

## KPII 方程式のソリトン解とその応用

及川 正行 (Masayuki OIKAWA), 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)  
九大・応力研 (Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.)

児玉 裕治 (Yuji KODAMA)  
Department of Mathematics, Ohio State University

丸野 健一 (Ken-ichi MARUNO)  
Department of Mathematics, The University of Texas-Pan American

### 概 要

ここ数年, KPII 方程式のソリトン解の分類や理解が進んだ. 本稿では, それらの最近の進展を簡単に概観するとともに, それらの応用を二つ述べる. 一つは半無限の二つのソリトンからなる V 字型初期値に対する漸近解の問題であり, 他の一つはソリトンの相互作用による時空間的に局在した大振幅波の生成の問題である.

## 1 KPII 方程式

Kadomtsev-Petviashvili II(KPII) 方程式 [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

は負分散媒質中の弱二次元的な有限小振幅の長波の挙動を近似的に記述する. 負分散媒質とは波の位相スピードが波数の減少関数であるような媒質であり, “弱二次元的”とは波がほとんど  $x$  方向に伝わり,  $x$  方向の代表的な変化のスケールに比べて  $y$  方向の代表的な変化のスケールがずっと大きいということを意味する.  $y$  依存性がなければ, KPII 方程式は KdV 方程式に帰着する. 従って, KPII 方程式は KdV 方程式の弱二次元的拡張であり, KdV 方程式と同様に普遍的な方程式であるが, そればかりでなく空間二次元的な代表的な可積分系でもある [2, 3]. 具体的には, KPII 方程式は浅水表面重力波, 浅水内部重力波, イオン音波などを記述する [4].

KPII 方程式は,  $x$  の 4 階微分の項と  $y$  の 2 階微分の項の係数の符号が同じならば, 係数は 0 以外の任意の数で置き換えても本質的に変わらない. 上記の係数が便利なので, ここではこの形を用いる. それら二つの項の符号が異なるのは正分散媒質の場合で KPI 方程式と呼ばれ, その性質は KPII とは全く異なることを注意しておく.

## 2 ソリトン解

変換

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau(x, y, t) \quad (2)$$

によって,  $\tau$  関数  $\tau(x, y, t)$  を導入すると,  $\tau$  関数が

$$4\left(\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial t}\right) + \tau \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial^3 \tau}{\partial x^3} + 3\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\right)^2 + 3\left(\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2\right) = 0 \quad (3)$$

を満たすとき,  $u(x, y, t)$  は KPII 方程式 (1) の解であることがわかる.

次のことが知られている [5, 6].

関数  $f_i(x, y, t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) が線形方程式系

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (4)$$

を満たすとき, 次のロンスキー行列式で与えられる  $\tau$  関数から作られる (2) の  $u(x, y, t)$  は KPII 方程式 (1) の解である:

$$\begin{aligned} \tau(x, y, t) &= \text{Wr}(f_1, f_2, \dots, f_N) \\ &:= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_N \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \dots & f_N^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & f_2^{(N-1)} & \dots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_1^{(1)} & \dots & f_1^{(N-1)} \\ f_2 & f_2^{(1)} & \dots & f_2^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_N & f_N^{(1)} & \dots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

ただし,  $f_i^{(j)} = \frac{\partial^j f_i}{\partial x^j}$  である.

線形方程式系 (4) を満たす簡単な例として,  $k_j$  を定数として

$$E_j := e^{\theta_j}, \quad \theta_j := k_j x + k_j^2 y - k_j^3 t \quad (6)$$

がある. これらの一次結合

$$f_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} E_j, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (7)$$

も (4) の解である. 従って, これらと (5), (2) を通じて得られる  $u(x, y, t)$  は KPII 方程式 (1) の解を与える. 最近, この解の性質の解明と分類が児玉らによってなされた [7, 8, 9, 10, 11, 12]. 以下に, その結果を簡単にまとめておく. それらの証明については上記の文献を参照されたい. とくに, [12] は KPII 方程式の解の分類に関する最近の発展を初学者にも分かり易くまとめたもので, 参考になるであろう.

まず, パラメーター  $k_j$  の大きさの順序を次のように仮定する:

$$k_1 < k_2 < \dots < k_M. \quad (8)$$

また, (7) における係数  $a_{ij}$  のつくる行列を  $A$  とする. (7) の  $f_i$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) が一次独立であるためには,  $\text{rank} A = N$  であり, 従って,  $M \geq N$  であるが,  $M = N$  ならば,  $\tau(x, y, t)$  は

$e^{\theta_1+\dots+\theta_N}$  の定数倍となるので,  $u = 0$  となる. 従って, 以下では  $M > N$  とする.  $f_i$  が (7) で与えられるとき,  $\tau$  関数は

$$\tau = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & k_1 E_1 & \cdots & k_1^{N-1} E_1 \\ E_2 & k_2 E_2 & \cdots & k_2^{N-1} E_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_M & k_M E_M & \cdots & k_M^{N-1} E_M \end{pmatrix} \right| \quad (9)$$

となるが, 行列式に関する Binet-Cauchy の定理 [13, 14] により

$$\tau = \sum_{m_1 < m_2 < \cdots < m_N} A(m_1, \dots, m_N) V(m_1, \dots, m_N) \exp(\theta_{m_1, \dots, m_N}) \quad (10)$$

を得る. ここで, 和は  $M$  個の数  $\{1, 2, \dots, M\}$  の中から選んだ  $N$  個の数の可能な異なる組み合わせ  $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$  のすべてにわたる. また,  $A(m_1, \dots, m_N)$  は  $A$  の第  $m_1$  列, 第  $m_2$  列,  $\dots$ , 第  $m_N$  列からなる小行列式であり,  $V(m_1, \dots, m_N)$  は Vandermonde の行列式

$$V(m_1, \dots, m_N) = \begin{vmatrix} 1 & k_{m_1} & \cdots & k_{m_1}^{N-1} \\ 1 & k_{m_2} & \cdots & k_{m_2}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_{m_N} & \cdots & k_{m_N}^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq r < s \leq N} (k_{m_s} - k_{m_r}), \quad (11)$$

$$\theta_{m_1, \dots, m_N}(x, y, t) = \theta_{m_1}(x, y, t) + \cdots + \theta_{m_N}(x, y, t) \quad (12)$$

である.  $V(m_1, \dots, m_N)$  および指数関数は正であるから, すべての  $A(m_1, \dots, m_N)$  が非負ならば,  $\tau(x, y, t)$  は正定値であり,  $u(x, y, t)$  は regular である. このように,  $N \times M$  行列  $A$  のすべての可能な  $N$  次小行列式が非負であるとき,  $A$  は totally nonnegative と言われる.

$C$  を正則な  $N$  次の定数行列とするとき, 係数行列  $A$  を  $CA$  で置き換えても  $\tau(x, y, t)$  は  $\det(C)$  倍されるだけなので,  $u(x, y, t)$  は不変である. 従って, 解を分類するときの行列  $A$  の代表としては  $A$  の row reduced echelon form (RREF) を使えばよい. 次の RREF で表された  $A$  は  $N = 3, M = 6$  のときの一例である:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}. \quad (13)$$

一般に零でない要素は \* で示されている. 各行の最初の非零要素 1 はピボットと呼ばれる. ピボットを含む列を“ピボット列”と, ピボットを含まない列を“非ピボット列”と呼ぼう. この例では, 第 1, 2, 5 列がピボット列, 第 3, 4, 6 列が非ピボット列である. ピボット列のピボット以外の要素はすべて 0 である.  $\text{rank}(A) = N$  であるから,  $A$  の RREF は  $N$  個のピボットを含むことに注意しよう.

$A$  の RREF が各列に少なくとも一つの非零要素を含みかつ各行がピボット以外に少なくとも一つの非零要素を含むとき  $A$  は irreducible であると言われる. もし, ある列のすべての要素が 0 ならば, その列を除いた  $N \times (M - 1)$  行列を考えればよいし, ある行の非零要素がピボットだけならば, (10) のすべての項がそのピボット列 ( $m_j$  とする) に対応する  $e^{\theta_{m_j}}$  を含むことになるが, この項の寄与は  $u(x, y, t)$  には現れないから, この場合,  $A$  が  $(N - 1) \times (M - 1)$  の場合を考えれば

よい. いずれにしても  $A$  が irreducible でないときには, もっとサイズの小さい  $A$  の場合に帰着するので, 以下では,  $A$  は irreducible とする.

