

## 接続剛体系における非線形局在モードの相互作用

阪大院・基礎工 渡辺 陽介 (Yosuke WATANABE)<sup>1</sup>,

阪大・基礎工 新井 陽 (Akira ARAI)<sup>2</sup>,

阪大院・基礎工 杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Graduate School of Engineering Science, Osaka University

<sup>2</sup>Faculty of Engineering Science, Osaka University

### 1 はじめに

非線形性が内在する、不純物や欠陥の無い完全な空間周期性をもつ構造において励起される安定な局在振動は、非線形局在モード (Intrinsic Localized Mode: ILM) あるいは離散ブリーザー (Discrete Breather) などとよばれ、近年、特に固体物理学や格子力学の分野で、理論および実験の両面から研究されている現象である [1]–[5]。これらの理論的研究で用いられている解析モデルはいずれも結晶格子モデルを基にしており、本質的に保存系での「縦波」を対象としている。一方、現実に見られる長大構造物は、同じユニットから構成される場合が多く、周期構造をもつものが少なくない。これらの周期構造における波動・振動現象では、結晶格子系の場合とは異なり、たわみ波、すなわち「横波」が重要である。このような周期構造で励起し得るたわみ波の現象を解析するために、筆者らが「接続剛体系 (接続剛体はり)」とよぶ、単純化された力学モデルを提案した [6]。この系に適切な初期条件を与えて数値解析を行うと、非線形性が強く関与した安定な局在振動 (“横波の ILM”) が励起されることを示し、その性質を明らかにしてきた [7]–[9]。この ILM は一般に系内を移動するが、その移動のパターンは初期条件 (系の初期形状) に強く依存する。これは系に端が存在すること (系の長さの有限性) が影響している。これまでの研究では接続剛体系に唯一つの ILM が励起された場合について、その移動パターンを中心に ILM の振る舞いを調べてきたが、本稿では系に複数個 (2 個) の ILM を励起させ、ILM が本質的に移動する性質を用いて、ILM どうしの相互作用の様子について研究を行った。初期条件の与え方、すなわち、二つの ILM の系内での位置、相対的な位相、振幅等によって、ILM は様々な相互作用のパターンを示すが、本稿ではその典型的な場合について報告する。

### 2 解析モデル

まず解析モデルである接続剛体系について述べる。接続剛体系は、多数の同質同形状の剛体の部材 (はりやパネル) が連結部を介して接続された、空間周期性をもつ離散構造である (図 1)。連結部には隣り合う二つの部材のなす相対回転角  $\Delta\phi$  に応じて復元モーメントを与える回転バネが仕込まれており、後述するように、復元モーメントの大きさが  $\Delta\phi$  の 1 次項と 3 次項との和の形によって与えられると仮定している。系の非線形性はこの回転バネの性質と系の変位の有限性を考慮することから現れる。接続剛体系は  $N$  個の部材からなり、各部材は長さ  $l$ 、一様な線密度  $\rho$  を持ち、それぞれの両端で隣接する部材と連結部によりつながっている。 $N$  は  $N \gg 2$  なる有限値であり、系全体の左端と右端は自由であるとする。以下では部材に系の左端から順に番号  $j$  を振り ( $1 \leq j \leq N$ )、 $j$  番目の部材に関する物理量を下付き添字の  $j$  によって表すことにする。

次に系の運動を支配する方程式の導出を行なう。部材の運動を  $x$ - $y$  平面内に限定し、平衡状態に

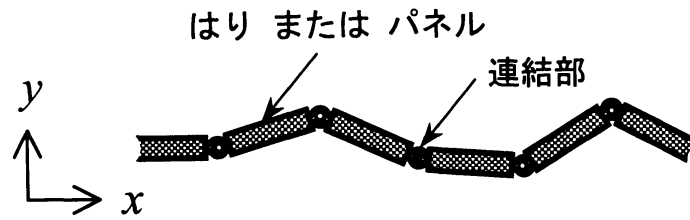


図1: 接続剛体系

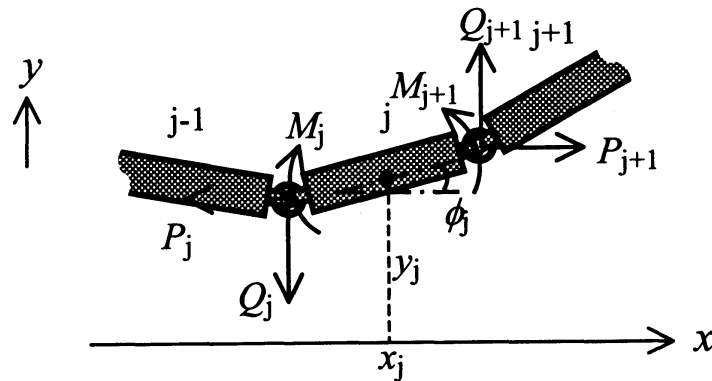
ある系の長手に沿って  $x$  軸をとる。時刻を  $t$ , 各部材の質量中心の座標を  $(x_j(t), y_j(t))$ , 中心軸が  $x$  軸となす角を  $\phi_j(t)$  とすると (図2), 各部材の運動はそれぞれの質量中心に関する,  $x, y$  方向と回転についての運動方程式により記述される。図2において,  $P_{j+1}, Q_{j+1}, M_{j+1}$  は, それぞれ,  $j$  番目の部材の右端に作用する,  $x, y$  方向の力と回転バネによる復元モーメントを表し, 矢印の向きを正にとる。  $j = 1$  の左端と  $j = N$  の右端の条件から,  $P_1 = P_{N+1} = Q_1 = Q_{N+1} = M_1 = M_{N+1} = 0$  である。  $M_j$  は  $K$  と  $K_C$  を定数として

