数理解析研究所講究録
第 1700 巻 2010 年 167-178

ある非局所的な可積分系の特殊解と運動の積分の系列について

大原大学院大学会計研究科　土谷　洋平 (Yohei Tutiya)
Ohara graduate school of accounting

1 概要

次の非局所的な可積分方程式を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t)=\eta(x,t)\,⨍_{-1/2}^{1/2}\Big[\cot\left\{\pi(y-x-\gamma)\right\}$$
$$-2\cot\left\{\pi(y-x)\right\}+\cot\left\{\pi(y-x+\gamma)\right\}\Big]\,\eta(y,t)\frac{idy}{2}, \tag{1}$$

式中, $⨍$ は Cauchy の主値積分を表し, γ は正の虚部を持った複素定数を表すものとする。また, $\eta(x,t)$ は周期境界条件 $\eta(x+1,t)=\eta(x,t)$ を満たすものとする。(1) は [5] において Periodic ILW equation with discrete Laplacian と呼ばれている方程式の, Im $\delta\to\infty$ という極限をとったものである。Periodic ILW equation with discrete Laplacian の背景については [5] を参照して頂きたい。本稿では (1) の, ある保存量の基底と対称関数に関する Macdonald 作用素の固有値が対応しそうであるという予想を述べる。本稿の内容は東京大学の白石潤一氏との共同研究 [6] に拠っている。[6] では省略した証明も補完したが逆に説明を省いた箇所もある。

2 方程式 (1) の導出とその保存量

$z=e^{2\pi ix}$ とおいて $\eta(x,t)$ の Fourier 級数展開を

$$\eta(z,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\eta_{-n}z^n \tag{2}$$

と書く。この形では (1) 式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(z,t)=\eta(z,t)\sum_{n\neq0}\mathrm{sgn}(n)(1-q^{|n|})\eta_{-n}z^n \tag{3}$$

となる。両辺で z^0 の係数を比較すると次が分かる。

命題 2.1.
$\dfrac{\partial\eta_0}{\partial t}=0$, すなわち η_0 は保存量となる。

このことに注意して

$$\sum_{n>0}\eta_{-n}z^n=\eta_+=\frac{\partial_t\tau_+}{\tau_+},\quad \sum_{n>0}\eta_n z^{-n}=\eta_-=\frac{\partial_t\tau_-}{\tau_-},\tag{4}$$

とおくと次の双線形形式が得られる。

$$D_t\ \tau_-(z)\cdot\tau_+(z)=\varepsilon\tau_-(q^{-1}z)\tau_+(qz)-\eta_0\tau_-(z)\tau_+(z).\tag{5}$$

$\tau_\pm$ を用いて η は次のように 2 通りに書くことができることを注意しておく。

$$\eta(z)=\eta_0+\frac{\partial_t\tau_+}{\tau_+}-\frac{\partial_t\tau_-}{\tau_-}=\varepsilon\frac{\tau_-(q^{-1}z)}{\tau_-(z)}\frac{\tau_+(qz)}{\tau_+(z)}\tag{6}$$

双線形型式 (5) は広田-三輪方程式や離散 KdV 方程式に良く似ていることに気づく。そこで双線形形式を中心においた KP 階層の理論に沿ったやり方で方程式 (5) の導出を説明したい。まず広田-三輪方程式 (離散 KP 方程式) を

$$\begin{aligned}&(a_3^{-1}-a_2^{-1})\tau(l+a_1,m,n)\tau(l,m+a_2,n+a_3)\\&\quad+(a_1^{-1}-a_3^{-1})\tau(l,m+a_2,n)\tau(l+a_1,m,n+a_3)\\&\quad+(a_2^{-1}-a_1^{-1})\tau(l,m,n+a_3)\tau(l+a_1,m+a_2,n)=0\end{aligned}\tag{7}$$

と書く。どれか 1 つの差分間隔を 0 にする極限を考える。ここでは仮に a_1 を 0 にする極限を考えると次の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}&D_l\tau(l,m,n+a_3)\cdot\tau(l,m+a_2,n)\\&\quad=(a_2^{-1}-a_3^{-1})\{\tau(l,m,n)\tau(l,m+a_2,n+a_3)-\tau(l,m,n+a_3)\tau(l,m+a_2,n)\}\end{aligned}\tag{8}$$