最も簡単な  $N = 1, M = 2$  の場合を見ておこう.  $A = (1 \ a), a > 0$  とすると,

$$\tau = f_1 = e^{\theta_i} + ae^{\theta_j}, \quad k_i < k_j. \quad (14)$$

$e^{\theta_i}$  と  $e^{\theta_j}$  のどちらかが卓越する ( $t$  を固定して考えると)  $xy$  平面の領域では (14) は二つの項のどちらかで近似でき, その場合  $u(x, y, t) \simeq 0$  である. 二つの項が釣り合う線

$$\theta_i = \theta_j + \theta_{j0}, \quad \theta_{j0} = \log a \quad (15)$$

に沿って線ソリトン (line soliton)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}(\theta_j - \theta_i + \theta_{j0}), \quad (16)$$

が存在する. これは  $[i, j]$ -ソリトンと呼ばれている.

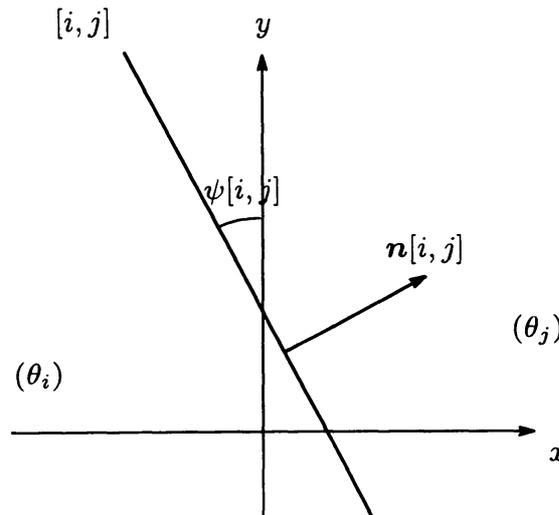


図1  $[i, j]$ -ソリトン

$$\theta_j - \theta_i + \theta_{j0} = (k_j - k_i)x + (k_j^2 - k_i^2)y - (k_j^3 - k_i^3)t + \theta_{j0} \quad (17)$$

であるから, このソリトンの振幅を  $\alpha[i, j]$ , 伝播方向  $\mathbf{n}[i, j]$  の傾きを  $\gamma[i, j]$  とすれば

$$\alpha[i, j] = \frac{1}{2}(k_j - k_i)^2, \quad \gamma[i, j] = k_i + k_j = \tan \psi[i, j] \quad (18)$$

である. ここで,  $-\pi/2 < \psi[i, j] < \pi/2$  は  $y$  軸の正方向と線ソリトンのなす角を反時計回りを正として測ったものである. また, 図1の  $(\theta_j)$  や  $(\theta_i)$  は  $\tau$  関数において  $e^{\theta_j}$  の項あるいは  $e^{\theta_i}$  の項が卓越することを示しており,  $[i, j]$ -ソリトンを横切ると卓越する項が  $i \leftrightarrow j$  のように入れ替わるという性質をもつ.

さて,  $A$  が irreducible かつ totally nonnegative であるとき, (10) が (2) を通じて生成する KP II 方程式 (1) の解に関する一般的な結果を述べよう.

- (i)  $u(x, y, t)$  は  $y \rightarrow \infty$  においては  $N$  個の線ソリトンから成り,  $y \rightarrow -\infty$  においては  $M - N$  個の線ソリトンから成る. このようなソリトン解は  $(M - N, N)$ -ソリトンと呼ばれる.
- (ii) ソリトン解の中に  $[i, j]$ -ソリトンが存在するとき, その  $[i, j]$ -ソリトンを横切ると, (10) において卓越する項の指数関数における指標が  $i \leftrightarrow j$  のように入れ替わり,  $i, j$  以外の指標はそのままである.
- (iii) 行列  $A$  を RREF に帰着させたとき,  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  がピボット列の番号で,  $\{g_1, g_2, \dots, g_{M-N}\}$  が非ピボット列の番号であるならば,  $y \rightarrow \infty$  における線ソリトンは  $[e_n, j_n]$ -ソリトン ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) であり,  $y \rightarrow -\infty$  における線ソリトンは  $[i_m, g_m]$ -ソリトン ( $m = 1, 2, \dots, M - N$ ) である.
- (iv) 上記 (iii) の事実に基づいて, 写像  $\pi$  を

$$\begin{cases} \pi(e_n) = j_n, & n = 1, 2, \dots, N \\ \pi(g_m) = i_m, & m = 1, 2, \dots, M - N \end{cases} \quad (19)$$

によって定義すると, これは  $\{1, 2, \dots, M\}$  の置換である, つまり,  $j_1, \dots, j_N, i_1, \dots, i_{M-N}$  はすべて異なることが示された.  $e_n < j_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ),  $i_m < g_m$  ( $m = 1, \dots, M - N$ ) なので, この置換は不動点をもたない (それは derangement と呼ばれる).

さらに, この置換はコード図 (chord diagram) と呼ばれる図形で表現される [11, 12]. 図 2 は置換  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  に対応するコード図で, 1, 2, 3 という番号はパラメー

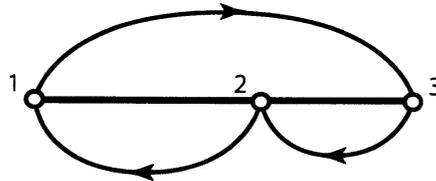


図 2 (2,1)-ソリトンの chord 図

ター  $k_1, k_2, k_3$  に対応する. 上側のコードは  $y \rightarrow \infty$  では  $[1, 3]$ -ソリトンが現れるを示し,  $\pi(1) = 3$  に対応する. また, 下側のコードは  $y \rightarrow -\infty$  では  $[1, 2]$  および  $[2, 3]$ -ソリトンが現れるを示し, それぞれ  $\pi(2) = 1, \pi(3) = 2$  に対応する. コード図は置換, すなわち, ソリトン解に対応するだけでなく,  $k_1, k_2, \dots, k_M$  の相対的な位置を正確に書けば, 現れるソリトンの振幅の相対的な大きさや, ソリトンの傾きの相対的な関係をも示しており, ソリトン解を解析する上で非常に有効である.

因みに, 図 2 のコード図で表される (2,1)-ソリトン解に対する  $A$  の RREF および  $\tau$  関数は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (20)$$

$$\tau = e^{\theta_1} + ae^{\theta_2} + be^{\theta_3}, \quad (k_1 < k_2 < k_3) \quad (21)$$

であって, 図 3 はそのソリトン解の鳥瞰図 (左図) と等高線図 (右図) である. この解は一定方向に定常的に伝播する. パターンが図のようになることは, 漸近解析を行えばよいが, 一般的な性質を使えば, 容易に推定できる.  $\tau$  関数において,  $x \rightarrow \infty$  では  $e^{\theta_3}$  の項が,  $x \rightarrow -\infty$  では  $e^{\theta_1}$  の項

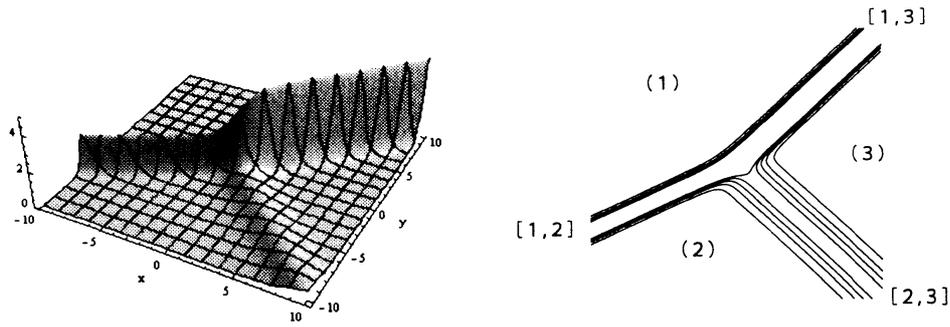


図3 (2,1)-ソリトンの鳥瞰図(左)と等高線図(右).  $t = 0$ ,  $(k_1, k_2, k_3) = (-2, 0, 1)$ ,  $a = b = 1$ . 右図で,  $[i, j]$  は  $[i, j]$ -ソリトンを表し,  $(j)$  は  $\tau$  関数において  $e^{\theta_j}$  の項が卓越する領域であることを表す.

が卓越することは明らかである. 可能なソリトンは  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[1, 3]$ -ソリトンである. これらのソリトンの傾きと上記の一般的性質(ii)を考慮すれば, 図3のようなパターンが推定できる.

