

交通流の確率モデルと更新ルールについて

東京大学大学院数理科学研究科 金井 政宏 (Masahiro KANAI)

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo

1 はじめに

交通流とは目的を持ったモノの流れを総称する用語で、車や人の交通に限らず生体内で物質輸送を担う微小な分子モーターからネットワーク上のパケットのような無形のものまでと極めて幅広い。そして、これら『モノ』の『目的』には単に方向だけではなく移動時間や輸送効率などの最適化、さらには衝突の回避まで含まれる。このように伝統的な物理の世界観を超えた、すなわちニュートンの運動法則から外れた行動をする粒子を『自己駆動粒子』と称し、自己駆動粒子の多体系についての新たな法則を探求することが現代の交通流研究の主流となっている [1]。交通流研究は、現象の特徴を再現するモデルの開発と得られたモデルの解析によって再帰的に進められる。すなわち、モデルは観測データの再現性によりその妥当性が検証され、モデルの解析により渋滞発生メカニズムなどシステムの特徴が抽出される。そして、得られた知見から再びモデルの改良が行われる。特に車の渋滞現象に関しては大規模な実験が困難であるためにシミュレーションによる研究が主要な役割を果たす [2, 3, 4]。

交通流のモデルは、微分方程式による連続モデルと、セルオートマトンによる離散モデルに大別される。それぞれに特長があるが、シミュレーションの容易さや様々な現実的状況に対応可能なセルオートマトンモデルは近年集中的に研究されている。今回はセルオートマトンモデルが連続モデルと一線を画すことになる更新ルールについて議論したい。特に、セルオートマトンモデル特有の更新である一斉更新 (parallel update) は交通流モデルでは最も現実に近い渋滞現象を再現するとされている。また、確率過程で標準的な更新であるランダム更新 (random sequential update) との関係について詳細な考察を行う。

2 Generalized zero-range process

ここでは、離散交通流モデルの数理的研究に関する基礎となる (Generalized) Zero-range Process について説明する.

道路は周期的であるとし、サイト数を M とし、車の台数を L とする. このとき、 $N = M - L$ は車間距離となる空いたサイトの総数を表す. そして、以下のように記号を用意する. (以下では L と N を主に用いる.)

$$[L] := \{1, 2, \dots, L\}, \quad \Omega_L := \mathbb{N}^L, \quad |\omega| = \sum_{l=1}^L \omega_l \quad (\omega = (\omega_l)_{l=1, \dots, L} \in \Omega_L) \quad (2.1)$$

ここで、 ω_l は l 番目の車の車間距離を表す.

次に配置 $\omega = (\omega_l)_{l=1, \dots, L}$ から $\omega' = (\omega'_l)_{l=1, \dots, L}$ への遷移行列を

$$T(\omega'|\omega) = \sum_{\nu \in \Omega_L} \prod_{l=1}^L \phi_l(\nu_l, \omega_l) \delta_{\omega'_l, \omega_l} \quad (2.2)$$

$$\omega'_l \equiv (\omega^\nu)_l := \omega_l - \nu_l + \nu_{l-1} \quad (2.3)$$

とする. ただし、 $\phi_l(m, n)$ は、 n の車間距離を持つ l 番目の車から、 $l+1$ 番目の車に m 個の空きサイトが移動する確率を表していて、

$$\phi_l(m, n) = 0 \quad (n < 0 \text{ or } m < 0 \text{ or } m > n), \quad \sum_{m=0}^n \phi_l(m, n) = 1 \quad (2.4)$$

を満たすものとする. 定義により $|\omega| = |\omega^\nu|$ であり、 $\prod_l \delta_{\omega'_l, \omega_l - \nu_l + \nu_{l-1}}$ は $|\omega| \neq |\omega'|$ である限り $T(\omega'|\omega) = 0$ であることを保証している. このとき、マスター方程式は

$$P(\omega'; t+1) = \sum_{\omega \in \Omega_L} T(\omega'|\omega) P(\omega; t) \quad (2.5)$$

となる. そして、定常状態に対する条件

$$P(\omega; t+1) = P(\omega; t) \quad (2.6)$$

から、我々の解くべき方程式

$$P(\omega') = \sum_{\omega} T(\omega'|\omega) P(\omega) \quad (2.7)$$

が得られる.

