

# 非線形可積分発展方程式の弱解と その代数幾何学的基礎をめぐって

— 近年の成果の展望 —

阿部剛久 (Takehisa Abe)

芝浦工業大学 (Shibaura Institute of Technology)

ソリトン方程式を代表する KdV ( Korteweg-de Vries ), KP ( Kadomtsev-Petviashvili ) の各方程式等は早くからよく知られ、また近年に発見された Harry-Dym 型や新しい型の浅水波方程式等に関しては、様々な物理学的応用の中でそれらの大局的に '滑らかでない'、新しいタイプのソリトン解を見出してきた。これらの解法には、通常よく知られたいくつかのものがあ

るが、解が弱解として構成される比較的古くからある代数幾何学的手法は一般によく知られているであろうか。

はじめに：代数幾何学的方法による非線形発展方程式の解法小史および本論の目的

時空的に滑らかでない弱解としての有限空隙解の構造的性質、その他に関する近年の成果を方法的基礎とともに紹介する。

対象とする発展方程式は、KdV 方程式やその空間的 2 次元化である KP 方程式など、基本的によく知られたソリトン方程式であるが、ここではこの種の方程式の解が区分的に滑らかな有限空隙的弱解として特徴づけられるような新しい型のソリトン方程式の階層に属した方程式を主に指している。これらのうちで特に近年見出された Dym 型方程式と新しい浅水波方程式等は、'ピーコン (peakon)' とよばれるピークした滑らかでないソリトン解をもつ発展方程式であることが以下の本論で明らかにされる。また、代数幾何学的基礎とは、これらの方程式の弱解を構成する手法であるとともに理論的基礎であることを主張するものである。

さらに、一方法的基礎としての代数幾何学 (の一部) が非線形可積分発展方程式の解法に寄与した歴史的概要を得ておくことも無益ではあるまい。それは、近年に開発された広田の直接法 (双線形化法) や逆散乱法に先立った古典的手法の存在の史的認識と、その近代化による有効性の今日的理解につながるからである。

ところで、応用上の歴史を述べる前に数学の基礎理論としての形成発展の歴史に触れておきたい：ここでいう代数幾何学的方法とは、1 変数代数関数体の解析的理論である。C. F. Gauss と N. H. Abel に始まる楕円関数 (楕円積分の逆関数) の理論は、Abel 以後、楕円積分の拡張としての一般の代数関数 (複素係数の 2 変数既約多項式で与えられた方程式  $P(z, w) = 0$  を満たす一般に多価解析関数  $w = w(z)$ ) の積分の考察に

至った。これがいわゆる Abel 積分であり、その核心をなす Abel の定理は、彼とともにこの理論に大きく貢献した C. G. J. Jacobi の名でよばれる逆問題の肯定的結果とともに、本理論の初期の最も主要な成果の一つである。さらにこれらは、後に応用のための強力な基本的要素となり、われわれが最も必要とする解析的手法である。B. Riemann および K. Weierstrass によるその後の代数関数の解析的理論の 20 世紀前半におよぶ展開も含む歴史的解説の詳細は、岩沢健吉 [1] にある。それ以後、現在にかけては、C. L. Siegel、志村五郎らによる (多変数の) 保形関数論の立場からの研究 (たとえば、[2(b)]) が優位を占め、その関連する諸問題や分野は多岐におよんでいる。これらは将来的に広大な応用基盤の可能性をはらむかのようなものである。

次に、上記に関した理論、特に 1 変数代数関数論の解析的応用による非線形問題の解決の歴史を簡潔に概観しよう。これは年代的に 3 期にわたって行われてきたとしたいが、その妥当性の厳密な検証は今後に残る。

(1) 第一期 (1859—1918) : 剛体力学方程式中心の時代 ([3]、[4]) L. Euler の剛体の回転運動の方程式とその応用問題の一つとして、1758年に始まる彼のこま (top) の問題を端緒として、(J. L.) Lagrange のこま (1788)、および (S. V.) Kovalevskaya (Kowaleski) のこま (1889) 等の非線形可積分力学系の研究が続いたが、中でも Kovalevskaya は、たとえば対称こまの運動は、時間と Euler 角の関係を第一種楕円積分または楕円関数によって、また Euler 角どうしの関係を第三種楕円積分によって、

さらに固定点のない対称こまの運動は時間と Euler 角の関係が超楕円積分によって表されること等を研究。彼女の仕事はこの期を代表する最も顕著な貢献の一種である。そのもっと早い時期に C. Neumann は代数関数の Riemann の理論を完成し、1859年に彼が解いた Euler のこまの運動に関連する Neumann 方程式系は、1980年代に入って有限空隙ポテンシャルとともに考えられたことによって、Neumann の仕事を第一期の幕開けとできよう。1892年、93年以降1900年にかけて、F. Kötter は、溶液中の剛体運動の可積分 (V.A.) Steklov 系を解いたが、彼の論文には、楕円型スペクトルパラメータをもつ Lax 表示が暗に用いられているという点で先見性が評価される。最後に、1893年と1909年に Steklov は2次の Hamilton 関数に対する完全非圧縮性流体中の剛体運動の Kirchhoff 方程式系を解いて以後、Lie 環  $SO(4)$  上の可積分 Euler 方程式系の研究が他の人々によって盛んに行われた。

(2) 第二期 (前半 (1919年—28年); 後半 (1929年—60年代)) : 雌伏時代 ([5], [6])

1919年の J. Drach の2編の自励系の常微分方程式に関する論文は第三期前半に至るまで、また、H. F. Baker の (1897, 1907年の各著書は第一期に属す基礎に貢献したが、) 1928年の Sturm—Liouville 方程式に関する研究はこの期の後半の1960年代に至るまでそれぞれの重要性が理解されず、認められることがなかった。(第三期前半からの B. A. Dubrovin の精力的な活動により、前者は Dubrovin の仕事の先駆的研究として理解され、第三期前半において Drach—Dubrovin 方程式系、後半では  $\mu$  変数表示

系とよばれ、Abel—Jacobi 写像を介して Jacobi の逆問題の解に結ばれる。また N. I. Akhiezer による関数は Baker を先導者として、Baker—Akhiezer 関数といわれ、ブロック解とよばれる一対の関数からなり、コンパクトな Riemann 面上のテータ関数を用いて表され、代数関数論の立場からの応用的扱いを可能にする。だが、これらは後のこととして) この期は概して代数幾何学的手法にとって雌伏の時期であった。

(3) 第三期 (前半 (1970年代—80年代); 後半 (1990年代—現在)) : ソリトン方程式中心の時代 (前半 [5], [6]; 後半 [7]—[15]) 前半は、ここでの方法が主に KdV, KP の各方程式をはじめ、よく知られた型のソリトン方程式への体系的応用を得て、他の方法とともにその有効性を発揮した (文献 [5] の著者でもある田中と伊達の活躍が光る)。詳細は上記の文献に譲る。後半は、新しいソリトン方程式の発見により、今世紀の初めにかけてその解法を一新してきた。その全容を示すことはここでは到底不可能であり、現時点では他の新しく開拓された多くの方法と相まって前期に劣らぬ勢いを維持している。

本論の目的は、第三期後半の2000年初期を中心とした代数幾何学的成果の展望に基づいて、そこでの主要なテーマ：解の構成や構造、その他の関連問題の解説・紹介にある。非線形可積分発展方程式の将来的な展開、その到達点としての成果について、現状を遥かに超えた高いレベルを想像することは至難である。

有限空隙 (的) 解について：ポテンシャルとの関係 この用語は第三期前半と後半に共通して用いられるソリトン方程式の解の呼称であるが、一般的通常的に用いられている言葉でもある。その辺の事情は多分、方程式の解に帰着する有限空隙的 (とよばれている) ポテンシャルに因んで名づけられたものであろう。少し詳しくいえば、 $E_j$ : Sturm—Liouville (1次元 Schrödinger) 作用素  $L = -d^2/dx^2 \mp u(x,t)^{\pm 1}$  の連続