$[i, j]$ -ソリトン解(16)を

$$u(x, y, t) = \alpha[i, j] \operatorname{sech}^2(K[i, j]x + L[i, j]y - \Omega[i, j]t + \theta^{(0)}), \quad (22)$$

ただし  $\alpha[i, j]$ ,  $K[i, j]$ ,  $L[i, j]$ ,  $\Omega[i, j]$ ,  $\theta^{(0)}$  は定数という形に書くと

$$K[i, j] = \frac{1}{2}(k_j - k_i), \quad L[i, j] = \frac{1}{2}(k_j^2 - k_i^2), \quad \Omega[i, j] = \frac{1}{2}(k_j^3 - k_i^3) \quad (23)$$

であるから,

$$K[1, 2] + K[2, 3] = K[1, 3], \quad L[1, 2] + L[2, 3] = L[1, 3], \quad \Omega[1, 2] + \Omega[2, 3] = \Omega[1, 3] \quad (24)$$

が成り立つ. すなわち, この(2,1)-ソリトン解においては3個のソリトン  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[1, 3]$  はソリトン共鳴[15]の状態にある.

$N = 2, M = 4$  の場合は簡単であり, かつ, 基本的である. この場合の  $\tau$  関数は

$$\tau = \sum_{1 \leq r < s \leq 4} (k_s - k_r) A(r, s) \exp(\theta_r + \theta_s) \quad (25)$$

となる. ここで,  $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ ,  $2 \times 4$  行列  $A$  は totally nonnegative かつ irreducible で,  $A(r, s)$  は  $A$  の第  $r$  列と第  $s$  列からなる  $2 \times 2$  小行列式である. このとき,  $u(x, y, t)$  は regular な (2,2)-ソリトン解を表す. (2,2)-ソリトン解には図4に示されたコード図に対応する7つの異なるタイプがある[11, 12]. 図4の(3412)等は置換  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  等を意味する. 対応する  $A$  の RREF はそれぞれ

$$\begin{aligned} A_{(3412)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}, \\ A_{(4312)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & -c \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{(3421)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}, \\ A_{(2413)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}, \quad A_{(3142)} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \\ A_{(4321)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{(2143)} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

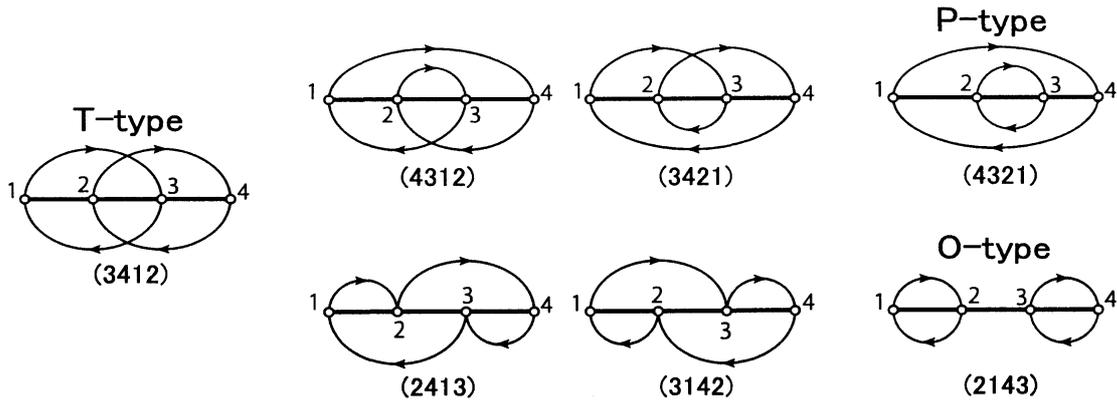


図4 7個の(2,2)-ソリトンのタイプに対応するコード図

である [11, 12]. ただし,  $a, b, c, d$  は正数であつて,  $A_{(3412)}$  においては  $ad - bc > 0$ ,  $A_{(2413)}$  においては  $ad - bc = 0$  である. (3412) 型は T-type, (4321) 型は P-type, (2143) 型は O-type と呼ばれる. T-type(2,2)-ソリトン解は,  $\tau$  関数が 6 個の指数関数項からなり, 非定常解である. また, O-type, P-type(2,2)-ソリトン解は,  $\tau$  関数が 4 個の指数関数項からなり, (適当な並進座標系において) 定常解である. それら以外の 4 個の (2,2)-ソリトン解は,  $\tau$  関数が 5 個の指数関数項からなり, 非定常解である.

O-type(2,2)-ソリトン解および P-type(2,2)-ソリトン解は従来の 2-ソリトン解であり, それら以外の非定常解は最近になって認識されたのである.

### 3 V字型初期値問題の解の漸近形

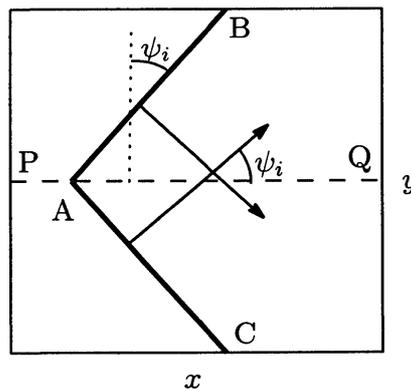


図5 V字型初期値の平面模式図. AB, AC が初期に対称に配置された振幅の等しいソリトン.

辻と及川は浅水波における孤立波の斜め反射に関する“入射角がある値より大きいと等角反射が起こり, 小さいと Mach 反射が起こるといふ”Miles の理論 [15, 16] に触発されて, 最近, 内部波やプラズマ中のイオン音波において現れる KP 方程式と類似のいくつかの方程式に対して孤立波の斜め反射を数値的に調べてきた [17, 18, 19, 20]. その場合に数値計算で用いた初期値は図5のように二つの振幅の等しい孤立波を AC, AB のように  $x$  軸に対称に V 字型に配置したものである. さらに, これらの孤立波が半無限で, 定常的に伝播することを模擬するような計算法を採用した.

粘性散逸などが無視できる場合、この計算は  $x$  軸に沿っておかれた剛体壁に孤立波 AB が斜めに入射する場合の反射問題に対する計算と同等である。

さて、KPII 方程式で図 5 のような初期値を与えたときに  $t \rightarrow \infty$  における解の漸近形はどうなるであろうか。KdV 方程式の場合には、局在した初期値が与えられたとき、対応する Schrödinger 作用素の固有値問題を解いて離散固有値を求めれば、それらに対応するソリトンが発生することがわかるわけであるが、KPII 方程式の場合、Lax pair は知られていても、初期値から解の挙動を予測することは今のところできない。空間二次元においてもソリトン解は解の一般的挙動において何らかの特別な役割を果たすのかどうかは興味深い問題である。

KPII 方程式に対する初期値を次のように与えよう。

$$u(x, y, 0) = 2 \operatorname{sech}^2(x - \gamma|y|). \quad (26)$$

ここで、振幅は 2 に固定した。このように振幅を固定しても一般性は失われないことに注意しよう。  $\gamma$  はソリトンの傾きを定めるパラメーターである。

Miles の理論や数値計算の経験から、ある臨界角  $\gamma_c$  を境に  $\gamma > \gamma_c$  では、O-type 2-ソリトン解、  $\gamma < \gamma_c$  では、(3142)-type(2,2)-ソリトン解が漸近解として現れることが予測される。(3142)-type(2,2)-ソリトン解は、Miles がソリトン共鳴解を利用して説明した Mach 反射の性質を備えているからである [15, 12]。(26) のような初期値が与えられると、パラメーター  $k_1, \dots, k_4$  が O-type あるいは (3142)-type に応じて計算できる (次の計算では与えられたソリトンの振幅は一般的に  $\alpha$  としておく) :

- O-type の場合 :  $\alpha[1, 2] = (k_2 - k_1)^2/2 = \alpha$ ,  $\alpha[3, 4] = (k_4 - k_3)^2/2 = \alpha$ ,  
 $\gamma[1, 2] = k_1 + k_2 = -\gamma$ ,  $\gamma[3, 4] = k_3 + k_4 = \gamma$  から

$$k_1 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_2 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_3 = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_4 = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \quad (27)$$

- (3142)-type の場合 :  $\alpha[1, 3] = (k_3 - k_1)^2/2 = \alpha$ ,  $\alpha[2, 4] = (k_4 - k_2)^2/2 = \alpha$ ,  
 $\gamma[1, 3] = k_1 + k_3 = -\gamma$ ,  $\gamma[2, 4] = k_2 + k_4 = \gamma$  から

$$k_1 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_2 = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_3 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad k_4 = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \quad (28)$$

(27) において、  $k_2 < k_3$  の条件が満たされるためには、  $\gamma > \sqrt{2\alpha}$  が、また、(28) において、  $k_2 < k_3$  の条件が満たされるためには、  $\gamma < \sqrt{2\alpha}$  が成り立たなければならない。この境目  $\gamma_c = \sqrt{2\alpha}$  が臨界値である。Miles[16] は、  $\gamma > \gamma_c$  では regular である O-type 2-ソリトン解が  $\gamma < \gamma_c$  では singular になることを示した。その O-type 2-ソリトン解が singular になるパラメーター領域で (3142)-type の解が存在するのである。  $\alpha = 2$  のときには、  $\gamma_c = 2$  である。