この方程式は KP 階層の理論の応用ではしばしば表れるものであり，[1] などでは differential Fay identity と呼ばれている。ここから (5) を得るには，大雑把に言えば $e^{-clm}\tau$ をあらためて τ とおきなおし，m と n を同一視する縮約条件を課した上で a_3-a_2 の虚部を正の無限大に飛ばせばよい。きちんと述べると次のようになる。$e^{-clm}\tau$ をあらためて τ とおきなおし $t=\alpha l$ と変数変換する。定数 α, c は $\varepsilon=(a_2^{-1}-a_3^{-1})/\alpha$, $\eta_0=(a_2^{-1}-a_3^{-1}-ca_2)/\alpha$ となるように定める。これらを用いて differential Fay を書き直すと

$$\begin{aligned}&D_t\tau(l,m,n+a_3)\cdot\tau(l,m+a_2,n)\\&\quad=\varepsilon\tau(l,m,n)\tau(l,m+a_2,n+a_3)-\eta_0\tau(l,m,n+a_3)\tau(l,m+a_2,n)\end{aligned}\tag{9}$$

となる。ここで縮約条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial m}-\frac{\partial}{\partial m}\right)\tau=0\tag{10}$$

を課して (9) を $1+1$ 次元の方程式に書き直すと

$$D_t\ \tau(pz)\cdot\tau(z)=\varepsilon\tau(pq^{-1}z)\tau(qz)-\eta_0\tau(pz)\tau(z)\tag{11}$$

となる。これは [5] において periodic ILW equation with discrete Laplacian と呼ばれている方程式である。ただし差分間隔については $\exp\{2\pi i(a_3-a_2)\}=p, \exp(2\pi i a_3)=q$ とおいている。ここで $\mathrm{Im}\, p\to\infty$ の極限を考えると (5) が得られる。

双線形形式 (5) の特殊解を, ソリトン方程式の場合のように $\tau_\pm$ を z の多項式であると仮定して探してみる。ただし, η_+ が $|z|<1$ の円内で正則であることから τ_+ は z の正冪の多項式, η_- が円外で正則であることから τ_- は z の負冪の多項式と仮定するのが妥当である。1 次式の解としては次をみつけることができる。

$$\begin{cases} \tau_+ = 1+ze^{(1-q)at}, \\ \tau_- = 1+\dfrac{\varepsilon-a}{\varepsilon-qa}z^{-1}e^{-(1-q)at}, \end{cases} \tag{12}$$

2 次式の解としては次をみつけることができる。

$$\begin{cases} \tau_+ = 1+ze^{(1-q)a_1t}+ze^{(1-q)a_2t} \\ \qquad\qquad +\dfrac{(a_1-a_2)^2}{(a_1-qa_2)(a_1-q^{-1}a_2)}z^2e^{(1-q)(a_1+a_2)t}, \\ \tau_- = 1+c_1z^{-1}e^{-(1-q)a_1t}+c_2z^{-1}e^{-(1-q)a_2t} \\ \qquad\qquad +\dfrac{(a_1-a_2)^2}{(a_1-qa_2)(a_1-q^{-1}a_2)}c_1c_2z^{-2}e^{-(1-q)(a_1+a_2)t}, \end{cases} \tag{13}$$

$$c_j = \frac{\varepsilon-qa_j}{\varepsilon-q^2a_j}\frac{(a_1-qa_2)(a_1-q^{-1}a_2)}{(a_1-a_2)^2}$$

ところで, 天下りであるが方程式 (1) の独立な保存量として次が知られている [2, 4, 5]。

定理 2.2.
(1) 式の解 η に対して,

$$I_n = \int\int\cdots\int_S \left(\prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i z_j}\right)\left(\prod_{j<k}\frac{z_j-z_k}{z_j-qz_k}\right)\left(\prod_{j=1}^n \eta(z_j)\right) \quad n=1,2,\cdots \tag{14}$$

は時間によらない。特に $I_1=\eta_0$ である。

特殊解 (12) に対して保存量 (14) の低次を計算してみると次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon q+(1-q)a = (1-q)e_1(a,\varepsilon q,\varepsilon q^2,\cdots), \\ I_2 &= \varepsilon^2q^2+(1-q^2)a\varepsilon = \frac{(1-q)(1-q^2)}{q}e_2(a,\varepsilon q,\varepsilon q^2,\cdots), \end{aligned} \tag{15}$$