2.1 微小時間に起こる遷移

前節で定義した遷移確率に以下の仮定を置く.

$$\phi_l(m, n) = \delta_{m,0} + \beta_l(m, n)dt \quad (2.8)$$

$$\beta_l(m, n) = 0 \quad (m < 0, m > n) \quad (2.9)$$

β_l は微小な時間 dt の間に遷移が起こる確率を意味している. また, ϕ_l に関する条件から自動的に β_l についての条件が以下のように得られる.

$$\sum_m \phi_l(m, n) = 1 + \sum_m \beta_l(m, n)dt \quad (2.10)$$

$$\therefore \sum_m \beta_l(m, n) = 0 \quad (2.11)$$

ここで, 変数を ν から μ に変更する:

$$\delta_{\omega'_l, \omega'_l} = \delta_{\omega'_l, \omega_l - \nu_l + \nu_{l-1}} = \sum_{\mu_l \in \mathbb{N}} \delta_{\mu_l, \omega_l - \nu_l} \delta_{\omega'_l, \mu_l + \nu_{l-1}} \quad (2.12)$$

ただし, $\nu_l > \omega_l$ のとき $\phi_l(\nu_l, \omega_l) = 0$ ($\forall l$) であることに注意せよ. それ故に和の中では $0 \leq \mu_l < \infty$ と考える.

こうして, 遷移行列は以下のようになる:

$$\begin{aligned} T(\omega'|\omega; dt) &= \sum_{\nu} \left(\prod_{l=1}^L (\delta_{\nu_l, 0} + \beta_l(\nu_l, \omega_l)dt) \right) \left(\prod_l \sum_{\mu_l \in \mathbb{N}} \delta_{\mu_l, \omega_l - \nu_l} \delta_{\mu_l, \omega'_l - \nu_{l-1}} \right) \\ &= \sum_{\nu} \left(\sum_{n=0}^L dt^n \sum_{I_n \subset [L]} \prod_{l \notin I_n} \delta_{\nu_l, 0} \prod_{l \in I_n} \beta_l(\nu_l, \omega_l) \right) \sum_{\mu \in \Omega_L} \prod_l \delta_{\mu_l, \omega_l - \nu_l} \delta_{\mu_{l+1}, \omega'_{l+1} - \nu_l} \\ &= \sum_{n=0}^L dt^n \sum_{I_n \subset [L]} \sum_{\mu \in \Omega_L} \left(\prod_{l \notin I_n} \delta_{\mu_l, \omega_l} \delta_{\mu_{l+1}, \omega'_{l+1}} \right) \left(\prod_{l \in I_n} \beta_l(\omega_l - \mu_l, \omega_l) \delta_{\omega_l, (\omega')_{l+1}^\mu} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで, $\sum_{\nu} \prod_l \delta_{\mu_l, \omega_l - \nu_l} \delta_{\mu_{l+1}, \omega'_{l+1} - \nu_l} = \prod_l \delta_{\mu_{l+1}, \omega'_{l+1} - \omega_l + \mu_l} = \prod_l \delta_{\omega_l, \omega'_{l+1} - \mu_{l+1} + \mu_l}$ であることを注意せよ.

2.2 遷移行列 $T(\omega'|\omega; dt)$ に対するマスター方程式

前節で導入した微小時間に起こる遷移に対するマスター方程式を導出する。遷移行列 $T(\omega'|\omega; dt)$ を用いて、マスター方程式を書き下すと