$A_{(3142)}$  を用いれば、(3142)-type(2,2)-ソリトン解の  $\tau$  関数は

$$\begin{aligned} \tau = & (k_3 - k_1)e^{\theta_1 + \theta_3} + (k_4 - k_1)be^{\theta_1 + \theta_4} \\ & + (k_3 - k_2)ae^{\theta_2 + \theta_3} + (k_4 - k_2)abe^{\theta_2 + \theta_4} + (k_4 - k_3)ce^{\theta_3 + \theta_4} \end{aligned} \quad (29)$$

で与えられることがわかる。  $a, b, c$  は正数である。この式で  $c = 0$  と置けば、O-type 2-ソリトン解の  $\tau$  関数が得られる。  $k_1, \dots, k_4$  の値を  $\alpha = 2$  とした (27) あるいは (28) で与えれば、O-type あるいは (3142)-type の解析解が計算できる。

図6は  $\gamma = 2.1 > 2$  の場合の初期値問題の数値解と初期値から決めた  $k_1, \dots, k_4$  を持つ O-type 2-ソリトン解のパターンの比較である。ただし、解析解においては  $t = 0$  において右側の2つの半無限のソリトンが原点で出会うように  $a = 41/21, b = 1/21$  と定めた。両者のパターンは  $t = 15$

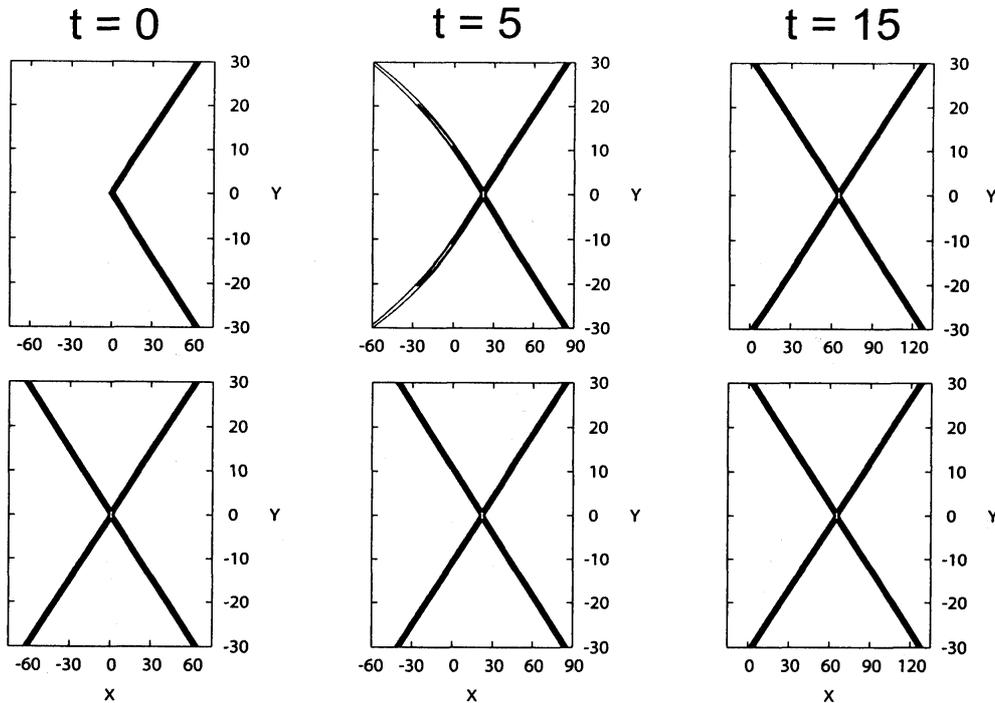


図6 V字型初期値 ( $\alpha = 2, \gamma = 2.1$ ) からの数値解と O-type 2-ソリトン解の比較.  $t = 0, 5, 15$ . それぞれ上側が数値解, 下側が解析解. 解析解において  $a = 41/21, b = 1/21$ .

では非常によく一致している。斜め反射の言葉で言えば、等角反射が起こっている。十分時間が経過した後、数値解においても反射波は入射波と同じ振幅と波形をもつ。また、十分時間が経過した後の phase shift や振幅の最大値（それは相互作用の中心で起こる）も数値計算と解析解でよく一致する [21]。  $\gamma > \gamma_c = 2$  の場合の phase shift は反射波が  $x$  方向にずれる向きで、ずれの大きさ  $\delta_x$  の理論値および最大振幅  $u_m$  の理論値は

$$\delta_x = \frac{1}{\gamma_c} \ln \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \gamma_c^2}, \quad u_m = \frac{8}{1 + e^{-\delta_x}} \quad (30)$$

である [12]。

また、図7は  $\gamma = 1.5 < 2$  の場合の初期問題の数値解と初期値から決まるパラメーター  $k_1, \dots, k_4$  をもつ (3142)-type(2,2)-ソリトン解のパターンの比較である。ただし、解析解の  $a, b, c$  は  $t = 0$  においてすべてのソリトンが原点で出会うように  $a = 4, b = 4/7, c = 4/3$  と定めた。  $t = 20$  では両者が非常によく一致することがわかる。解析解では反射波もソリトン（左上が [3,4]-ソリトン, 左下が [1,2]-ソリトン）であるが、数値解でも時間が経過するとともに、それらのソリトンに近づく。また、解析解では  $y$  軸に平行な [1,4]-ソリトン（Mach 反射の言葉では stem と呼ばれる）が現れ、時間に比例して伸びるが、数値解におけるステムの振幅、長さは時間が十分経過すれば、解析解におけるそれらとよく一致する [21]。なお、[1,4]-ソリトンの振幅の理論値は

$(\gamma + \sqrt{2\alpha})^2/2 = 6.125$  であり, stem の長さ  $L_s$  の理論値は [1,3]-ソリトンと [1,4]-ソリトンの峰

$$x - \gamma y = \frac{1}{4}(\gamma_c^2 + 3\gamma^2)t, \quad x = \frac{1}{4}(\gamma_c + \gamma)^2 t \quad (31)$$

の交点の座標から

$$L_s = (\gamma_c - \gamma)t \quad (32)$$

となる [21].

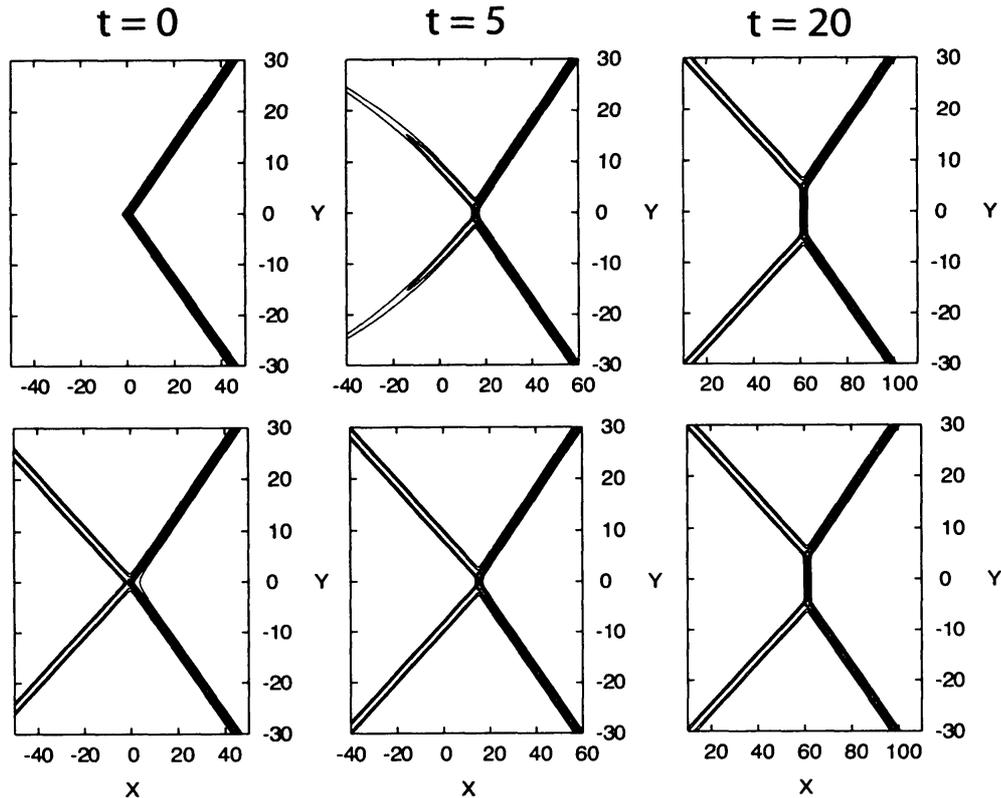


図7 V字型初期値 ( $\alpha = 2, \gamma = 1.5$ ) からの数値解と (3142)-type (2,2)-ソリトン解の比較.  $t = 0, 5, 20$ . それぞれ上側が数値解, 下側が解析解. 解析解においては  $a = 4, b = 4/7, c = 4/3$ .