また特殊解 (13) に対しては次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon q^2+(1-q)a_1+(1-q)a_2 = (1-q)e_1(a_1,a_2,\varepsilon q^2,\varepsilon q^3,\cdots), \\ I_2 &= \frac{(1-q)(1-q^2)}{q}a_1a_2+\varepsilon q(1-q)a_1+\varepsilon q(1-q)a_2+\varepsilon^2q^2 \\ &= \frac{(1-q)(1-q^2)}{q}e_2(a_1,a_2,\varepsilon q^2,\varepsilon q^3,\cdots), \end{aligned} \tag{16}$$

これらの保存量と Macdonald 作用素の固有値 [3]

$$q^{-n(n-1)/2}\prod_{k=1}^{n}(1-q^k)\cdot e_n(\varepsilon t^{-\lambda_1},\varepsilon q t^{-\lambda_2},\varepsilon q^2 t^{-\lambda_3},\cdots) \tag{17}$$

は明らかに類似している。すなわち (15)(16) は $\lim \varepsilon q^{i-1}t^{-\lambda_i}$ が有限な値 a_i になるように $t\to 1$, $\lambda_i\to\infty$ という極限をとったものと解釈できる。これを予想の形で述べておく。

予想 2.3.
方程式 (1) の双線形形式 (5) に対してパラメータ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ を持った次の解が存在するであろう。

$$\begin{aligned}
\tau_+ &= 1+\sum_{j=1}^{n} z e^{(1-q)a_j t}+\sum_{j<k}^{n}\frac{(a_j-a_k)^2}{(a_j-qa_k)(a_j-a_k/q)} z^2 e^{(1-q)(a_j+a_k)t}+\cdots\\
&= \begin{vmatrix} 1+k_1f_1 & 1+k_2f_2 & \cdots & 1+k_nf_n\\ qa_1+a_1k_1f_1 & qa_2+a_2k_2f_2 & \cdots & qa_n+a_nk_nf_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (qa_1)^{n-1}+a_1^{n-1}k_1f_1 & (qa_2^{n-1})+a_2^{n-1}k_2f_2 & \cdots & (qa_n)^{n-1}+a_n^{n-1}k_nf_n \end{vmatrix}\\
&\quad \Bigg/ \left(q^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\tau_- &= 1+\sum_{j=1}^{n} l_j z^{-1} e^{(q-1)a_j t}+\sum_{j<k}^{n}\frac{(a_j-a_k)^2}{(a_j-qa_k)(a_j-a_k/q)} l_j l_k z^{-2} e^{(q-1)(a_j+a_k)t}+\cdots\\
&= \begin{vmatrix} 1+l_1f_1^{-1} & 1+l_2f_2^{-1} & \cdots & 1+l_nf_n^{-1}\\ qa_1+a_1l_1f_1^{-1} & qa_2+a_2l_2f_2^{-1} & \cdots & qa_n+a_nl_nf_n^{-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (qa_1)^{n-1}+a_1^{n-1}l_1f_1^{-1} & (qa_2^{n-1})+a_2^{n-1}l_2f_2^{-1} & \cdots & (qa_n)^{n-1}+a_n^{n-1}l_nf_n^{-1} \end{vmatrix}\\
&\quad \Bigg/ \left(q^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

ただし

$$f_j = z e^{(1-q)a_j t},\quad k_j=\prod_{1\le m\le n,\ m\ne j}\frac{a_m-a_j}{a_m-qa_j} \tag{20}$$

である。また l_j は n に応じて決まる ε,q,a_j の有理式である。これらの $\tau_\pm$(から (6) によって決まる η) に対して, 保存量 (14) の値は

$$I_n = q^{-n(n-1)/2}\prod_{k=1}^{n}(1-q^k)\cdot e_n(a_1,a_2,\cdots,a_n,\varepsilon q^{n-1},\varepsilon q^n,\varepsilon q^{n+1},\cdots) \tag{21}$$

となるであろう。

予想の未解決部分は τ_- に含まれる定数 l_j の形及び (21) の証明である。

3 $q=0$ の場合

$q=0$ のときには Fourier 展開 (3) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(z,t)=\eta(z,t)\sum_{n\neq 0}\mathrm{sgn}(n)\eta_{-n}z^n \tag{22}$$