$$\begin{aligned}
P(\omega; t + dt) &= \sum_{\omega' \in \Omega_L} T(\omega|\omega'; dt)P(\omega'; t) \\
P(\omega; t) + \frac{\partial}{\partial t}P(\omega; t)dt + \dots \\
&= \sum_{n=0}^L dt^n \sum_{I_n \subset [L]} \sum_{\mu \in \Omega_L} \sum_{\omega' \in \Omega_L} \\
&\quad \left(\prod_{l \notin I_n} \delta_{\mu_l, \omega'_l} \delta_{\mu_{l+1}, \omega_{l+1}} \right) \left(\prod_{l \in I_n} \beta_l(\omega'_l - \mu_l, \omega'_l) \delta_{\omega'_l, \omega_{l+1}^\mu} \right) P(\omega'; t) \\
&= \sum_{n=0}^L dt^n \sum_{I_n \subset [L]} \sum_{\mu} \left(\prod_{l \notin I_n} \delta_{\mu_{l+1}, \omega_{l+1}} \right) \left(\prod_{l \in I_n} \beta_l(\omega_{l+1} - \mu_{l+1}, \omega_{l+1}^\mu) \right) P((\omega; \mu)^I; t)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

となる。ただし、

$$(\omega; \mu)_l^I \equiv ((\omega; \mu)^I)_l := \begin{cases} \omega_{l+1}^\mu & (l \in I) \\ \mu_l & (l \notin I) \end{cases} \tag{2.15}$$

と定義する。

こうして、微小時間 dt の各次数 n について以下の方程式を得る：

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} P(\omega; t) = \sum_{I_n \subset [L]} \sum_{\mu} \left(\prod_{l \notin I_n} \delta_{\mu_{l+1}, \omega_{l+1}} \right) \left(\prod_{l \in I_n} \beta_l(\omega_{l+1} - \mu_{l+1}, \omega_{l+1}^\mu) \right) P((\omega; \mu)^I; t) \tag{2.16}$$

この方程式の物理的意味は、「時刻 t に同時に n 台の車を任意に選び出し、これらを同時に更新する」ということになる。

特に $n = 1$ の場合,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} P(\omega; t) \\
&= \sum_{l=1}^L \sum_{\mu} \left(\prod_{j \neq l} \delta_{\mu_{j+1}, \omega_{j+1}} \right) \beta_l(\omega_{l+1} - \mu_{l+1}, \omega_{l+1}^{\mu}) P((\dots, \mu_{l-1}, \omega_{l+1}^{\mu}, \mu_{l+1}, \dots); t) \\
&= \sum_{l=1}^L \sum_{\mu_{l+1}=0}^{\omega_{l+1}} \beta_l(\omega_{l+1} - \mu_{l+1}, \omega_{l+1} - \mu_{l+1} + \omega_l) \\
&\quad P((\dots, \omega_{l-1}, \omega_{l+1} - \mu_{l+1} + \omega_l, \mu_{l+1}, \omega_{l+2}, \dots); t) \\
&= \sum_{l=1}^L \left[\sum_{\mu_{l+1}=0}^{\omega_{l+1}-1} \beta_l(\omega_{l+1} - \mu_{l+1}, \omega_{l+1} - \mu_{l+1} + \omega_l) \right. \\
&\quad \left. \times P((\dots, \omega_{l+1} - \mu_{l+1} + \omega_l, \mu_{l+1}, \dots); t) + \beta_l(0, \omega_l) P(\omega; t) \right] \\
&= \sum_{l=1}^L \left[\sum_{m=1}^{\omega_{l+1}} \beta_l(m, \omega_l + m) P((\dots, \omega_l + m, \omega_{l+1} - m, \dots); t) \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_{m=1}^{\omega_l} \beta_l(m, \omega_l) \right) P(\omega; t) \right] \\
&= \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\omega_l} \left[\beta_{l-1}(m, \omega_{l-1} + m) P((\dots, \omega_{l-1} + m, \omega_l - m, \dots); t) \right. \\
&\quad \left. - \beta_l(m, \omega_l) P(\omega; t) \right] \tag{2.17}
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\sum_{m=0}^n \beta_l(m, n) = \beta_l(0, n) + \sum_{m=1}^n \beta_l(m, n) = 0$ であることに注意。この式は微小時間 dt の間に一つのサイトが無作為に選ばれ（これを l とする）、サイト l の全粒子 ω_l 個の中から隣のサイト $l+1 \sim m$ 個の粒子が確率 $\beta_l(m, \omega_l)$ で移動するモデルのマスター方程式になっている。