$\gamma = 1, 1.5, 1.748, 1.898, 2.1, 2.207, 2.367, 2.5$  についての計算結果も解析解と漸近的によく一致する. 以上から, (26) の初期値から出発した解は  $\gamma > 2$  では, 対応する O-type 2-ソリトン解に漸近し,  $\gamma < 2$  では, 対応する (3142)-type(2,2)-ソリトン解に漸近すると言えるであろう.

ここで, 数値計算との比較に用いた解析解の行列要素の決め方について注意しておく. [21] では, 便宜上  $t = 0$  において漸近的なソリトンが原点で交わるというような条件で行列要素を決めたが, これは必ずしも厳密ではない. ソリトンの相互作用によって少しずれている可能性があり, 数値計算と解析解のわずかなずれはこれに起因すると考えられる. このずれがわずかなのはずれは行列要素の対数でしか効かないからである.

臨界値  $\gamma_c = 2$  のときには, 初期値問題の解がどうなるかは興味深い. この場合の数値計算から得られるパターンは図8に見られるように phase shift が少し目立つことを除いては  $\gamma > 2$  の場合

と ( $t = 30$  程度の計算時間では) 変わらない. 最大振幅  $u_m$  および phase shift  $\delta_x$  は時間的に非

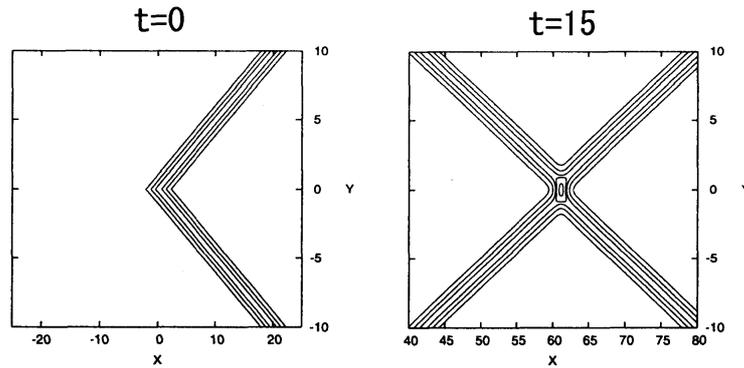


図8 臨界角  $\alpha = 2, \gamma = 2$  における数値解.  $t = 0$  における等高線図 (左) と  $t = 15$  における等高線図 (右).

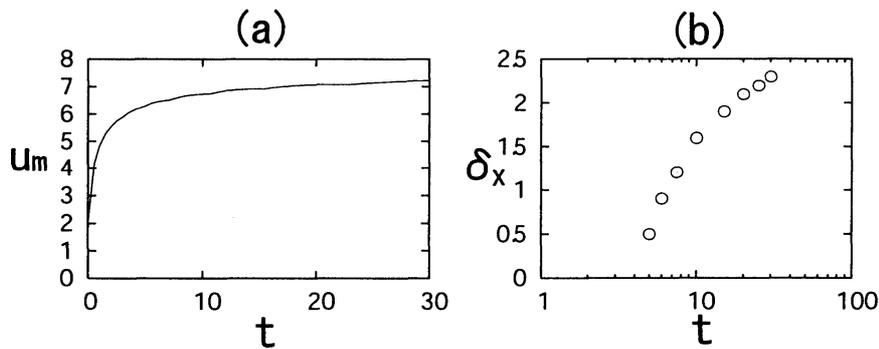


図9 臨界角  $\alpha = 2, \gamma = 2$  における数値解の最大振幅  $u_m$  と phase shift (stem の長さと同等) の時間発展.

常にゆっくり変化している (図9).  $u_m$  は理論値  $8 (= 2\alpha)$  に収束するかどうかはこの計算時間の範囲では予測できない. 右図では時間軸を対数目盛で示した. これによれば,  $t$  の大きいところは直線に見える. 従って, phase shift は時間について対数的に増加するように思われる. O-type では stem は伸びない. 一方, (3142)-type では  $t$  に比例して伸びる. 従って, 臨界値での対数的増加は合理的であるように思われる. この理論的説明はまだできていない.

さて, 上記の初期値問題の初期値から  $t \rightarrow \infty$  の漸近形への遷移をコード図で表すと, 図10のようになる. 図10の上図は  $\gamma > 2$  のとき, 初期に  $y > 0$  の側に [1,2]-ソリトン,  $y < 0$  の側に [3,4]-ソリトンを与えると,  $y > 0$  の側に [3,4]-ソリトン,  $y < 0$  の側に [1,2]-ソリトンが生じて,  $t \rightarrow \infty$  の漸近形として O-type 2-ソリトン解が現れることを表現している. 同様に, 下図は  $\gamma < 2$  のとき, 初期に  $y > 0$  の側に [1,3]-ソリトン,  $y < 0$  の側に [2,4]-ソリトンを与えると,  $y > 0$  の側に [3,4]-ソリトン,  $y < 0$  の側に [1,2]-ソリトンが生じて,  $t \rightarrow \infty$  の漸近形として (3142)-type(2,2) ソリトン解が現れることを表現している. もし, 漸近的に (2,2)-ソリトン解が現れるとすれば, 図11に

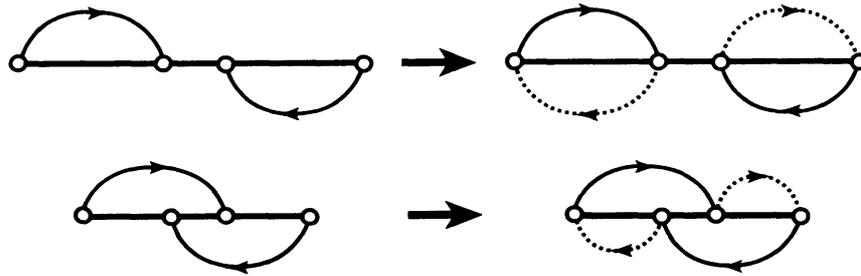


図 10 初期状態と  $t \rightarrow \infty$  の漸近形に対するコード図.

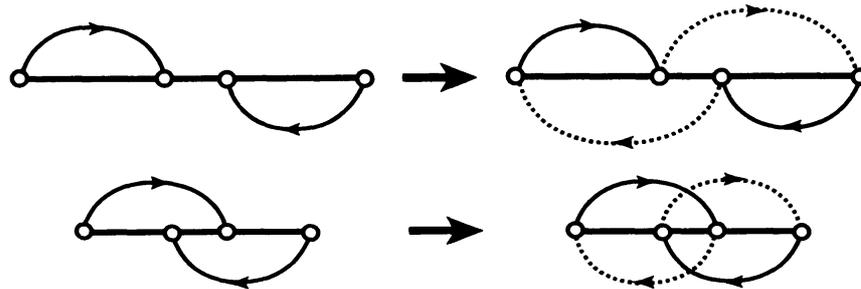


図 11 他の可能な遷移のコード図.

示すように,  $\gamma > 2$  では (2413)-type(2,2) ソリトン解が,  $\gamma < 2$  では (3412)-type(2,2)(T-type) ソリトン解が可能性としては考えられる. しかし, 実際に現れるのは,  $\gamma > 2$  では O-type,  $\gamma < 2$  では (3142)-type である. これらの方が各ソリトンに対応する部分コードの長さの総和が小さい. このような可能なソリトン解からの選択の原理は “minimal completion の原理” と呼べるかもしれない [21].

これまで, 対称な V 字波形の場合を扱ったが, 非対称な場合についてはどうであろうか. 非対称な場合も V 字の配置は対称なままで二つのソリトンの振幅だけを変えて, 次のような初期値を与える.