になる。この式は $\eta_\pm(z)$ の正則な領域に応じて

$$\frac{d}{dt}\eta_+(z,t)=\eta_+(z,t)(\eta_+(z,t)+\eta_0),\quad \frac{d}{dt}\eta_-(z,t)=-\eta_-(z,t)(\eta_-(z,t)+\eta_0). \tag{23}$$

の 2 本に分離する。これらは容易に解くことができて,

$$\eta_+(z,t)=\frac{-\eta_0c_+(z)e^{\eta_0t}}{d_+(z)+c_+(z)e^{\eta_0t}},\qquad \eta_-(z,t)=\frac{-\eta_0c_-(z)e^{-\eta_0t}}{d_-(z)+c_-(z)e^{-\eta_0t}} \tag{24}$$

という厳密解を得る。$c_\pm,d_\pm$ は η_+ が $|z|<1$ で正則となるように, η_- が $|z|>1$ で正則となるように選ばれた任意関数である。$q\neq 0$ の場合を踏まえて仮に $\tau_\pm(z,t)=d_\pm(z)+c_\pm(z)\exp(\pm\eta_0t)$ とおくと双線形形式は

$$\eta(z,t)=\varepsilon\frac{1}{\tau_-(z,t)\tau_+(z,t)}, \tag{25}$$

$$D_t\ \tau_-(z,t)\cdot\tau_+(z,t)=\varepsilon-\eta_0\tau_-(z,t)\tau_+(z,t). \tag{26}$$

となる。さらに $c_\pm,d_\pm$ についてのものに書き直すと

$$d_+(z)d_-(z)-c_+(z)c_-(z)=\varepsilon/\eta_0 \tag{27}$$

となる。これに対して次の解を見出すことができる。

例 3.1. n を非負の整数としてパラメータ $\epsilon_{\pm1},\epsilon_{\pm2},\cdots$ を用意する。

$$e_m(z,t)=\epsilon_mz^m\exp\{\mathrm{sgn}(m)\eta_0t\} \tag{28}$$

とおくと (33) を満たす解としては z の 1 次式では次をみつけることができる。

$$d_+=1,\ c_+=e_1,\ d_-=1,\ c_-=e_{-1} \tag{29}$$

z の 2 次式では次の解をみつけることができる。

$$d_+=1+e_2e_{-1},\ c_+=e_1+e_2,\ d_-=1+e_{-2}e_1,\ c_-=e_{-1}+e_{-2} \tag{30}$$

z の 3 次式では次の解をみつけることができる。

$$\begin{aligned}&d_+=1+e_2e_{-1}+e_3e_{-1}+e_3e_{-2},\ c_+=e_1+e_2+e_3+e_3e_{-2}e_1,\\&d_-=1+e_{-2}e_1+e_{-3}e_1+e_{-3}e_2,\ c_+=e_{-1}+e_{-2}+e_{-3}+e_{-3}e_2e_{-1}\end{aligned} \tag{31}$$

すなわち d_+ も c_+ は e の積の和からなり各項で e の添字は正負の順に交代かつ絶対値が減少する。そして d_+ では各項は偶数個の e の積であり, c_+ では奇数個である。d_- と c_- でも正負が反転する以外は同様である。一般化すると次のようになる。

補題 3.2.
$d_\pm, c_\pm$ を次の行列で定義する。

$$\begin{pmatrix} d_+(z) & c_+(z) \\ c_-(z) & d_-(z) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & e_n(z,t) \\ e_{-n}(z,t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_{n-1}(z,t) \\ e_{-n+1}(z,t) & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & e_1(z,t) \\ e_{-1}(z,t) & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

この $d_\pm, c_\pm$ は (33) の解となる。η_0 の値は $\epsilon/\{\prod_{i=1}^n (1-\epsilon_i\epsilon_{-i})\}$ である。

(補題 3.2 の証明)
両辺の行列式から直ちに

$$d_+(z)d_-(z) - c_+(z)c_-(z) = \prod_{i=1}^{n}(1-\epsilon_i\epsilon_{-i}). \tag{33}$$

が確認できる。 (補題 3.2 の証明終わり)