スペクトルの境界とすれば、この作用素のスペクトルは、空隙 (とよぶにふさわしい) 領域:  $(-\infty, E_1)$ ,

$(E_2, E_3)$ , ...,  $(E_{2k}, E_{2k+1})$ , ... によって分離されたスペクトルの、絶対連続成分の閉線分列

$[E_{2k+1}, E_{2k+2}]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) からなり、すべての連続な (準) 周期的ポテンシャル  $u$  に対して、空隙領域の

長さ  $\rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であるが、Sturm—Liouville 作用素のスペクトルにおいては空隙領域の数は有限である

としてよい。このときのポテンシャル  $u$  を有限空隙 (的) ポテンシャルとよび、方程式の解に帰着することからこれを有限空隙 (的) 解とよぶのであろう。ここでは、このようなポテンシャルに対応する構造のより複雑な解としての、一般化された有限空隙 (的) 解の大域的な代数幾何学的記述を見出そうとすることである。その結果、解は区分的に滑らかなピーコンとよばれる新しい型の弱解であることが明らかにされる。

\*1. KdV 方程式が  $4u_t = 6uu_x + u_{xxx}$  の場合は-符号、 $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$  の場合は+符号となる。

## 1. 解の構成以前の手続き

### 1-1. 新型のソリトン方程式と Lax 方程式からの準備：有限空隙解の跡公式と $\mu$ 変数表示系

(1) ソリトン方程式 対象とする Dym、浅水波の各方程式は、それぞれ次の形で与えられる：

$$u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 2\kappa u_x = 0 : \text{HD 方程式}$$

$$u_t + 3uu_x = u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 2\kappa u_x \quad (\kappa: \text{パラメータ}) : \text{SW 方程式}$$

独立変数を  $x, t$ 、未知関数は  $u = u(x, t)$  で水平方向の流速を表し、偏導関数は下つき文字を用いて表される。前者は Dym 階層の方程式、後者は浅水波流体力学の Euler 方程式から導かれた ([22], [15])。

(2) 跡公式 方程式の (有限空隙) 解を構成するための先導的な役割を演じる基本的な公式を跡公式とよぶが、ここでは、HD、SW それぞれの方程式に対する跡公式を導出しておく。そのための重要な最初の手続きは、方程式の階層を Lax 方程式から得ておくことが基本的である。

$$\text{Lax 方程式} \quad \partial L / \partial t_n = [L, A_n] \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad L = -\partial^2 / \partial x^2 + v(E, x, t_n),$$

ポテンシャル  $v(E, x, t_n) = M(x, t_n) / 2E, E$ : 複素パラメータ,  $A_n = B_n \partial_x - B'_n / 2, \exists B_n(E, x, t_n)$

として、 $v$  に対する  $B_n$  の方程式列:  $\partial v / \partial t_n = -\partial^3 B_n / 2\partial x^3 + 2(\partial B_n / \partial x)v + B_n \partial v / \partial x$ , を得る。

このとき、 $\mu_j$ : 種数  $g = n$  の超楕円曲線  $\Gamma: w^2 = C_{2n} \mu \prod_{j=0}^{2n} (\mu - m_j)$  ( $C_{2n}$ : 負定数、 $m_j$ : 定数) の上の点因子  $P_i = (\mu_i, w_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の  $\mu$  座標値  $\Rightarrow$  有限空隙解の跡公式は、次式で与えられる：

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^g \mu_j(x, t) - m, \quad m: \text{定数 (HD 方程式の場合} = 0) \quad (1.1)^{*1}$$

\*1.  $B_n$  を  $n$  次の  $E$  の多項式とする:  $B_n(x, t, E) = b_0 \prod_{j=1}^n (E - \mu_j(x, t)) = \sum_{j=0}^n b_{n-j}(x, t) E^j$ .  $B_n$  の第1式と2式を展開、 $b_0 = 1$  として、両式の  $E^{n-1}$  の係数を比較することによって、 $b_1 = -\sum_{i=1}^n \mu_i$  (1), また、先に定義した  $v$  と上記の  $B_n$

を  $B_n$  の方程式列に代入することによって、Dym 方程式階層の  $n$  番目の方程式を生じる  $B_n$  の係数に対する再帰連鎖を得る。例として、

$t_1 = t, n = 1$  に選んで後、 $B_1(x, t, E) = b_0(x, t)E + b_1(x, t)$  は  $E^1, E^0, E^{-1}$  ごとに係数のなす連鎖を構成(略)、特に  $b_0 = 1$

として、 $v$  の定義式から、 $M$  と  $b_1$  に関する二つの方程式を得る(略)が、 $b_1 = -u$  とすることによって、 $M = -u'' + \kappa$ ,  $\kappa$ : 定

数、を得る。これと省略した二つの方程式の二番目のものを組み合わせて、 $u$  が HD 方程式の解であることが確認できる。よって、 $b_1 = -u$

(2) の正当性を得て、(1) と (2) から跡公式 (1.1) が成り立つ。SW 方程式の場合も同様に示される。なお、上記の省略した二つの方程式は、Alber et al. [11] (2001), p. 202 参照。

参考. KdV 方程式に対する跡公式は、 $g$  を、 $(\mu, w) \in \mathbb{C}^2$  の軌跡とする超楕円曲線  $\Gamma: w^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (\mu - E_j)$  ( $E_j$ : Sturm-

Liouville 作用素の連続スペクトルの境界) の Riemann 面の種数とすれば,  $u(x, t) = 2 \sum_{j=1}^g \mu_j(x, t) - \sum_{j=1}^{2g+1} E_j$ .

(3)  $\mu$  変数表示系 当初の  $v$  に対する  $B_n$  の方程式列は、行列作用素の可換関係式:

$$[\partial/\partial x + L, \partial/\partial t_k + W_k] = 0, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ M/E & 0 \end{bmatrix}, \quad W_k = \begin{bmatrix} -B'_k/2 & B_k \\ -B''_k/2 + B_k M/E & B'_k/2 \end{bmatrix} \quad \text{に同値である.}$$

第1式と第3式の両立条件から次の Lax 対:  $\partial W_n(E)/\partial t_k = -[W_n(E), W_k(E)]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq n$  を得る.

$k = n$  の場合、 $t_n$  を  $x$  とみなして上記の Lax 対を、Lax 対:  $\partial W_n/\partial x = -[W_n, L]$  で置き換える。 $W_n$  は上記の第3式の  $k$  を  $n$  で置き換えたものとなる。両立条件から得た Lax 対の行列方程式の1行2列成分は次の多項式  $B_n(E)$  の  $t_k$  に関する発展方程式を意味している:

$$\partial B_n/\partial t_k = (\partial B_n/\partial x) B_k - B_n (\partial B_k/\partial x), \quad k \neq n \quad (1.2)$$

$k = n$  の場合、 $\partial B_n/\partial t_n = \alpha b_0 \partial B_n/\partial x$ ,  $\alpha$ : 定数で、 $t_n$  をスケールし直すことによって消去できる。

(2) で述べた  $B_n(x, t, E)$  の展開式を式 (1.2) に代入、 $E = \mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と順次置くことによって、定常流の下での  $\Gamma$  上の点因子  $(\mu_i, w_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の発展方程式系:

$$\mu'_i \equiv \partial \mu_i/\partial x = \sqrt{R(\mu_i)}/\mu_i \prod_{j \neq i}^n (\mu_i - \mu_j), \quad R(\mu) = C_{2n} (= -L_0^2) \mu \prod_{j=1}^{2n} (\mu - m_j) \quad (1.3) \quad ^2$$

(SW 方程式の場合、 $R(\mu) = \mu \prod_{j=1}^{2n+1} (\mu - m_j)$ ) に類似の、 $\mu_i$  に対する  $t_k$  に関する発展方程式系:

$$\partial \mu_i/\partial t_k = B_k(\mu_i) \partial \mu_i/\partial x = B_k(\mu_i) \sqrt{R(\mu_i)}/\mu_i \prod_{j \neq i}^n (\mu_i - \mu_j) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.4) \quad ^3$$

また、式 (1.4) において、 $k = 1$  の場合

$$\dot{\mu}_i \equiv \partial \mu_i/\partial t_1 = (\mu_i - \sum) \sqrt{R(\mu_i)}/\mu_i \prod_{j \neq i}^n (\mu_i - \mu_j) \quad (i = 1, \dots, n), \quad \sum = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (1.5)$$

$$B_k(\mu_i) = \text{Res}_{s=0} \prod_{i=1}^n (s - \mu_i) / s^{n-k} (s - \mu_i) \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad ^4$$