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} \alpha_1 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\alpha_1/2}(x - \gamma y), & (y > 0) \\ \alpha_2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\alpha_2/2}(x + \gamma y), & (y < 0) \end{cases} \quad (33)$$

数値計算は,  $\alpha_2 = 1$  と固定し,

case(a)  $\gamma = 1, \alpha_1 = 0.1$

case(b)  $\gamma = 1, \alpha_1 = 2$

case(c)  $\gamma = 0.5, \alpha_1 = 4$

の三つの場合について行った. 図 12 は,  $\alpha_2 = 1$  と固定したときの  $(\alpha_1, \gamma)$  平面における上記の計算点の位置を示したものである.  $(\alpha_1, \gamma)$  平面の第一象限が四つの領域に分かれていて, 上側の領域が O-type 2-ソリトン解が regular な領域 (O-領域),  $\alpha_1 = 1$  で左右に分かれている下側の二つの領域が P-type 2-ソリトン解が regular な領域 (P-領域), 中間に位置する領域が (3142)-type(2,2)-ソリトン解が regular な領域 ((3142)-領域) である. 上記の case(a), case(b), case(c)

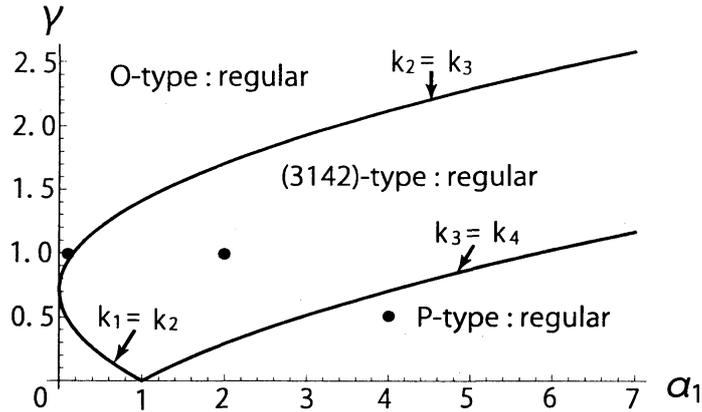


図 12  $(\alpha_1, \gamma)$  平面における計算点の位置.

はそれぞれ、O-領域、(3142)-領域、P-領域に属している。対称な場合は  $\alpha_1 = 1$  の断面であって、 $\gamma = \gamma_c = \sqrt{2\alpha_1} = \sqrt{2}$  を境に O-type と (3142)-type の regular な領域が分かれるのである。また、対称な場合には P-type の現れる余地はないことに注意しよう。

与えられた初期値から、それぞれの領域で、パラメーター  $k_1, \dots, k_4$  を計算すると

$$\begin{aligned} \text{O-領域} : k_1 &= -\gamma/2 - \sqrt{\alpha_1/2}, k_2 = -\gamma/2 + \sqrt{\alpha_1/2} \\ k_3 &= \gamma/2 - \sqrt{2}/2, k_4 = \gamma/2 + \sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3142)-領域} : k_1 &= -\gamma/2 - \sqrt{\alpha_1/2}, k_2 = \gamma/2 - \sqrt{2}/2 \\ k_3 &= -\gamma/2 + \sqrt{\alpha_1/2}, k_4 = \gamma/2 + \sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{P-領域} : \alpha_1 > 1 \text{ のとき, } k_1 &= -\gamma/2 - \sqrt{\alpha_1/2}, k_2 = \gamma/2 - \sqrt{2}/2 \\ k_3 &= \gamma/2 + \sqrt{2}/2, k_4 = -\gamma/2 + \sqrt{\alpha_1/2}; \\ \alpha_1 < 1 \text{ のとき, } k_1 &= \gamma/2 - \sqrt{2}/2, k_2 = -\gamma/2 - \sqrt{\alpha_1/2} \\ k_3 &= -\gamma/2 + \sqrt{\alpha_1/2}, k_4 = \gamma/2 + \sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

である。

図 13 は case(a) の場合の数値解と対応する O-type 2-ソリトン解のパターンを比較したものである。非常によく一致している。左側に伸びてくる波の振幅も傾きも [1,2]-ソリトン、[3,4]-ソリトンとよく一致する。

次に、図 14 は case(b) の場合の数値解と対応する (3142)-type(2,2)-ソリトン解のパターンを比較したものである。数値解が (3142)-type に漸近することはパターンだけでなく、各ソリトンが一致することからもわかる。

興味深いのは case(c) である。図 15 の上図は case(c) の場合の数値解を示す。当初、われわれは単純に P-type 2-ソリトン解が現れることを予想したが、その予想は見事に裏切られた。コード図の不足部分を埋めてソリトン解を完成するという観点からは図 16 に示すように P-type の他に (3,1)-ソリトンが可能である。しかも、各ソリトンに対応する部分コードの長さの総和は (3,1)-ソリトン解の方が小さいことは明らかである。従って、“minimal completion の原理”によって、

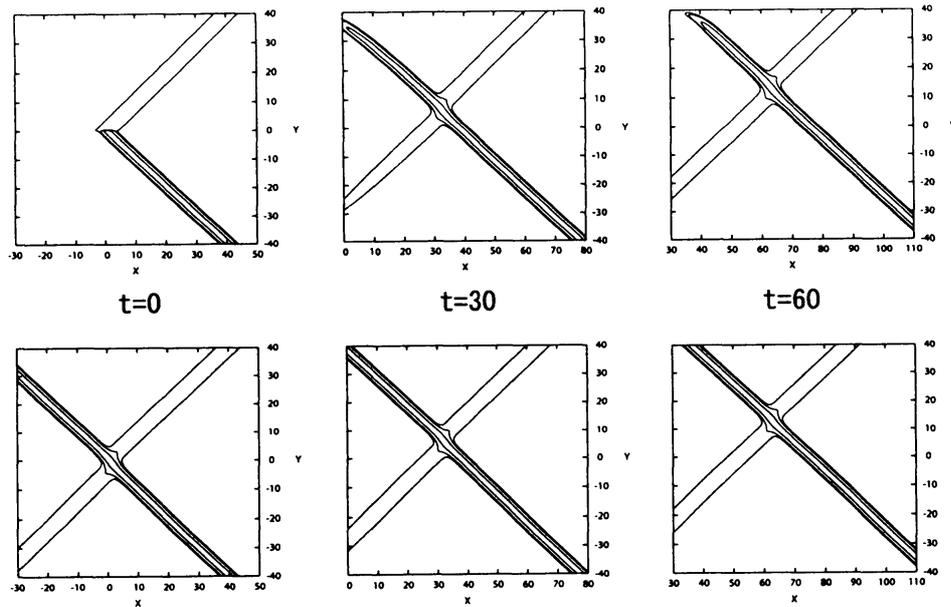


図 13 case(a) に対する数値解（上図）と O-type 解（下図）.  $\gamma = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ .  $t = 0, 30, 60$ .

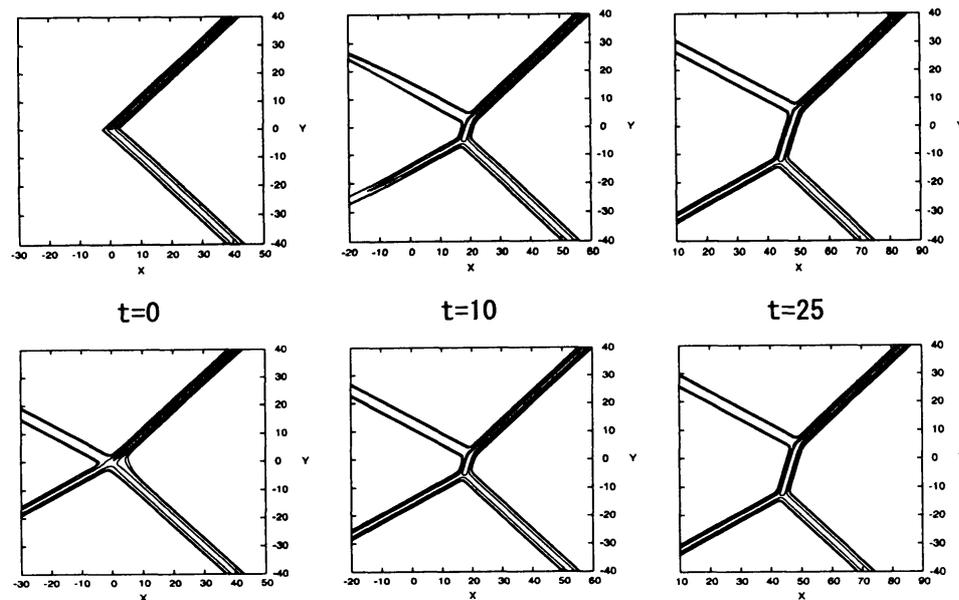


図 14 case(b) に対する数値解（上図）と (3142)-type 解（下図）.  $\gamma = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ .  $t = 0, 10, 25$ .