補題 3.2 の解に対して保存量 (14) を計算しよう。$q=0$ のとき I_n は次の Toeplitz 型行列式になる。

$$I_{n+1} = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_{-1} & \cdots & \eta_{-n+1} \\ \eta_1 & \eta_0 & \cdots & \eta_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n-1} & \eta_{n-2} & \cdots & \eta_0 \end{vmatrix} \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{34}$$

このとき次の定理を得る。

定理 3.3.
補題 3.2 の $d_\pm(z), c_\pm(z)$ につき, $\tau_\pm(z,t) = d_\pm(z) + c_\pm(z)e^{\pm\eta_0 t}$ は (26) を満たす。このとき $\prod_{i=1}^\infty(1-\epsilon_i\epsilon_{-i}) = \varepsilon/\eta_0$ となる。 (25) で定義された η は (22) を満たし, その保存量 (34) については次が成立する。

$$I_{n+1} = \eta_0^{n+1}(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})^n(1-\epsilon_2\epsilon_{-2})^{n-1}\cdots(1-\epsilon_n\epsilon_{-n}), \quad n \geq 0 \tag{35}$$

(定理 3.3 の証明)
$\tau_\pm(z,t)$ はパラメータ $\epsilon_{\pm n}$ によっていることを露にするために $\tau_\pm = \tau_\pm(z,t;\epsilon_{\pm1},\epsilon_{\pm2}\cdots,\epsilon_{\pm M})$ と書く。以降の議論では常にパラメータの数は Toeplitz 行列式のサイズより十分大きい, すなわち $M > n$ と仮定する。パラメータの数が n よりも少ない解, 例えば $\tau_\pm(z,t;\epsilon_{\pm1})$ については

$\epsilon_{\pm 2} = \epsilon_{\pm 3} = \cdots = \epsilon_{\pm M} = 0$ と特殊化したものと解釈すれば良いので, このような仮定は証明に不備をきたすものではない。以下の議論においてこのような特殊化を特に $\tau_{\pm}^{(k)}$ と書くことにする。すなわち

$$\tau_{\pm}^{(k)} = \tau_{\pm}(z, t; \epsilon_{\pm 1}, \epsilon_{\pm 2} \cdots, \epsilon_{\pm k}, \epsilon_{\pm(k+1)} = 0, \cdots, \epsilon_{\pm M} = 0) \tag{36}$$

と定義する。また, $\eta(z,t), d_{\pm}(z), c_{\pm}(z), \tau_{\pm}(z,t)$ などに対しても特殊化を考えるときには右肩に (k) をつけることにする。

さて, まず我々は I_n が t に依らないことを知っているので, 以下では簡単化のために $t=0$ とおく。また $d_{\pm}(z), c_{\pm}(z), \tau_{\pm}(z,0)$ の展開係数に対して以下の記号を用いる。

$$d_{\pm}(z) = \sum_{j=1}^{M} d_{\pm j} z^{\pm j}, \quad c_{\pm}(z) = \sum_{j=1}^{M} c_{\pm j} z^{\pm j}, \quad \tau_{\pm}(z,0) = \sum_{j=1}^{M} \tau_{\pm j} z^{\pm j} \tag{37}$$

さらに $\eta_n, (n \neq 0)$ は η_0 でくくれるので, 簡単のために次の ν_n を導入する。

$$\eta_{\pm}(z,0) = \frac{-\eta_0 c_{\pm}(z)}{d_{\pm}(z) + c_{\pm}(z)} =: -\eta_0 \sum_{n>0} \nu_{\pm n} z^{\pm n} \tag{38}$$

これらによって定理の主張は次の形になる。

$$\begin{vmatrix} -1 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & -1 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \prod_{l=1}^{n} (1 - \epsilon_l \epsilon_{-l})^{n-l+1}. \tag{39}$$

以下にいくつか補題を用意し, 段階的に (39) 式を示すことにする。まず次を示さなければならない。

補題 3.4.