3 Exact Solution of the Generalized Zero-range Process

Generalized zero-range process については、一斉更新およびランダム更新について厳密解が知られている。以下に、Evans による方法を紹介する [5]。

まず、遷移確率 $\phi_l(m, n)$ に対して以下の仮定を置く：すなわち、 $\phi_l(m, n)$ は未知関数

v, w_l (w_l はサイト l に依存してよいが, v はサイトに依らず同一のものを取る) により

$$\phi_l(m, n) = \frac{v(m)w_l(n-m)}{f_l(n)} \quad (3.18)$$

と表される. ただし, f_l は

$$f_l(n) := [v * w_l](n) = \sum_{m=0}^n v(m)w_l(n-m) \quad (3.19)$$

により定義されるものとする. このとき, 定常状態は

$$P(\omega) = \frac{\prod_{l=1}^L f_l(\omega_l)}{Z_{LN}} \delta_{|\omega|, N} \quad (\omega \in \Omega_L) \quad (3.20)$$

$$Z_{LN} := \sum_{\omega \in \Omega_L} \left(\prod_l f_l(\omega_l) \right) \delta_{|\omega|, N} \quad (3.21)$$

と得られる. これを以下で示す.

実際, 我々は以下のように直接に確認することが出来る:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} T(\omega'|\omega)P(\omega) &= \sum_{\omega} \left(\sum_{\nu} \prod_l \frac{v(\nu_l)w_l(\omega_l - \nu_l)}{f_l(\omega_l)} \delta_{\omega'_l, \omega_l - \nu_l} \right) \frac{\prod_l f_l(\omega_l)}{Z_{LN}} \delta_{|\omega|, N} \\ &= \frac{1}{Z_{LN}} \sum_{\nu} \left(\prod_l v(\nu_l) \right) \sum_{\omega} \left(\prod_l w_l(\omega_l - \nu_l) \delta_{\omega'_l, \omega_l - \nu_l} \right) \delta_{|\omega|, N} \\ &= \frac{1}{Z_{LN}} \sum_{\nu} \left(\prod_l v(\nu_{l-1}) \right) \left(\prod_l w_l(\omega'_l - \nu_{l-1}) \right) \delta_{|\omega'|, N} \\ &= \frac{1}{Z_{LN}} \left(\prod_l \sum_{\nu_{l-1}} v(\nu_{l-1}) w_l(\omega'_l - \nu_{l-1}) \right) \delta_{|\omega'|, N} \\ &= \frac{\prod_l f_l(\omega'_l)}{Z_{LN}} \delta_{|\omega'|, N} = P(\omega') \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.1 Single-Site Weight $f_l(n)$

ここで, 我々は厳密解に登場した $f_l(n)$ が遷移確率 $\phi_l(m, n)$ により表されることを見る.

まず, 定義により

$$f_l(n)\phi_l(m, n) = v(m)w_l(n-m) \quad (3.23)$$

である. よって, n を 1 ずらして両辺で比を取ると

$$\frac{f_l(n+1)\phi_l(m, n+1)}{f_l(n)\phi_l(m, n)} = \frac{w_l(n+1-m)}{w_l(n-m)} \quad (3.24)$$

となる。さらに、ここで n を $n+1$ に、 m を $m+1$ に置き換えても右辺が変化しないことに注意すれば、

$$\frac{f_l(n+1)\phi_l(m, n+1)}{f_l(n)\phi_l(m, n)} = \frac{f_l(n+2)\phi_l(m+1, n+2)}{f_l(n+1)\phi_l(m+1, n+1)} \quad (3.25)$$

が得られる。こうして未知関数は全て消去され、

$$\frac{f_l(n+1)^2}{f_l(n)f_l(n+2)} = \frac{\phi_l(m, n)\phi_l(m+1, n+2)}{\phi_l(m, n+1)\phi_l(m+1, n+1)} \quad (3.26)$$