漸近解としては (3,1)-ソリトン解が現れると考えるべきである. 実際, 図 15 の下図は P-領域で  $\alpha_1 = 4, \gamma = 1/2$  としたときに初期値から決まる  $k_1, k_2, k_3, k_4$  を用いて, 係数行列を  $A = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$  としたときの (3,1)-ソリトン解の等高線図である.  $A$  のこの値は  $t = 0$  における漸近的なソリトン — [1,4], [1,2], [2,3]-ソリトン — が原点を通るという (便宜的な) 条件で決めたものである.  $t = 15$  では数値計算結果とよく一致することがわかる. ただし, ここで注意しなければならないのは, (3,1)-ソリトン解には [3,4]-ソリトンが常に存在するということである. [3,4]-ソリトンの振幅はこの場合  $\alpha[3,4] = (\sqrt{2} - 1)^2/8 = 0.0214 \dots$  と非常に小さく, それを意識して等高線を描い

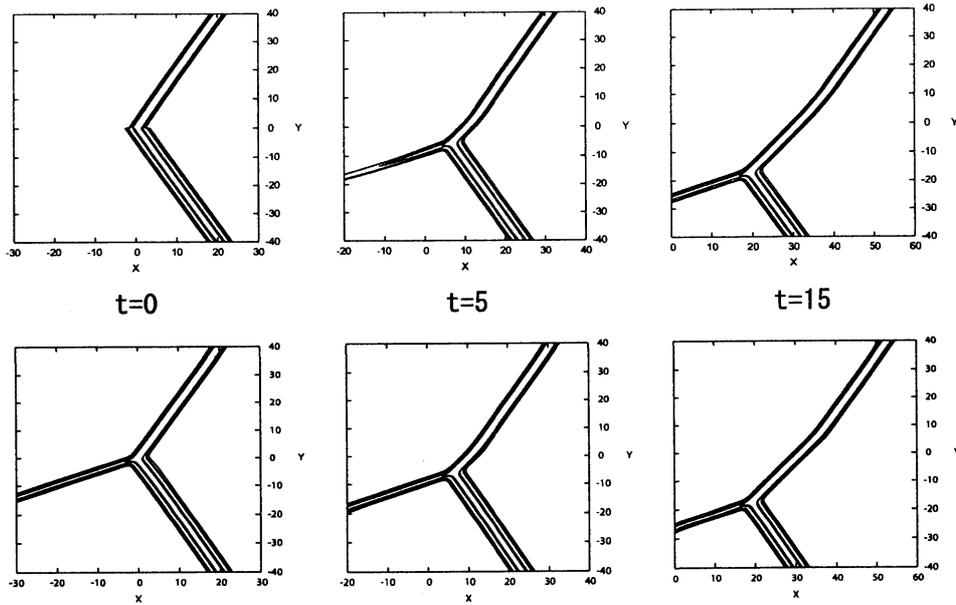


図 15 case(c) に対する数値解（上図）と (3,1)-ソリトン解（下図）.  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha_1 = 4$ .  $t = 0, 5, 15$ .

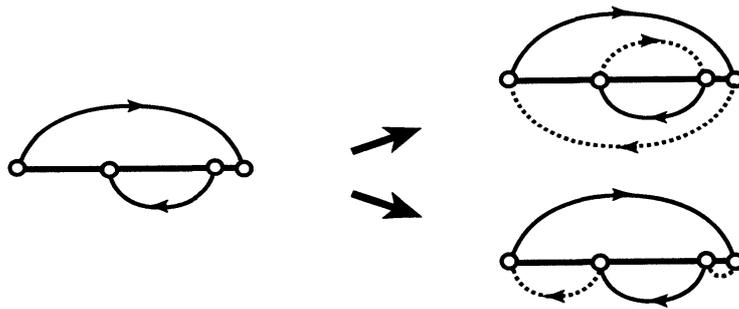


図 16 P-type の漸近形に対するコード図.

たのが図 17 の右図である. 左図は同じ時刻  $t = 15$  における数値解の等高線図で, それには [3,4]-ソリトンは存在しない. この場合の [3,4]-ソリトンを “virtual soliton” と呼ぶのがよいかもしれない. virtual soliton を除けば, (3,1)-ソリトンは漸近的に数値解とよく一致する. virtual soliton が与えられた初期値からは作られないであろうということは直感的には理解されるであろう. さ

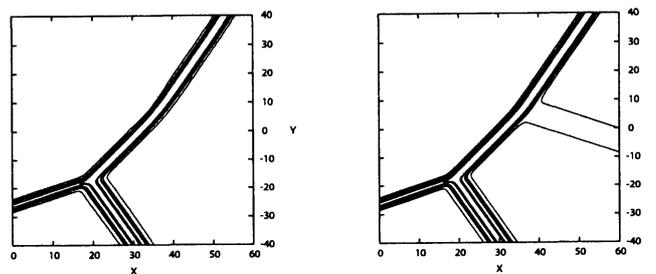


図 17 case(c) に対する  $t = 15$  における数値解（左図）と (3,1)-ソリトン解（右図）.

らに、系統的な理解は今後の課題である。

virtual soliton を除いてという但し書きがつくけれども、この場合に“minimal completionの原理”が有用なことは理解していただけるであろう。しかし、minimal completionの原理だけでは漸近解が一意に決まらない場合もあることを指摘しておかなければならない。例えば、図18の

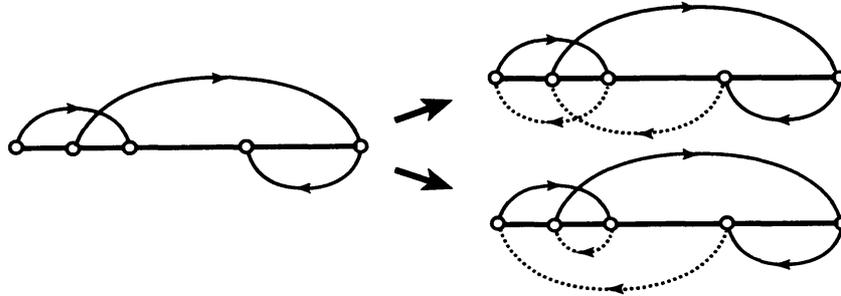


図18 [1,3], [2,5]-ソリトンを与えたときの可能な漸近形のコード図。

左図のように初期に  $y > 0$  で [1,3]-ソリトンと [2,5]-ソリトンを与え、 $y < 0$  で [4,5]-ソリトンを与えた問題を考えよう。ここで、例えば  $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = (-2, -1.5, -1, 0, 1)$  としよう（この場合には初期のソリトンの振幅と傾きを勝手に取ることはできないことに注意しよう）。この場合、漸近解がソリトン解であると仮定すれば、可能なソリトン解は図18の右図のように  $\pi = (35124)$  あるいは  $\pi = (35214)$  の二通りである。しかも、この場合の部分コードの長さの総和は等しいから、実際にどちらの解が漸近解として現れるかは、minimal completionの原理だけでは決まらない。この場合、選ばれるのは  $\pi = (35214)$  の方である。次元（シューベルトセルの次元で RREM で表した係数行列の自由パラメーターの数）の低い方、コード図で言えば、交点数の少ない方が選ばれるのである。このことの一般的な場合については現在検討中である。

#### 4 時空間的に局在する大振幅波の生成

ソリトン解のもう一つの応用として、時空間的に局在した大振幅波の生成の例を紹介しよう。海洋における大振幅波は船舶等に大きな被害を与える。最近ではそのような大振幅波としてフリーク波が注目され、特に深水波領域において多くの研究がある [22]。浅水波領域では研究は少ない。われわれは以前、KP II 方程式における曲がった二つのソリトンの二次元的な相互作用によって、時空間的に局在した大振幅波が生じうることを示した [23]。

ここでは、KP II 方程式のソリトン解の中にそのような時空間的に局在する大振幅波解が可能であることを例示する。(2,2)-ソリトン解においては、現れる最大振幅は  $y \rightarrow \pm\infty$  における漸近的なソリトンの最大振幅の4倍より小さいことを示すことができる [24]。(2,1)-ソリトン解あるいは(1,2)-ソリトン解の二つのソリトンの振幅が等しい場合に、残りのソリトンの振幅が二つのソリトンの振幅の4倍になるが、そのソリトンは  $y \rightarrow \infty$  あるいは  $y \rightarrow -\infty$  まで伸びており、かつ、伝播も定常的であるから時空間的に局在しているわけではない。しかし、いくつかのソリトン解が複合的に相互作用する場合には、漸近的なソリトンの最大振幅の4倍を超える振幅を持つ時空間的に局在する波が存在しうる。最も簡単な場合は、(3142)-type(2,2) ソリトン解においてかなり大きな

stem ができているときに、その stem と第三のソリトンが臨界面に近い角度で O-type の相互作用をする場合である。[24] において挙げられている例は、遠方でのソリトンの振幅がやや大き過ぎると思われるので、ここでは、もう少し振幅の低い例を挙げておく。

図 19 のようなコード図を考える。左側の 4 個の漸近的ソリトンが (3142)-type(2,2)-ソリトン

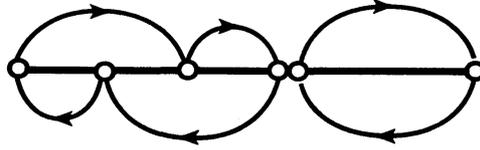


図 19 時空間的に局在する大振幅波を生成すると期待される (3,3)-ソリトン解のコード図.