式 (1.3) — (1.5) は KdV 方程式の場合の Drach-Dubrovin 方程式系の一般化とみなされ、発展方程式の有限空隙解に対する、いわゆる  $\mu$  変数表示を提示するものとなる (Drach(1919)、Dubrovin(1975)、最近では、Alber et al. [11] (2001)の他に、Alber & Fedorov [13] (2001)参照)。

\*2. 超橢円曲線  $\Gamma: w^2 = \mu C(\mu)$  とかくとき、 $C(E) = E(-B''_n B_n + B_n'^2/2) + B_n^2 M$ , ( $\Gamma: |W_n(E) - zI| = 0$ ,  $z = wE$  から) と表せるから、この式に  $B_n(x, t, E)$  を代入し、 $E = \mu_1, \dots, \mu_n$  と順次置けばよい。

\*3.  $B_n(x, t, E)$  を式 (1.2) に代入して、 $E = \mu_1, \dots, \mu_n$  と順次置く。

\*4. 式 (1.2) の右辺を  $E$  に関して展開し、次数が  $n-1$  の多項式でなければならない条件を用いれば、

$B_k(E) = [B_n(E)/E^{n-k}]_+, [ ]_+ : \text{展開の多項式部分, であることから.}$

参考. KdV 方程式の場合の Drach-Dubrovnik 方程式系は, たとえば田中・伊達 [5] pp. 76-77 に与えられている.

## 1-2. 代数関数体の解析的理論からの準備: Abel の定理と Jacobi の逆問題, および解の存在

(1)  $\mu$  変数表示系と Abel-Jacobi 写像 Abel 積分の言葉は冒頭で現れたが, 一般的に述べれば,  $2 <$  次

数の多項式  $P(z, w) = 0$  を満たす代数関数  $w = w(z)$  を含む有理関数  $R(z, w)$  の積分:  $\int R(z, w) dz$  を Abel 積分とよぶ. これは, 上記の代数関数が定めるコンパクトな Riemann 面上の積分であり, また微分形式  $R(z, w) dz$  を Abel 微分とよんで, Riemann 面上の 1 次元サイクル (輪体) に対する Abel 微分の積分を周期とよぶ. この節では, Riemann 面上の  $\mu$  変数表示系に対する周期 (、より一般的に Abel 積分) の系の標準化への処理に基づいて, 対応するその系の逆問題の解決から, 有限空隙解の存在を得てその構成を目指す.

最初に種数  $g$  の Riemann 面  $S$  上の Abel 積分に関する 2, 3 の準備から始めて, Abel の定理を述べてから, 先に得ておいた  $\mu$  変数表示系の標準化された積分表示式を与えるが, その前に代数幾何学, 特に代数曲線に関する常識的な意味で最も基本的な概念をまとめておく ([1], [2(a)], [16] の他 [5], [6]).

1) 代数曲線に関する基本的事項と Abel の定理 コンパクト Riemann 面を  $S$  として,  $S$  上の因子から始める. この考えは形式的であるが, その有用性はすぐ後で理解できることであろう. 厳密な話は代数関数体の付値から入るのも自然かもしれないが, できる限り簡明に述べる.  $S$  上の因子とは, 点  $p_i \in S, n_i \in \mathbf{Z}$  の 1 次結合  $\mathbf{p} = n_1 p_1 + \dots + n_m p_m$  をいう. 特に,  $m = 1, n_1 = 1$  である因子  $\mathbf{p} = p_1$  (重複のないただ 1 点からなる因子) を素因子, また,  $n_i \geq 0$  である因子を正因子といい,  $\mathbf{p} > 0$  とかく.

重要なことは次のことである: 有理形関数  $f$  または Abel 微分 (1 次微分形式)  $\omega$  の因子であるとは,  $p_i$  がどれも  $f$  か  $\omega$  の零点と極からなる場合をいい,  $p_i$ : 零点 (極) のとき,  $n_i (-n_i)$ : この零点 (極) の位数と定める. Abel 微分の種別については,  $S$  上の各点の近傍でその係数部分 ( $\omega = f(z) dz$  の  $f(z)$ ): 正則のとき,  $\omega$ : 第 1 種, 係数が極をもつが, その留数: すべて 0 のとき,  $\omega$ : 第 2 種, 係数が 1 位の極しかない 2 つの留数の和が 0 である素因子の各ペアをもつとき,  $\omega$ : 第 3 種という.

再び因子関係にもどるが,  $n(\mathbf{p}) = n_1 + \dots + n_m$  と定めた左辺を  $\mathbf{p}$  の次数といい, 特に  $n(\mathbf{p}) = 0$  のとき,  $\mathbf{p}$  を次数 0 (または 0 次) の因子という. また, 有理形関数の因子を主因子という. 後でこの両者の関係が重要な結果につながる事になる. 因子に関する群構造については, まず因子全体は加法に関して Abel 群  $A$  をなし, 主因子全体は  $A$  の部分群  $D$  となり,  $A$  の  $D$  による商群 (剰余類群)  $A/D$  を因子類群とよぶ.

コンパクト Riemann 面  $S$  の種数  $g$  は任意,  $\delta_i (i = 1, \dots, 2g)$ :  $H_1(S, \mathbf{Z})$  の基底となる  $S$  上の 1 次元輪体で, 標準基底 (:  $\delta_i$  は正の向きに一度だけ  $\delta_{i+g}$  と交差するが, 他のどんな  $\delta_j$  とも交差しない基底) とする.

$\omega_i (i=1, \dots, g) : H^0(S, \Omega^1)$  ( $S$  上の正則1次形式の空間、 $\Omega^1$ : 同形式の芽の層) の基底とする。このとき、 $S$  の周期 ( $\delta_i$  に沿う  $\omega_j$  の積分としての) 行列は下記の  $g \times 2g$  行列で与えられる:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \int_{\delta_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\delta_1} \omega_g & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_g \end{bmatrix}.$$

この行列の  $i$  列ベクトルの転置 (ベクトル) :  $\Xi_i = (\int_{\delta_1} \omega_1, \dots, \int_{\delta_i} \omega_g) \in \mathbf{C}^g$  は周期ベクトルとよばれ、各周期ベクトルは  $\mathbf{R}$  上で1次独立であることが示される ([16], p. 228)。 $2g$  個の周期ベクトル  $\Xi_i$  は、 $\mathbf{C}^g$  において格子:  $\Lambda = \{m_1 \Xi_1 + \cdots + m_{2g} \Xi_{2g} \mid m_i \in \mathbf{Z}\}$  を生成する。複素トーラス  $\mathbf{C}^g / \Lambda$  を  $S$  の Jacobi 多様体  $J(S)$  であると定める。この上で単独な正則微分形式  $\omega$  の積分  $\int_p^q \omega$  が、通常は  $\mathbf{C}$  で稠密な  $\omega$  の  $2g$  個の周期を法として定められ、ベクトル  $(\int_p^q \omega_1, \dots, \int_p^q \omega_g)$  は離散格子群  $\Lambda \subset \mathbf{C}^g$  を法とする  $\mathbf{C}^g$  のベクトルとして定義できる。また基点  $p_0 \in S$  を選ぶことによって、自然な写像 (Abel-Jacobi 写像)  $\varphi : S \rightarrow J(S)$  を  $\varphi(p) = (\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_g) \in J(S)$  によって定める。 $D_0(S)$  を  $S$  上の0次因子全体の加法群として  $\varphi$  をもつと一般的に定めれば、下記のようになる:

$$\varphi : D_0(S) \rightarrow J(S) \quad \text{を} \quad \varphi\left(\sum_{j=1}^m p_j - \sum_{j=1}^m q_j\right) = \left(\sum_{j=1}^m \int_{q_j}^{p_j} \omega_1, \dots, \sum_{j=1}^m \int_{q_j}^{p_j} \omega_g\right) \text{ によって定める。}$$

このとき、下記の定理が成り立つ:

**定理 1.1 (Abel の定理)**.  $D = \sum_{j=1}^m p_j - \sum_{j=1}^m q_j \in D_0(S)$ ,  $\omega_i (i=1, \dots, g) : S$  上の正則1次形式の空間の基底とする。 $S$  上のある有理形関数  $f$  に対して、

$$D = (f) \Leftrightarrow \varphi(D) = \left(\sum_{j=1}^m \int_{q_j}^{p_j} \omega_1, \dots, \sum_{j=1}^m \int_{q_j}^{p_j} \omega_g\right) \equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

すなわち、 $S$  上の0次因子  $D$  が主因子であるための必要十分条件は、 $\varphi(D) \in \Lambda$  である。

参考. 定理1.1の証明については、(1)の冒頭文の末尾に掲げた参考文献のどれにも記されている。

## 2) 非標準的 Abel-Jacobi 等式に対する周期写像の拡張的標準化と Jacobi 多様体の一般化 1の1-1

(3)における  $\mu$  変数表示系にもどる。式 (1.3) — (1.5) は、微分  $dt_k, dx$  について整理し直して、通分し、和をとることによって、次式 (Abel-Jacobi 等式):

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^k d\mu_i / \sqrt{R(\mu_i)} = \begin{cases} dt_k, & k=1, \dots, n-1 \\ dx, & k=n \end{cases}. \quad (1.6)$$

を得る。これらの式は、種数  $g = n$  の超楕円曲線  $\Gamma$  上で  $n-1$  個の正則微分形式と1個の有理微分形式を含んでいることになる。正則微分式が Riemann 面の種数より (1つ) 少ないことは、定理1.1とこの定理が

提起する後に述べる (Jacobi の) 逆問題に整合せず、対応する逆問題が  $x$  と  $t_k (k=1, \dots, n-1)$  の有理関数によって解かれ得ないことを意味する。このことから、式 (1.6) は非標準的な Abel-Jacobi 形式である。よってここでの最終的な目標は、その周期写像の拡張的標準化を得なければならない。

等式 (1.6) によって定義される完全非標準的 Abel-Jacobi 写像の逆問題は超楕円曲線  $\Gamma$  の一般化された Jacobi 多様体を用いて研究される。重要なことは、正則な微分形式の完全集合を得るために  $\Gamma$  上に補足的な正則形式を加えることによって、この写像を拡張しなければならない。そして、それに伴う有限空隙解の存在とその構成の役割に決定的な、これまでの標準的な Jacobi 多様体の一般化とその上の逆問題を解かなければならないということである。以下は、しばらくその手続きの概略を見てみよう。

まず非標準的等式 (1.6) は Abel 積分を用いて形式的に下記の Abel-Jacobi 写像に帰着する：

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mu_0}^{\mu_i} \mu^{k-1} d\mu / 2\sqrt{\rho(\mu)} = \begin{cases} t_k + \phi_k, & k=1, \dots, n-1 \\ x + \phi_n, & k=n \end{cases} \quad (1.7).$$

これが可能なのは、写像 (1.7) を得る以前に等式 (1.6) において、 $m_1 = 0$  としておいたからである\*5。

よって、方程式 HD と SW に対して  $R(\mu)$  に代わって、 $\rho(\mu) = -L_0^2 \prod_{i=2}^{2n} (\mu - m_i)$ ,  $\rho(\mu) = \prod_{i=2}^{2n+1} (\mu - m_i)$

$(\mu - m_i)$  がそれぞれ対応し、 $\phi_i (i=1, \dots, n)$ : 定数位相とする。

\*5. 続いて  $m_2 \rightarrow 0 \Rightarrow$  その後は、解の2つの峰状波 (peaked solution, peakon) の距離を連続的に縮めていき、最終的に滑らかな解を得

ることが知られている。この場合は、このような解を得るためではなく、 $m_1 = 0$  は式 (1.7) を得るための操作である。また、 $\mu$  変数表

示系に現れた  $m_i$  は、 $i=1, \dots, n$  に対して、初期値  $\mu_i(x, \cdot) = \mu_i(0, \cdot) \in [m_{2i}, m_{2i+1}]$  の集合を形作り、 $m_1 = 0$  の場合を考

慮すれば、 $[m_1, m_2]$  は初期値の集合としての意味はない。これは区間  $(m_{2i+1}, m_{2i+2})$  についても同様である。ここで、ドットは、時刻  $t$  が表示系のパラメータであることを強調している。これらのことは上記の写像についても受け継がれる。

写像の系 (1.7) について少し詳しく述べておく。Riemann 面  $C: w^2 = \rho(\mu)$  の上で定義された  $n-1$  個の独立な正則微分形式を含み、方程式 HD、SW それぞれに対応する多項式  $\rho(\mu)$  が前者では奇数次の場合、系 (1.7) の最後の等式は第2種有理形式を、後者では偶数次の場合、系 (1.7) の最後の等式は第3種有理形式をそれぞれ含み、各等式がもつ上記の Riemann 面上の特異点は、前者が無窮遠点  $\infty$  で2位の極を、後者は2つの無窮遠点  $\infty_-, \infty_+$  に一對の1位の極をもつ。これらの形式については後に再び述べよう。

Clebsch & Gordon の古典的結果 ([17]) とその Gavrilov による近代化 ([18]) によれば、奇数次の場合のこのような系は明らかに対称積  $C^{\otimes n+1}$  から無窮遠点  $\infty$  に特異点をもつ曲線  $C$  の一般化された Jacobi 多様体  $\text{Jac}(C, \infty)$  への可逆写像であることを意味し、これは、積集合  $\text{Jac}(C) \times C$  に位相的に同値な非コンパクト代数多様体である。同様に偶数次の場合のこの系は、対称積  $C^{\otimes n+1}$  から一般化された Jacobi 多様体  $\text{Jac}(C, \infty_{\pm})$  への可逆写像を定義できて、この多様体は積集合  $\text{Jac}(C) \times C^*$  ( $C^* = C - \{0\}$ : 乗法群) に位相的に同値であることが知られている。また上記の可逆写像とは、拡張された Abel-Jacobi 写像  $\varphi$  を意味している。

## (2) 形式解の存在と Abel-Jacobi 写像への補足事項

1) **Jacobi の逆問題と解の決定因子  $\mu_i$  の存在** 上記の Riemann 面  $C$  と Jacobi 多様体の関係を Abel-Jacobi 写像を用いて定式化することから始めよう。HD 方程式の場合、 $\varphi: C \rightarrow \text{Jac}(C, \infty) \approx \text{Jac}(C) \times C = \mathbf{C}^{g+1}/\Lambda$  (複素  $g+1$  次元のトーラス (輪環群)) ここで  $\varphi$  は、 $C$  上の代数関数体の 0 次因子全体のなす加法群に属する各因子  $\delta = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n q_i$  ( $p_i$ : 零点、 $q_i$ : 極) に対して  $\varphi(\delta) = \left( \sum_{i=1}^n \int_{q_i}^{p_i} \omega_1, \dots, \sum_{i=1}^n \int_{q_i}^{p_i} \omega_g \right) \in \mathbf{C}^{g+1}/\Lambda$  によって定義、 $\Lambda: 2(g+1)$  個の 1 次独立な周期  $\pi_i = \left( \int_{\delta_i} \omega_1, \dots, \int_{\delta_i} \omega_{g+1} \right) \in \mathbf{C}^{g+1}$  によって生成される (加法に関して  $\mathbf{C}^{g+1}$  の部分群となる離散ベクトル群 (格子群))、 $\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{2(g+1)} m_i \pi_i, m_i \in \mathbf{Z} \right\}$ 。SW 方程式の場合は HD の場合に同様である。

Abel の定理(定理 1.1)の主張は、 $\varphi(\delta) \in \Lambda \Leftrightarrow \delta = (f)$  (主因子:  $C$  上のある有理形関数  $f$  の因子) であるから、 $\varphi$  は  $C$  上の 0 次因子群の主因子全体のなす加法群による剰余類群から  $\text{Jac}(C, \infty)$  の中への準同型写像  $\varphi^*$  を引き起こす。すなわち、 $\varphi^*$  が  $\mathbf{C}^{g+1}/\Lambda$  への準同型写像、よって同型写像であり得るかが問題となるが、それは常に肯定的な解決を得ている。これがすなわち、Jacobi の逆問題の解である。通常、標準的に述べられている事柄を、ここ一般化された場合に対応させて述べれば、以下のように結論できる:

**定理 1.2 (Jacobi の逆)**  $\forall$  ベクトル  $\lambda$  に対して、 $\varphi\left(\sum_{i=1}^n (p_i - p_0)\right) = \lambda \in \mathbf{C}^{g+1}$  であるような、すなわちすべての  $j$  に対して、 $\sum_{i=1}^n \int_{p_0}^{p_i} \omega_j = \lambda_j$  ( $j=1, \dots, g+1$ )、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_{g+1})$  となる  $g+1$  個の点  $p_i$  ( $i=1, \dots, g+1$ )  $\in C$ 、および  $p_0$  から  $p_i$  への積分路を見出すことができ、因子は一意的に存在する。

上記の定理によって、われわれの問題の場合は、 $p_i \rightarrow \mu_i$ ;  $p_0 \rightarrow \mu_0$  と置き換えることによって、跡公式 (1.1) をとおして、 $\sum_{i=1}^n \mu_i$  を求めて形式解を知ることができる。

参考. 定理 1.2 の証明の手段の一つとして、種数  $g$  の Riemann 面  $S$  上の因子を  $D$ 、 $D$  上の有理形関数  $f$  の層を  $M(D)$  として、

$H^0(S, M(D))$  の次元  $(D + (f) > 0$  である  $S$  上の  $f$  の 1 次独立元の個数) の決定に寄与する Riemann-Roch の定理については、その参考文献は定理 1.1 の場合と同様である。定理 1.2 の近代的な証明は [16] にある。

2) **形式解の構成に向けて** 形式解を得る前に、Abel-Jacobi 写像 (1.7) について述べた HD、SW それぞれの場合における最後の等式 ( $k=n$ ) のもつ無限遠点での特異点のあり方を考慮して、その特性を明確に表した第 2 種の正規化を伴った表示について先に触れておく。それぞれの形式を  $\Omega_{\infty}^{(1)}$ 、 $\Omega_{\infty}^{(2)}$  とする。



$\Omega_{\infty}^{(1)} = \sqrt{-1}L_0\mu^g d\mu / 2\sqrt{\rho(\mu)} + \sum_{k=1}^g d_k \bar{\omega}_k$ ,  $g = n-1$ .  $\bar{\omega}_k : \mathcal{C}$  上の正規化された正則微分形式

の双対基底、 $d_k : \mathcal{C}$  上のサイクルのすべての標準基底  $A_k$  に沿う  $\Omega_{\infty}^{(1)}$  の周期が 0 となるような正規化定数。

このとき、Abel-Jacobi 写像 (1.7) の最後の等式の示すものは下記の形式となる：

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mu_0}^{\mu_i} \Omega_{\infty}^{(1)} = Z, \quad Z = \sqrt{-1}L_0x + (d, Dt) + \text{定数}, \quad d = (d_1, \dots, d_{n-1})^T, \quad t = (t_1, \dots, t_{n-1})^T.$$

ただし、 $D : (n-1) \times (n-1)$  正規化行列といわれる。 $\Omega_{\infty}^{(1)}$  の場合は以下で述べられる。

## 2. 有限空隙解の構造と性質：ピーコンの代数幾何学的記述

われわれが目指す方程式の解は、定常解を特別な場合とする非定常解であり、この結果を最終的に得ることであるが、定常解が非定常解に影響する力学的特性は重要であるから、この点に関する基本的な解（ピース）の導入と表示について概略的にコメントしておく。詳細は文献 [11] (pp. 215—216) を参照せよ。

(1) テータ関数と形式解 HD、SW それぞれの方程式の解の表示を得る最初の段階に達した。そのために必要な基本的な関数が（一般化された）テータ関数である。Abel トーラスや Abel 関数<sup>\*1</sup> に関連して、 $V$  を  $g$  次元複素ベクトル空間、 $\Lambda$  をこれまでに同様な格子群とすれば、複素トーラス  $V/\Lambda$  が Abel トーラスであるための同値条件 (Riemann の条件) が知られている (たとえば、[6]、p. 34)。その条件の記述に用いられる行列  $B$  は性質： $B = B^T$ ,  $\text{Re } B < 0$  をもっているが、この行列を用いて種数  $g$  の Riemann 面上のテータ関数  $\theta$  は多次元フーリエ級数によって定義される (たとえば [6]、[19])：

$$\theta[B](z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\left\{\frac{1}{2}(m, Bm) + (m, z)\right\}, \quad z \in \mathbb{C}^g, \quad (\cdot, \cdot) : \text{スカラー積}$$

まず HD 方程式の形式解に対するテータ関数を用いた表示から始めよう。無限遠点  $\infty$  は  $\Omega_{\infty}^{(1)}$  の極であるから、基点  $P_0 = (\mu_0, w_0)$  を選んで、 $\mathcal{C}$  上の Weierstrass 点<sup>\*2</sup> とする。具体的に表せば、 $P_0 = (m_{2n}, 0)$  と

する。Jac( $\mathcal{C}, \infty$ ) に伴う一般化されたテータ関数に留数定理を適用して、Abel-Jacobi 写像の系 (1.7)

の Jacobi の逆問題の解 ( $\mu_i$  の総和) を求め、跡公式 (1.1) によって形式的な解を得る。この過程は省略

するが、詳しくは Alber & Fedorov ([13]) を参照するとよい。下記の結果を得る：

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = C_1 - Z^2 + \frac{2Z\partial_v \theta[\Delta + \eta_{2n}](z) - \partial_v^2 \theta[\Delta + \eta_{2n}](z)}{\theta[\Delta + \eta_{2n}](z)}, \quad (2.1)$$

$$Z = \sqrt{-1}L_0x + (d, Dt) + Z_0, \quad z = Dt + z_0 \in \mathbb{C}^{n-1}, \quad Z_0, z_0 = \text{定数}, \quad C_1 = \sum_{i=1}^g \int_{A_k} \mu \bar{\omega}_k + m_{2n}.$$

$\Delta$  : Riemann の定数ベクトルに対応する半整数テータ標数、 $\eta_{2n}$  : 点  $(m_{2n}, 0)$  のラベル、 $V$  : 正規化行列

$D$  の最後の列 =  $(D_{1g}, \dots, D_{ng})^T$ ,  $\partial_v = \sum_{i=1}^n V_i \partial / \partial z_i$  であるが、上記の公式では、 $\partial_v = \partial_{z_1}$  を意味する。

HD 方程式の場合の形式解 (2.1) は変数  $x, t_1, \dots, t_{n-1}$  に関して有理形関数である。

次に SW 方程式の場合の形式解である。まず、HD の場合と同様に、 $\infty_-, \infty_+ \in \mathcal{C}$  に一对の 1 位の極をもつ正規化された第 3 種形式と Abel-Jacobi 写像 (1. 7) の最後の式は下記の式で与えられる：

$$\Omega_{\infty_{\pm}} = \mu^g d\mu / 2\sqrt{\rho(\mu)} + \sum_{k=1}^g \bar{d}_k \bar{\omega}_k, \quad \sum_{i=1}^n \int_{m_{2n+1}}^{\mu_i} \Omega_{\infty_{\pm}} = Z, \quad \bar{d} = (\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_g) : A_k \text{ に沿う周期の}$$

すべてが 0 であるように選ばれた正規化定数。このとき、HD の場合と同様に、 $\text{Jac}(\mathcal{C}, \infty_{\pm})$  に伴う一般化されたテータ関数に留数定理を適用して、下記の公式を得る：

$$\sum_{i=1}^n \mu_i + m = C_2 - \frac{e^{-z} \theta[\Delta](z - \hat{q}) + e^z \theta[\Delta](z + \hat{q})}{\theta[\Delta](z)}, \quad (2.2)$$

$$Z = x + (\bar{d}, Dt) + Z_0, \quad z = Dt + z_0 \in \mathcal{C}^g, \quad \hat{q} = \left( \int_{\infty_-}^{\infty_+} \bar{\omega}_1, \dots, \int_{\infty_-}^{\infty_+} \bar{\omega}_g \right)^T \in \mathcal{C}^g, \quad Z_0, z_0 = \text{定数.}$$

