと玉と箱の関係が入れ替わります。しかし、それも問題ありません。

（質問）元の偏微分方程式の L2 解に相当するが、エネルギー無限大の解は?

（回答）ソリトンの場合は玉の数を有限個に限っている。

（質問）方程式の空間に群が作用していてソリトンが決まるという理解でよいか？

（回答）非線型方程式は過剰決定系で、条件のほうがパラメータの数より圧倒的に多い。そういった状況で解けるためにはある種の対称性が高いことが必要。

（質問）スケール変換によって対応関係が取れているというのは、数学的にはきれいだが生物ではスケールを変えると見えていなかったものが見えてくる。スケール変換できない方が普通なのではないか。

（回答）通常は、スケール変換で対応関係が取れることはないかも知れないが、たとえ理想的な状況でも対応が取れるような場合があれば、それを手がかりに数学の色々な道具を導入することが可能なのではないか？

（以上で辻本先生のお話を終わります。）