を作っていて、相互作用領域で stem を生成する。それは [1,4]-ソリトンである。その [1,4]-ソリトンと [5,6]-ソリトンが局所的に O-type の相互作用をするように解をつくりたい。対応する局所

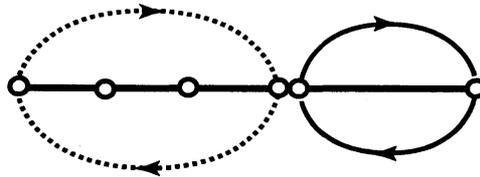


図 20 局所的な O-type の相互作用に対応するコード図.

的なコード図は図 20 のようになる。ここで、[1,4]-ソリトンは  $y \rightarrow \infty$  あるいは  $y \rightarrow -\infty$  で常に現れるソリトンではないので、破線で示した。[1,4]-ソリトンと [5,6]-ソリトンが接近しているほど相互作用で生成されるピークの振幅が大きくなる。それを考慮して、ここでは

$$(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = (-2, -1, 0, 1, 1.01, 3) \quad (34)$$

と選ぶ。

さて、コード図 19 に対応する係数行列  $A$  を考えよう。第 1, 3, 5 列がピボット列、第 2, 4, 6 列が非ピボット列であるから、 $A$  の RREF の一般形は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -c & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & b & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix} \quad (35)$$

である。  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0, f > 0$  かつ  $bf - ce > 0$  ならば、 $\tau$  関数の可能な 20 項の中、14 項が生き残り、それらの項はすべて正である。ここで、(2,2)-ソリトンの場合の係数行列の RREF から、いまの目的のためには、 $e = f = 0$  とすればよいであろうと推測できる。  $a, b, c, d$  は各ソリトンの位置関係を定める。簡単のため、 $a = b = c = 1$  とする。(3142)-type(2,2)-ソリトンと [5,6]-ソリトンは、前者の stem の振幅が定常に達してから、相互作用するようにしたいので、

初期に少し離しておく．そのために，ここでは  $d = e^{100}$  と選ぶ．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e^{100} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

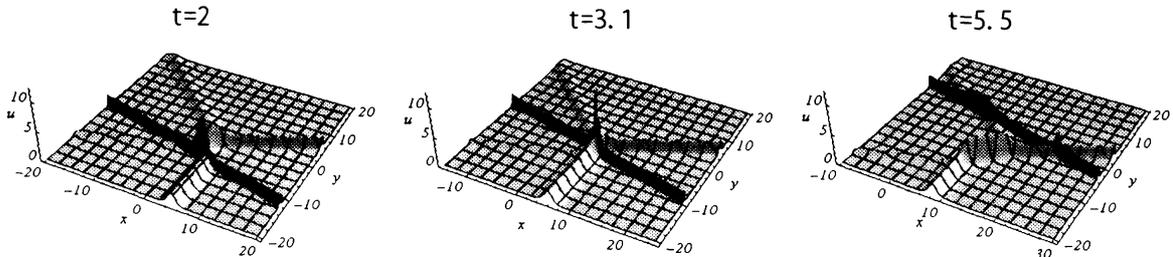


図 21 (3142)-type と O-type の相互作用による時空間的に局在した大振幅波の生成． $k$  の値は (34) によって， $A$  は (36) によって与えられる．

この場合  $\tau$  関数は 10 項からなる．対応する解のグラフは図 21 のようになり，確かに，目的の解が得られていることがわかる． $t = 3.1$  の図は (3142)-type 解の stem と [5,6]-ソリトンが相互作用しており，そこで局在したピークが見られる．このピークの値は [1,4]-ソリトンと [5,6]-ソリトンの局所的な相互作用を仮定すれば，[12] の結果から  $u_{\max} \approx 11.45$  と予想されるが，実際の値もほぼこれに等しい． $y \rightarrow \infty$  あるいは  $y \rightarrow -\infty$  における漸近的ソリトンの最大振幅が 2 であるから， $u_{\max}$  はその 5.5 倍以上である．

## 5 終わりに

本稿では，まず，兎玉らによって最近発展させられた KPII 方程式のソリトン解の性質と分類について簡単に紹介し，V 字型初期値問題の漸近解と時空間的に局在する大振幅波の生成へのそれらの応用を紹介した．その際，ソリトン解を表すコード図の有用性についても紹介したつもりであるが，十分に伝わったかどうか自信がない．

ソリトン解のロンスキー行列式表示については，25 年以上前に知られていたのに，T-type 解や (3142)-type 解がごく最近まで認識されなかったのは不思議なことである．KPII 方程式なんてもう解もわかっていてつまらないという意識がどこかにあったのであろう．二次元問題はソリトン解などは分かっているが初期値問題についてはまだまだわかっていない．当面は数値計算に頼ることになるだろうが，今後，解析的な研究の発展についても期待したい．

## 参考文献

- [1] Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I. : On the stability of the solitary waves in weakly dispersing media, *Sov. Phys.- Doklady* **15** (1970) 539-541.

- [2] Dryuma, V. S. : Analytic solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries (KdV) equation, *Sov. Phys. JETP Lett.* **19** (1974) 387-388.
- [3] Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A. : *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991).
- [4] Ablowitz, M. J. and Segur, H. : *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, (Philadelphia, SIAM, 1981).
- [5] Freeman, N. C. and Nimmo, J. J. C. : Soliton solutions of the Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations: The Wronskian technique, *Phys. Lett. A* **95** (1983) 1-3.
- [6] 広田良吾 : 直接法によるソリトンの数理, (岩波書店, 1992).
- [7] Biondini, G. and Kodama, Y. : On a family of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation which also the Toda lattice hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) 10519-10536.
- [8] Kodama, Y. : Young diagrams and N-soliton solutions of the KP equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 11169-11190.
- [9] Biondini, G. and Chakravarty, S. : Soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili II equation, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 033514 (26pp).
- [10] Biondini, G. and Chakravarty, S. : Elastic and inelastic line-soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili II equation, *Math. Comput. Simul.* **74** (2007) 237-250.
- [11] Chakravarty, S. and Kodama, Y. : Classification of the line-soliton solutions of KP II, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 275209 (33pp).
- [12] Chakravarty, S. and Kodama, Y. : Soliton solutions of the KP equation and application to shallow water waves, *Studies Appl. Math.* **123** (2009) 83-151.
- [13] 伊理正夫, 韓太舜 : 線形代数, (教育出版, 1977).
- [14] 伊理正夫 : 岩波講座 応用数学 線形代数 I, (岩波書店, 1993).
- [15] Miles, J. W. : Resonantly interacting solitary waves, *J. Fluid Mech.* **79** (1977) 171-179.
- [16] Miles, J. W. : Obliquely interacting solitary waves, *J. Fluid Mech.* **79** (1977) 157-169.
- [17] Tsuji, H. and Oikawa, M. : Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth, *Fluid Dyn. Res.* **29** (2001) 251-267.
- [18] Tsuji, H. and Oikawa, M. : Two-dimensional interaction of solitary waves in a modified Kadomtsev-Petviashvili equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **73** (2004) 3034-3043.
- [19] Tsuji, H. and Oikawa, M. : Oblique interaction of solitons in an extended Kadomtsev-Petviashvili equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 084401 (8pp).
- [20] Oikawa, M. and Tsuji, H. : Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems, *Fluid Dyn. Res.* **38** (2006) 868-898.
- [21] Kodama, Y., Oikawa, M. and Tsuji, H. : Soliton solutions of the KP equation with V-shape initial waves, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 312001 (9pp).
- [22] Kharif, C. and Pelinovsky, E. : Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech./B-Fluids* **22** (2003) 603-634.

- [23] Porubov, A. V., Tsuji, H., Lavrenov, I. V. and Oikawa, M. : Formation of the rogue wave due to non-linear two-dimensional waves interaction, *Wave Motion* **42** (2005) 202-210.
- [24] Biondini, G., Maruno, K., Oikawa, M. and Tsuji, H. : Soliton interactions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and generation of large-amplitude water waves, *arXiv : nlin.SI 0903.5279v3* (2009) (28pp).