1. $\nu_n \ (n = 1, 2, \cdots)$ は $\{\epsilon_{\pm 1}, \epsilon_{\pm 2}, \cdots, \epsilon_{\pm(n-1)}, \epsilon_n\}$ のみの多項式である。特に ϵ_n については 1 次式であり, 1 次の係数については
$$\frac{\partial \nu_n}{\partial \epsilon_n} = (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1})(1 - \epsilon_2 \epsilon_{-2}) \cdots (1 - \epsilon_{n-1} \epsilon_{-n+1}) \tag{40}$$
となる。

2. 次が成立する。
$$\begin{pmatrix} \tau_{-n}^{(n)} & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{-n+1}^{(n)} & \tau_{-n}^{(n)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{-1}^{(n)} & \tau_{-2}^{(n)} & \cdots & \tau_{-n}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_{-n+1}^{(n)} \\ d_{-n+2}^{(n)} \\ \vdots \\ d_0^{(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}) \cdots (1 - \epsilon_n \epsilon_{-n}) \end{pmatrix} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(補題 3.4 の証明)
まず次に注意して頂きたい。

注意 3.5.
(38) より $\nu_{\pm j}$, $(j=1,2,\cdots)$ は連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \tau_{\pm 1} & 1 & 0 & \cdots \\ \tau_{\pm 2} & \tau_{\pm 1} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\pm 1} \\ \nu_{\pm 2} \\ \nu_{\pm 3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\pm 1} \\ c_{\pm 2} \\ c_{\pm 3} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

によって定まる。(複号同順)

この注意3.5と補題3.2を組み合わせて帰納法で示していく。まず0でないパラメータが$\epsilon_{\pm 1},\cdots,\epsilon_{\pm k}$ の $2k$ 個のみの場合において 1. と 2. が $n \leq k$ で成立すると仮定する。その下で次の評価を行う。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k+1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k+1)} & \tau_{k-1}^{(k+1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k+1)} - \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k+1)} - \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k+1)} - \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1^{(k+1)} \\ c_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k+1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k+1)} & \tau_{k-1}^{(k+1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{41}$$

右辺第 1 項は注意 3.5 による変形である。ここで補題 3.2 の漸化式 $\tau_j^{(k+1)} = \tau_j^{(k)} + \epsilon_{k+1}\tau_{j-k-1}^{(k)}$ を用いると右辺第 2 項は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k+1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k+1)} & \tau_{k-1}^{(k+1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k)} & \tau_{k-1}^{(k)} & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon_{k+1}\tau_{-k}^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{k+1}\tau_{-1}^{(k)} & \epsilon_{k+1}\tau_{-2}^{(k)} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ d_{-k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ d_0^{(k)} \end{pmatrix} - \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \end{pmatrix}$$

となる。2 行目の変形において再び注意 3.5 と 2. に関する帰納法の仮定を用いた。この式を (41) に代入し, 補題 3.2 の漸化式 $c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \epsilon_{k+1} d_{j-k-1}^{(k)}$ を用いると

$$\text{r.h.s. of (41)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \end{pmatrix} \tag{42}$$

となる。以上より 0 でないパラメータが $\epsilon_{\pm 1}, \cdots, \epsilon_{\pm(k+1)}$ の $2(k+1)$ 個の場合には, 1. が $n \le k+1$ で成立することが示された。続いて $n = k+1$ での 2. の左辺を次のように変形する。

$$\begin{pmatrix} \tau_{-k-1}^{(k+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{-k}^{(k+1)} & \tau_{-k-1}^{(k+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{-1}^{(k+1)} & \tau_{-2}^{(k+1)} & \cdots & \tau_{-k-1}^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{(k+1)} \\ \nu_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \tau_{-k-1}^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_{-k}^{(k)} & \tau_{-k-1}^{(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{-1}^{(k)} & \tau_{-2}^{(k)} & \cdots & \tau_{-k-1}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{-k-1}\tau_0^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon_{-k-1}\tau_{+1}^{(k)} & \epsilon_{-k-1}\tau_0^{(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{-k-1}\tau_k^{(k)} & \epsilon_{-k-1}\tau_{k-1}^{(k)} & \cdots & \epsilon_{-k-1}\tau_0^{(k)} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\cdot \left\{ \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} \\ \nu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k})\epsilon_{k+1} \end{pmatrix} \right\}$$

ただし 0 でないパラメータが $\epsilon_{\pm 1}, \cdots, \epsilon_{\pm(k+1)}$ のみのときには $n = k+1$ での 1. が既に成立していること, 及び補題 3.2 の漸化式 $\tau_j^{(k+1)} = \tau_j^{(k)} + \epsilon_{k+1}\tau_{j-k-1}^{(k)}$ を用いた。さらに帰納法の仮定と注意 3.5 を用いて変形すると,