となる。この式で、左辺は m を含まない形であるから特に $m=0$ として

$$R_l(n) := \frac{f_l(n+1)^2}{f_l(n)f_l(n+2)} = \frac{\phi_l(0, n)\phi_l(1, n+2)}{\phi_l(0, n+1)\phi_l(1, n+1)} \quad (3.27)$$

と置く。従って、 $f_l(n)$ に関する 2 階の漸化式が一度解かれ、

$$\frac{f_l(n+2)}{f_l(n+1)} = \frac{1}{R_l(n)} \frac{f_l(n+1)}{f_l(n)} = \dots = \frac{f_l(1)}{f_l(0)} \prod_{j=0}^n \frac{1}{R_l(j)} \quad (3.28)$$

となる。ここで、 $\phi(0, 0) = 1$ に注意せよ。今度は $R_l(n)$ に関する積を計算して

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n \frac{1}{R_l(j)} &= \frac{\phi_l(0, 1)\phi_l(1, 1)}{\phi_l(0, 0)\phi_l(1, 2)} \frac{\phi_l(0, 2)\phi_l(1, 2)}{\phi_l(0, 1)\phi_l(1, 3)} \dots \frac{\phi_l(0, n+1)\phi_l(1, n+1)}{\phi_l(0, n)\phi_l(1, n+2)} \\ &= \frac{\phi_l(0, n+1)\phi_l(1, 1)}{\phi_l(0, 0)\phi_l(1, n+2)} = \frac{\phi_l(0, n+1)\phi_l(1, 1)}{\phi_l(1, n+2)} \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (3.29)$$

を得る。従って、 $f_l(n)$ に関する 1 階の漸化式

$$\frac{f_l(n)}{f_l(n-1)} = \frac{f_l(1)\phi_l(1, 1)}{f_l(0)\phi_l(1, n)} \quad (n \geq 1) \quad (3.30)$$

を解けばよいことになる。それは以下のように実行されて

$$\begin{aligned} \frac{f_l(n)}{f_l(0)} &= \prod_{j=1}^n \frac{f_l(j)}{f_l(j-1)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_l(1)\phi_l(1, 1)}{f_l(0)} \frac{\phi_l(0, j-1)}{\phi_l(1, j)} \right) \\ &= \left(\frac{f_l(1)\phi_l(1, 1)}{f_l(0)} \right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\phi_l(0, j-1)}{\phi_l(1, j)} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

最終的に

$$f_l(n) = f_l(0) \left(\frac{f_l(1)\phi_l(1, 1)}{f_l(0)} \right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\phi_l(0, j-1)}{\phi_l(1, j)} \quad (3.32)$$

が得られる。(Evans [5] はここまで式を簡素化していない。)

3.2 ランダム更新の場合

遷移確率に対し，マスター方程式の場合と同様に以下の仮定を置く：

$$\phi_l(m, n) = \delta_{m,0} + \beta_l(m, n)dt \quad (3.33)$$

$$\beta_l(m, n) = 0 \quad (m < 0, m > n) \quad (3.34)$$

一方で，一斉更新の場合の厳密解のときの仮定

$$\phi_l(m, n) = \frac{v(m)w_l(n-m)}{f_l(n)} \quad (3.35)$$

$$f_l(n) := [v * w_l](n) \quad (3.36)$$

に以下の条件を付加する：

$$v(\nu) := \delta_{\nu,0} + x(\nu)dt \quad (3.37)$$

ただし， x は未知関数である．この仮定により

$$\begin{aligned} f_l(n) &= \sum_{\nu=0}^n (\delta_{\nu,0} + x(\nu)dt)w_l(n-\nu) \\ &= w_l(n) + [x * w_l](n)dt \end{aligned} \quad (3.38)$$

これを用いると

$$\begin{aligned} \phi_l(m, n) &= \frac{(\delta_{m,0} + x(m)dt)w_l(n-m)}{w_l(n) + [x * w_l](n)dt} \\ &= \delta_{m,0} \left(1 - \frac{[x * w_l](n)}{w_l(n)}dt \right) + \frac{x(m)w_l(n-m)}{w_l(n)}dt + O(dt^2) \end{aligned} \quad (3.39)$$