上記の 2 つの公式が、HD、SW それぞれの方程式の形式解を表したものとなる。

ところで、これらが形式解であるのは、解が以下に述べる欠点をもつという理由に基づく：HD、SW それぞれの方程式の形式解には、これら方程式の力学系としての解の運動学的現象が含まれていないから、これを考慮した解が望まれる。ここでいう運動学的現象とは、解の玉突き運動 (billiard motion) とよばれる反射現象を指す。すなわち、ある変数  $\mu_i$  が零点を通過するとき、点  $P_i = (\mu_i, \sqrt{\rho(\mu_i)})$  は一方の Riemann

面  $\mathcal{C}$  から他方のそれへ、具体的にいえば、たとえば第 3 種微分形式の極  $Q_+$  から他方の極  $Q_-$  へ跳躍 (jump) する。楕円面内ではこのような現象がくり返されて、いわゆる玉突き状の現象が起る。よって、形式解は方程式の大域的な解の状況を備えたものではないからである。以上述べたことを考慮した上で、現象の実質を反映した方程式の大域的な非定常解を得なくてはならない。このためには、定常解が必要である。

**定常解について：ピース解とその力学的特性** 非定常解に上記の性質を反映させるには、定常解において起る玉突き現象の特性を考慮しなければならない。Abel-Jacobi 写像 (1.6) で  $dt_k = 0$  として、新しい空間変数  $x$  を導入  $\Rightarrow$  よく知られた Jacobi 等式を得て、これと式 (1.3) から標準的な Abel-Jacobi 写像：超楕円曲線上の  $n$  個の正則形式からなり、この曲線の  $n$  個のコピーのなす対称積の Jacobi 多様体への写像、を得る。この写像の系に対して、再び Jacobi の逆問題に関する定理 1.2 の適用と、跡公式 (1.1) とによって、 $U = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n a_i + m$ , ( $a, m =$  定数、HD 方程式では、 $m = 0$ ,  $X_i$  : 玉突き運動の起る  $n-1$  次元超楕円面の  $i$  番目の座標) と表せるが、これは形式解であって解の実際を表示し得てはいないから、この楕円面の内部領域をビリヤード球の反復運動空間とするそこでの球の座標を  $X = X(x, t_0)$  とすれば、そのとき、HD、SW 両方程式のそれぞれの定常時の有限空隙峰状解ピーコンは、解のピークをなす点で隣り合った無限個のピース (piece) 解  $U_N = \sum_{i=1}^n X_i^2(x_1, z_N) + \sum_{i=1}^n a_i + m$ , からなり、 $x = x(x_1, z_N)$  : 一般化された (それぞれ異なる) テータ関数の比で表される。  $x_1 (\in \mathbb{R}^1)$  : パラメータ、 $z_N = z_0 + Nq \in \mathcal{C}^{n-1}$ ,  $q$  : 定理 2.1 (1) にある Abel 積分のベクトルに同じ、 $z_0 : t_0$  に依存するこの解の定數位相である。

\* 1. 周期格子群を伴った Abel 関数が存在する場合の複素トーラスの呼び名。  $2g$  個の独立な周期をもつ  $g$  複素変数の有理形関数を Abel 関数といひ、たとえば (1) のはじめに記したテータ関数を用いて、適当な周期格子群を選べば構成可能である。

\*2. 因子  $kp$  のどれも非正則、換言すると、点  $p$  を位数  $\leq g$  である極として  $S - \{p\}$  上で正則な  $S$  上の有理形関数が存在すれば、 $p$  を Weierstrass 点(W-点)という。種々な W-点が考えられ、これらを特徴づけることができる (たとえば, [16])。

(2) 非定常解の大域的構造: 区分的に滑らかな弱解としてのピーコン 解として最終的な目標である非定常 (すなわち、時間依存) 解に対して、その構成と構造について結果を述べよう:

**定理 2.1 (1) HD 方程式の場合** 非定常解 (ピーコン) を  $u(x,t) = U(x,t)$  とすれば、 $U(x,t)$  は

$\mathbf{R}^n = \{x, t_1, \dots, t_{n-1}\}$  において、次の有理形関数によって表された無限個のピース解  $U_n(x,t)$  からなる:

$$U_n(x,t) = C - Z_N^2 + \frac{2Z_N \partial_V \theta[\Delta + \eta_{2n}](z_N) - \partial_V^2 \theta[\Delta + \eta_{2n}](z_N)}{\theta[\Delta + \eta_{2n}](z_N)}, \quad N \in \mathbf{Z}, \quad (2.3)$$

$$z_N = Dt + Nq + z_0, \quad Z_N = \sqrt{-1}L_0 x + (d, z_N) + Nh + Z_0, \quad Z_0, z_0 = \text{定数}, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{n-1}),$$

$h = \int_Q^{\Omega} \Omega_\infty^{(1)}$ ,  $q = \left( \int_Q^{\Omega} \bar{\omega}_1, \dots, \int_Q^{\Omega} \bar{\omega}_g \right)^T$  また、固定した整数  $N$  に対して、対応するピース  $U_N(x,t)$  は、

方程式:  $S_N = \{x = p_N(t)\}$ ,  $p_N(t) = \{\partial_V \log \theta[\Delta + \eta_{2n}](z_N + q/2) - (d, z_N) - Nh\} / \sqrt{-1}L_0$  によって与えられた  $\mathbf{R}^n$  内の非交差超曲面  $S_{N-1}$  と  $S_N$  によって拘束され、隣り合った2つのピース  $U_N(x,t)$  と  $U_{N+1}(x,t)$  は  $S_N$  に沿って互いに接着された状態にある。その結果、超曲面に沿ったピーコンは次式で与えられる:

$$U(p_N(t), t) = C_1 - \partial_V^2 \log \theta[\Delta + \eta_{2n}](z_N + q/2). \quad (2.4)$$

(2) **SW 方程式の場合** (1) と同様に、求める解を  $U(x,t)$  として、対応する関数を順に記述する:

$$U_N(x,t) = C' - \frac{e^{-z_N} \theta[\Delta](z_N - \hat{q}) + e^{z_N} \theta[\Delta](z_N + \hat{q})}{\theta[\Delta](z_N)}, \quad N \in \mathbf{Z} \quad (2.5)$$

$$z_N = Dt + \hat{q}N + z_0, \quad Z_N = x + (\bar{d}, z_N) + N\bar{h} + Z_0, \quad Z_0, z_0 = \text{定数}, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_2), \quad \bar{h} = \int_Q^{\Omega} \Omega_{\infty_1}, \quad \hat{q} =$$

$\left( \int_Q^{\infty} \bar{\omega}_1, \dots, \int_Q^{\infty} \bar{\omega}_g \right)^T$ .  $U_N(x,t)$  は、 $\bar{S}_N = \{x = \bar{p}_N(t)\}$ ,  $\bar{p}_N(t) = \text{定数} - \log \{ \theta[\Delta](z_N - \hat{q} + q/2) / \theta[\Delta] \}$ ,

分母  $\theta[\Delta] = \theta[\Delta](z_N + \hat{q} + q/2)$  から、(1) と同様に、超曲面  $\bar{S}_N$  に沿ったピーコンは次式で与えられる:

$$U(\bar{p}_N(t), t) = C_2 - \partial_V \log \{ \theta[\Delta](z_N - \hat{q}) / \theta[\Delta](z_N + \bar{q}) \} \quad (2.6)$$

**参考.** 第三期前半の KdV, KP, その他のソリトン系列に属す方程式の解のデータ関数による表示については、たとえば [5], [6] を参照。

本定理の証明には、先に概略を述べたピーコンの玉突き運動を考慮した定常解の状況のより詳しい解析、および第2種 Abel 積分の古典的表示法 (Clebsh & Gordon [17]) 等、まだかなりの準備が必要であるためその証明 ([11], pp. 219-221) は省略して、解に関する2, 3の補足をするにとどめたい:

**補足 1** すべての時間変数を固定したとき、ピース解 (2.3), (2.5) は、定常な有限空隙的ピーコンのピース解を提示している。先の定常解によれば、有限空隙解ピーコンの輪郭は、Hooke のポテンシャル<sup>23</sup> 分

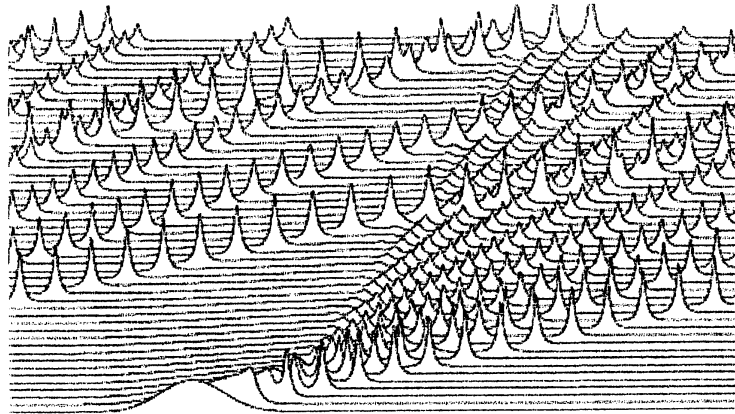
野の測地的な玉突き現象に関係している。すなわち、玉突きによる球の軌跡の境界に当る衝突点は、定常解  $U(x, t_0)$  のピークに対応し、その発生は  $\mu$  変数の一つが零点を通過するときである。

**補足2** 2つの解(2.4)、(2.6)はそれぞれ超曲面に沿って変数  $x, t_i$  に関する偏導関数が不連続である。

このことは、原方程式の解が弱解であることを意味している(以下の3の(2)参照)。

**補足3** 最後に、たとえば文献[15]における方程式に対するピーコンの図を参考までに供しておく。

\*3. Hookeの法則(弾性体の歪は応力に比例する)における応力のポテンシャル(エネルギー)のこと。一般に応力はこれらの関数の偏導関数として与えられる。



ピーコン(Camassa-Holm [15]): Camassa-Holm(CH)方程式の解に対する局所化された(Gauss分布型の)初期条件は、時間が経つにつれて整然と並んだピーコンの列に分裂する(時間軸は垂直方向にとる)。文献[22]で議論されたように、位相のずれの原因となる衝突によって、遅れて発生するピーコンを先導的ピーコンが逆に追いつける状況を許す結果となって、ピーコンの列は、ついに周期領域の周りを覆ってしまう。

### 3. ピーコンの力学

(1) **解のピークの運動学的特性** まず、時間に関して区分的に滑らかなHD方程式の解の、 $N$ 番目のピーク(峰)の速度の表示と関連事項について述べるが、先の定常解に関する補足1で触れた玉突きに関する叙述の後半: 定常解のピークの発生を、非定常解の場合も含めて補足的に述べれば、 $\mu$ 変数の一つが対応する  $w$  の零点を通過するとき、対応する  $P = (\mu, w)$  の一点が一方のRiemann面  $C$  から他方のRiemann面へ(すなわち、ある第3種形式<sup>\*1</sup>の一对の極のうち一方の極から他方の極へ)の跳躍によると説明できる。

$\mu$ 変数の一つが零点を通過する瞬間における点  $P_i$  の  $\mu$ 座標を  $y_i (i = 1, \dots, n-1)$  としよう。 $\mu$ 変数表示系のうちの2種の方程式系(1.3)と(1.4)において、 $m_1 = 0$  とすれば、それぞれは、

$$\text{左辺} = \sqrt{\rho(\mu_n)} / \prod_{i=1}^{n-1} (\mu_n - \mu_i), \quad (3.1) \quad \text{左辺} = \sum_{k=1}^{n-1} (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \sqrt{\rho(\mu_n)} / \prod_{i=1}^{n-1} (\mu_n - \mu_i), \quad (3.2).$$

ここで、 $\sum_k$  は  $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$  の  $k$  番目の対称関数とする。また、ピーク直線  $\{x = p_N(t_k)\}$  に沿って、

$$d\mu_n(p_N(t_k), t_k) / dt_k = \partial\mu_n / \partial t_k + (\partial\mu_n / \partial x)(dp_N(t_k) / dt_k) = 0. \quad \text{式(3.1)、(3.2)および}\mu_n = 0$$

から、 $\sqrt{\rho(0)}((\partial p_N(t)/\partial t_k) + \sum_{k=1}^{n-1}(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}))/\prod_{i=1}^{n-1}\mu_i = 0$ .  $\rho(0) \neq 0$ ,  $\mu_i = y_i (i=1, \dots, n-1)$   
と置き換えて、下記の定理を得る：

**定理3.1** 記号等はすべて上に用いられたものと同じとする。

$$\partial p_N(t)/\partial t_k = -\sum_{k=1}^{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (3.3). \quad \text{特に, } \partial p_N(t)/\partial t_2 = \sum_{i=1}^{n-1}y_i = U(p_N(t), t) \quad (3.4).$$

結果 (3.4) 式は、非定常解  $U(p_N(t), t)$  がピース解  $p_N(t)$  の  $t_2$  に関するピーク速度 (水平方向の流速) であり、またそれはその高さに等しいことを示している。

\*1 Abel—Jacobi 写像の系 (1.6) を2度同値な系に帰着させて後、その系の最後の等式の左辺 ( $\sum_{k=1}^n \int_{\mu_0}^{\mu_k} \Omega_0$ )  $= 2\sqrt{\rho(0)}x_1 +$  定数であるように導入された第3種形式  $\Omega_0$  は留数が  $\pm 1$  である点  $\Omega_x$  に1位の極をもつ形式として、ピークの発生説明に基本的役割をもつ。

(2) **弱解と衝撃** 弱解と弱形式、およびピーコンのピークを形成する曲線を境に偏導関数の不連続的跳躍を衝撃波の発生として弱形式において表すことができる。

$$\text{ベクトル関数 } \mathbf{V} = (V_1, V_2), V_1 = U_x, V_2 = f(U_x) = \partial_x \left[ U^2/2 - \int_{\Omega} |x-y|(U_y^2 - 2\kappa U) dy / 4 \right] \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow \text{HD 方程式} \Leftrightarrow \text{Div } \mathbf{V} \equiv (U_x)_t + (f(U_x))_x = 0 : \text{保存則方程式} \Leftrightarrow \int_{\Omega} \varphi \text{Div } \mathbf{V} dx dt = 0, \varphi(x, t) : \text{平面内}$$

にコンパクトな台をもつ滑らかな関数、ドット  $\cdot : \mathbf{R}^2$  の内積  $\Rightarrow$  (部分積分によって)  $\int_{\Omega} \text{Grad } \varphi \cdot \mathbf{V} dx dt$

$$= 0, \text{ Grad } \varphi = (\varphi_t, \varphi_x) \quad (*). \quad \text{ここで, } U_x \text{ が滑らかであれば, 式 (*) と HD 方程式は同値である}$$

が、 $U_x$  が滑らかでなければ、HD 方程式は意味を失っても、式 (\*) は意味をなす。ここではピークをなす点で  $U_x$  は  $x, t$  に関して不連続であるから、式 (\*) は HD 方程式とは同値でないが、意味をもつ。このように  $U_x$ 、したがって  $U$  を HD 方程式に対する弱解、式 (\*) を弱形式という。SW 方程式の場合は、

$$V_1 = U_x, \quad V_2 = \partial_x \left[ U^2/2 + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} (2U^2 + U_y^2 - 2\kappa U) dy / 4 \right] \quad (3.6)$$

$\Rightarrow$  同様に解  $U$  は弱解である。次に弱形式 (\*) の解  $\mathbf{V}$  が満たす跳躍条件を求めるが、記述は簡略にする。