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ d_{-k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ d_0^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \end{pmatrix}$$

$$+\epsilon_{-k-1} \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k})\epsilon_{k+1}\epsilon_{-k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{-k)}^{(k+1)} \\ d_{-k+1)}^{(k+1)} \\ \vdots \\ d_0^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_{k+1}\epsilon_{-k-1}) \end{pmatrix}$$

となる。よって 0 でないパラメータが $\epsilon_{\pm 1},\cdots,\epsilon_{\pm(k+1)}$ の $2(k+1)$ 個の場合には, 2. も $n \leq k+1$ で成立することが示された。

(補題 3.4 の証明終わり)

この補題 3.4 を用いて今度は次の補題を示す。

補題 3.6.
$n \geq 1$ とする。次が成立する。

$$\begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & -1 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(n)} \\ \vdots \\ \tau_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_n\epsilon_{-n}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(補題 3.6 の証明)
これも帰納法で証明する。$n=k$ で命題が成立すると仮定すると, $n=k+1$ においては, 補題 3.4 の 1. と 2. を用いて

$$\begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1}^{(k+1)} & \cdots & \nu_{-k-1}^{(k+1)} \\ \nu_1^{(k+1)} & -1 & \cdots & \nu_{-k}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k+1)} & \nu_k^{(k+1)} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ \tau_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1}^{(k)} & \cdots & \nu_{-k-1}^{(-k)} \\ \nu_1^{(k)} & -1 & \cdots & \nu_{-k}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} & \nu_k^{(k)} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. +(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \epsilon_{-k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ \tau_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\tau_j^{(k+1)}$ の漸化式を用いて引き続き変形すると,

$$= \begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1}^{(k)} & \cdots & \nu_{-k-1}^{(-k)} \\ \nu_1^{(k)} & -1 & \cdots & \nu_{-k}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{k+1}^{(k)} & \nu_k^{(k)} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1^{(k)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{-k}^{(k)} \\ \vdots \\ \tau_{-1}^{(k)} \end{pmatrix} \right\}$$

$$+(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \begin{pmatrix} \epsilon_{-k-1}\epsilon_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \epsilon_{k+1} \end{pmatrix}$$

となる。ここで帰納法の仮定と注意 3.5 を用いてさらに引き続き変形すると,

$$
= \begin{pmatrix} -(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \\ 0 \\ \vdots \\ c_{k+1}^{(k)} \end{pmatrix} + \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} c_{-k-1}^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ -(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \end{pmatrix}
$$
$$
+(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) \begin{pmatrix} \epsilon_{-k-1}\epsilon_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \epsilon_{k+1} \end{pmatrix}
$$

となる。これに引き続き $c_{\pm(k+1)}^{(k)} = 0$ を代入すると,

$$
= \begin{pmatrix} -(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_{k+1}\epsilon_{-k-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる。よって $n = k+1$ でも命題は成り立つ。

(補題 3.6 の証明終わり)

この補題 3.6 を用いると (39) 式は次の帰納法より直ちに導かれる。

$$
\begin{aligned}
I_{k+1} &= \left| \begin{pmatrix} -1 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-k} \\ \nu_1 & -1 & \cdots & \nu_{-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_k & \nu_{k-1} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau_1^{(k)} & 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{(k)} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} -(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-k} \\ 0 & -1 & \cdots & \nu_{-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \nu_{k-1} & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(1-\epsilon_1\epsilon_{-1})\cdots(1-\epsilon_k\epsilon_{-k}) I_k.
\end{aligned}
$$

(定理 3.3 の証明終わり)

参考文献

[1] M. Adler, P. van Morebeke, A matrix integral solution to two-dimensional W_p-gravity, Commun. Math. Phys. 147 (1992) 25-56.

[2] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials, J. Math. Phys. 50 (2009) 095215.

[3] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, second ed., Oxford University Press, New York, 1995.

[4] J. Shiraishi, A Family of Integral Transformations and Basic Hypergeometric Series, Commun. Math. Phys. 263 (2006) 439-460.

[5] J. Shiraishi, Y.Tutiya Periodic ILW equation with discrete Laplacian, J. Phys. A. 42 No.40 (2009) 404018.

[6] Y.Tutiya, J. Shiraishi, On some special solutions to periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian, arXiv:0911.5005