特に，

$$\gamma_l(m, n) := \frac{x(m)w_l(n-m)}{w_l(n)} \quad (3.40)$$

$$\sigma_l(n) := \sum_{m=1}^n \gamma_l(m, n) \quad (3.41)$$

$$\tilde{\sigma}_l(n) := \sum_{m=0}^n \gamma_l(m, n) = x(0) + \sigma_l(n) \quad (3.42)$$

と置けば,

$$\begin{aligned}
\phi_l(m, n) &= \delta_{m,0}(1 - \sigma_l(n)dt) + (1 - \delta_{m,0})\gamma_l(m, n)dt \\
&= \delta_{m,0} + [-\delta_{m,0}\sigma_l(n) + (1 - \delta_{m,0})\gamma_l(m, n)]dt \\
&= \delta_{m,0} + [\gamma_l(m, n) - \delta_{m,0}(\sigma_l(n) + \gamma_l(m, n))]dt \\
&= \delta_{m,0} + [\gamma_l(m, n) - \delta_{m,0}\tilde{\sigma}_l(n)]dt \\
&= \delta_{m,0} + \beta_l(m, n)dt
\end{aligned} \tag{3.43}$$

より

$$\beta_l(m, n) = \gamma_l(m, n) - \delta_{m,0}\tilde{\sigma}_l(n) \tag{3.44}$$

を得る. 逆に, この条件が満たされれば一斉更新の厳密解から極限操作 $dt \rightarrow 0$ によりランダム更新の厳密解が得られる.

ランダム更新のマスター方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} P(\omega; t) \\
&= \sum_{l=1}^L \left[\sum_{m=1}^N \gamma_l(m, \omega_l + m) P(\{\dots, \omega_l + m, \omega_{l+1} - m, \dots\}; t) - \sum_{m=1}^N \gamma_l(m, \omega_l) P(\omega; t) \right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

となる. そして, (定常状態の) 厳密解は

$$\begin{aligned}
f_l(n) &= f_l(0) \left(\frac{f_l(1)\phi_l(1, 1)}{f_l(0)} \right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\phi_l(0, j-1)}{\phi_l(1, j)} \\
&= f_l(0) \left(\frac{f_l(1)\gamma_l(1, 1)dt}{f_l(0)} \right)^n \prod_{j=1}^n \frac{1 - \sigma_l(j-1)dt}{\gamma_l(1, j)dt} \\
&\downarrow \quad (dt \rightarrow 0) \\
w_l(n) &= w_l(0) \left(\frac{w_l(1)\gamma_l(1, 1)}{w_l(0)} \right)^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_l(1, j)}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

であることを用いて

$$P(\omega) = \frac{\prod_{l=1}^L w_l(\omega_l)}{Z_{LN}} \delta_{|\omega|, N} \tag{3.47}$$

$$Z_{LN} := \sum_{\omega \in \Omega_L} \left(\prod_l w_l(\omega_l) \right) \delta_{|\omega|, N} \tag{3.48}$$

と得られる.

4 まとめと展望

本研究で、我々は generalized zero-range process について一般化されたマスター方程式を提案した。このダイナミクスは、微小時間 dt の間に n 個のサイトが無作為に選ばれ、それらのサイトが一斉に更新されるものと考えられる。特に $n = 1$ の場合にはランダム更新に一致し、また $n = N$ の場合には一斉更新に一致する。従って、今回提案された更新ルールはランダムおよび一斉更新を一般化したものと考えられるので、 n ランダム更新 (n -random updating) と命名する。現在までに、ランダム更新と一斉更新の場合にはそれぞれで厳密解が得られているが、一般の n ランダム更新に対する厳密解は得られておらず、今後の研究課題となる。

参考文献

- [1] 西成活裕, 渋滞学, 新潮選書 (2006).
- [2] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider, Phys. Rep. **329**, 199 (2000).
- [3] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067 (2001).
- [4] T. Nagatani, Rep. Prog. Phys. **65**, 1331 (2002).
- [5] M. R. Evans and T. Hanney, J. Phys. **A38**, R195 (2005).