$U_x$  が不連続となる曲線  $x = q(t)$  に沿う以外は  $U$  は  $\Omega$  で滑らかとして、 $\Omega$  内のその曲線部分によって  $\Omega$  を二つの部分に分割  $\rightarrow$  弱形式 (\*) を ( $\text{Grad } \varphi \cdot \mathbf{V}$  を  $\varphi \text{Div } \mathbf{V}$  にかき換えて後) 分割領域上の二つの積分項

$$\text{と分割曲線上の積分項 } \int_{l: x=q(t)} dl \varphi \mathbf{n} \cdot [\mathbf{V}]^{\dagger} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{V} \text{ はいずれもボールド、} \mathbf{n} \text{ の法線成分} = (-q'(t), -1), [\mathbf{V}]^{\dagger} :$$

$x \rightarrow q(t)^+, q(t)^-$  のときの  $U$  の極限値の差) の三項の和で表す：(3.7)  $\rightarrow \varphi$  の任意性から、式 (3.7)

の右辺の最初と二番目の項はそれぞれどちらかの分割領域で個々に消えて、 $\text{Div } \mathbf{V} = 0$ ：(3.8)  $\rightarrow$  式 (3.

$$7) \text{ の最後の項における跳躍条件は, (3.8) から, } l \text{ に沿って } \mathbf{n} \cdot [\mathbf{V}]^{\dagger} = 0 \Leftrightarrow q[V_1]^{\dagger} = [V_2]^{\dagger} : (3.9)$$

$$\rightarrow \text{式 (3.9) の左辺} = q[U_x]^{\dagger} : (3.10) \rightarrow \text{これらの二式から, } [V_2]^{\dagger} = [(U^2)_x]^{\dagger} / 2 = U(q, t)[U_x]^{\dagger} :$$

(3.11)  $\rightarrow [U_x]^{\pm} \equiv U_x(q^+, t) - U_x(q^-, t) \neq 0 \Rightarrow$  式 (3.10)、(3.11) から、 $\dot{q} = U(q, t) : (3.$

12)。結果 (3.12) は、ピークの生成条件から帰結した定理3.1の後半を、 $U_x$ の不連続条件から導いた跳躍 (衝撃) 部分の移動の速さで一般化したものと考えられる。よって、下記の定理を得る：

**定理3.2** 記号等はすべて上に用いられたものと同じとする。

ピーコンの跳躍の必要条件： $\dot{q} = U(x, t)$ ，すなわち $U_x$ の不連続 (衝撃) 部分は局所的な速さ $U(x, t)$ で移動する。

以上をもって少なくとも当初の目的の半分は果し得たかと思うが、方程式の解法の原理の深さは、単なる数学的なテクニックだけでは済まされないものがあり、予期せぬ理論との関連やその応用に求められるということを示すことができたであろうかと思う。

**結論にかえて：2、3の補足** 結論的な事柄は最初に述べられたから、言い漏らしたことに触れる。

1. Jacobi 多様体の位相的構造については、1-2 (1) の2) で触れた Gavrillov の他に、Fedorov による Jacobi 多様体の一般化と関連した古典的な玉突き問題の解に関する議論 ([20]) が知られている。

2. HD 方程式の定常解に関する楕円面上の運動学的特性は、1990年の Cewen の議論 ([21]) 以後に多くの研究が現れたが、最初の研究は1975年に Kruskal によって先鞭がつけられたとみられる。

3. 補足3のピーコンの図の源となった方程式 (CH 方程式) は、ピーコンを解にもつ新しい浅水波方程式として1993年に Camassa と Holm によって発見された ([22])。

文献 [15] は、CH 方程式の特異解としてのピーコン、この方程式の Euler 方程式の漸近展開からの導出、また古典的な可積分力学系との関係、CH 方程式の高次元への一般化による変分原理に関する Euler-Poincaré 理論等、多彩な話題に触れてこれまでの第三期後半の自他の研究の拡張的發展を試みた意欲的な研究とみられる。

4. 2個の未知関数に関する非線形波動方程式系の新種の解コンパクト (compacton) やピーコン等の従来の解も含む研究 ([23]) が画像とともによく整理されている。方法に関しては、これまでの三つの方法の他に、最近の計算的解法がいくつか挙げられていて興味深い。今後は、より具体的問題とともに一層困難な一般的問題に向けて、複数の方法による解決が同時に要求されたり、方法の総合化や統一的傾向が生じてくるのではないだろうか、と想像したくなる。今後の研究動向の一端がうかがえそうな仕事である。

一般に問題の高レベル化に伴い、方法もより組織化されて有効性を強化することは言うまでもないであろうが、非線形問題の解決ばかりは、非線形性の基礎概念への革命的な観念の到来なしには、本質的に新しい地平の開拓も新しい時代の数学も訪れることは容易でないかもしれない。

## 参 考 文 献

- [1] 岩澤健吉、代数関数論、岩波、1952.
- [2] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory*, (a) Vol. II: *Automorphic functions and abelian integrals* (b) Vol. III: *Abelian functions and modular functions of several variables*, Wiley-Interscience, 1970 & 1973.
- [3] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [4] 阿部剛久、オイラーの不朽の業績、「力学」と「変分法」— 彼の広汎な「数理科学」の基礎をめぐって —、数理解析研究所講義録 1583、「数学史の研究」、pp. 123-146、京都大学数理解析研究所、2008.
- [5] 田中俊一・伊達悦郎、KdV 方程式、紀伊国屋、1979.
- [6] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'ski, A. R. Its & V. B. Matveev, *Algebraic-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer-Verlag, 1994.
- [7] M. S. Alber, R. Camassa, D. D. Holm & J. E. Marsden, The geometry of peaked solitons and billiard solutions of a

- class of integrable PDE's. *Lett. Math. Phys.*, **32**, 137–151, 1994.
- [8] M. S. Alber, R. Camassa, D. D. Holm & J. E. Marsden, On the link between umbilic geodesics and soliton solutions of nonlinear PDE's. *Proc. Roy. Soc.*, **450**, 677–692, 1995.
- [9] M. S. Adler, R. Camassa, Yu. N. Fedorov, D. D. Holm & J. E. Marsden, On billiard solutions of nonlinear PDE's. *Phys. Lett. A* **264**, 171–178, 1999.
- [10] M. S. Alber & Yu. N. Fedorov, Wave solutions of evolution equations and Hamilton flows on nonlinear subvarieties of eneredated Jacobians, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**, 8409–8425, 2000.
- [11] M. S. Alber, R. Camassa, Yu. N. Fedorov, D. D. Holm & J. E. Marsden, The complex geometry of weak piecewise smooth solutions of integrable nonlinear PDE's of shallow water and Dym type, *Comm. Math. Phys.*, **221**, 197–227, 2001.
- [12] M. S. Alber & C. Miller, On peak on solutions of the shallow water equations, *Appl. Math. Lett.*, **14**, 93–98, 2001.
- [13] M. S. Alber & Yu. N. Fedorov, Algebraic geometrical solutions for certain evolution equations and Hamiltonian flows n nonlinear subvarieties of Jacobians, *Inverse Problems*, **17**, No. 4, 1017–1042, 2001.
- [14] 阿部剛久、非線形力学系の可積分性について— 概念の意味と系の拡大化に伴う可積分性の一般化に関する考察 一、数理解析研究所講究録 1368, 「波動の非線形現象とその応用」、pp. 88–95、京都大学数理解析研究所、2004.
- [15] D. D. Holm, Peakons, *Ency. Math. Phys.*, **4**, 12–20, 2006.
- [16] P. Griffith & J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, 1978.
- [17] A. Clebsch & P. Gordon, *Theorie der abelschen Funktionen*, Teubner, 1866.
- [18] I. Gavrilov, Generalized Jacobians of spectral curves and completely integrable systems, *Math.Z.*, **230**, 487–508, 1999.
- [19] J. Igusa, *Theta Functions*, Springer, 1972.
- [20] Yu. N. Fedorov, Classical integrable systems related to generalized Jacobians, *Acta Appl. Math.*, **55**, 3, 151–201, 1999.
- [21] C. Cewen, Stationary Harry–Dym's equation and its relation with geodesics on ellipsoid, *Acta. Math. Sinica* **6**, 35–41, 1990.
- [22] R. Camassa & D. D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1661–1664, 1993.
- [23] Lu Dianchen & Y. Guangjuan, Compacton Solutions and Peakon Solutions for a Coupled Nonlinear Wave Equation, *Int. J. Nonlinear Science*, Vol. 4, No. 1, 31–36, 2007.