$$M_j = K(\phi_j - \phi_{j-1}) + K_C(\phi_j - \phi_{j-1})^3$$

で与えられるとする。また部材は連結部によって繋がれているので, 連結部での変位の連続を示す幾何学的条件 (束縛条件) が要求される。この条件式は  $x, y$  方向それぞれについて  $j - 1$  個ずつ存在する。以上の運動方程式と束縛条件により, 系の運動を支配する方程式系が構成される。更に, これらの方程式は  $l, \rho, K$  を用いて無次元化される。このとき無次元パラメータ  $\kappa$  が  $\kappa = K_C/K$  により導入され, 非線形性の強さを示す量となる。本稿では  $\kappa \gg 1$  の hard spring ( $\kappa = 1400$ ) を想定している。

導出された方程式系から, 力  $P$  と  $Q$  を消去して, 質量中心位置  $x, y$  と角度  $\phi$  についての方程式系, あるいは更に, かなり複雑な形となるが,  $x$  と  $y$  を消去して  $\phi$  のみについての方程式を導くことができる。

以上定式化された系の線形分散特性を調べておく。無限に長い接続剛体系 ( $N \rightarrow \infty$ ) の平衡状態周りの振動 ( $|\phi| \ll 1$ ) を考える。  $x$  方向の運動 (張力  $P$ ) を無視し, 線形化を行うと,  $\phi$  (もしくは  $y$ ) のみについての微分差分方程式が得られる。無次元の波数と角振動数をそれぞれ  $k, \omega$

図2:  $j$  番目の部材に作用する力とモーメント

として系を伝播する正弦波を

$$\phi_j = \exp [i(kj - \omega t)]$$

と仮定し, この線形方程式に代入すると, 分散関係が

$$\omega = \sqrt{\frac{48 \sin^4(k/2)}{3 - 2 \sin^2(k/2)}}$$

と求められる. 分散曲線を図3に示す. 曲線は  $k$  について周期的であるが, 実際に取り得る最も短い波長は2, すなわち波数が  $\pi$  ( $\pi$ モード) であるから, 図3では  $|k| \leq \pi$  としている.  $\pi$ モードのとき系の中心軸の形状は「ジグザク」となる.  $\pi$ モードでは  $\omega = \omega_0 \equiv \sqrt{48}$  であり,  $\omega_0$  を閾値として低振動数側が線形波伝播帯, 高振動数側が伝播禁止域 ( $\omega_0$  が cut-off 周波数) となっていることがわかる.

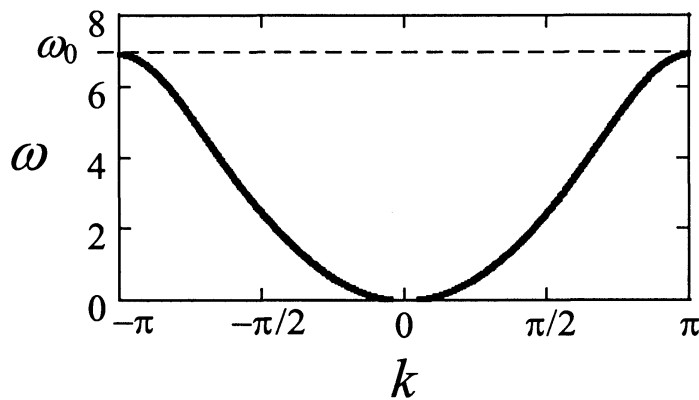


図3: 線形分散関係

### 3 数値解析

#### 3.1 単一の ILM の振る舞い

前章で導出した支配方程式系に対して, 適当な初期条件を与えて数値計算を行なう. 先行する研究により, 系に1つの局在部をもつ波形を初期形状として与えた場合, 1個の ILM を励起できる可能性があることが分かっている [7]–[9]. 角度振幅  $A$  ( $\ll 1$ ) をもつ  $\pi$ モードの定在波を基本とし, これに sech 型の変調を加えた形状を初期条件として与える. すなわち  $t = 0$  で  $\phi_j$  に対して

$$\begin{aligned} \phi_j &= (-1)^j A \operatorname{sech} [\alpha(j - c + s)], \\ d\phi_j/dt &= 0. \end{aligned}$$

ここで  $\alpha$  は変調による局在の幅を示す任意パラメータであり,  $s$  は整数で, 系の対称中心位置  $c \equiv (N + 1)/2$  からのずれを表すパラメータである. ユニット数  $N$  は ILM の移動のパターンが  $N$  の大きさに依存しない程度に十分に大きく取る (本稿では  $N = 64$ ). なお任意の時刻  $t$  における  $x_j(t)$ ,  $y_j(t)$  は変位の連続を要求する式により  $\phi_j(t)$  から定められる. 系に1つの ILM が存在する一例を図4に示す. このとき定数パラメータの値は  $A = \pi/180$ ,  $\alpha = 0.6$  であり,  $s$  の値は典型的な移動パターンを示す  $s = 0, 4, 16, 31$  を選んでいる. 特別な  $s$  の値 ( $s = 0$  等) の場合を除き, ILM は系内を移動することが分かる. なお計算には4次の Runge-Kutta 法を用いている.

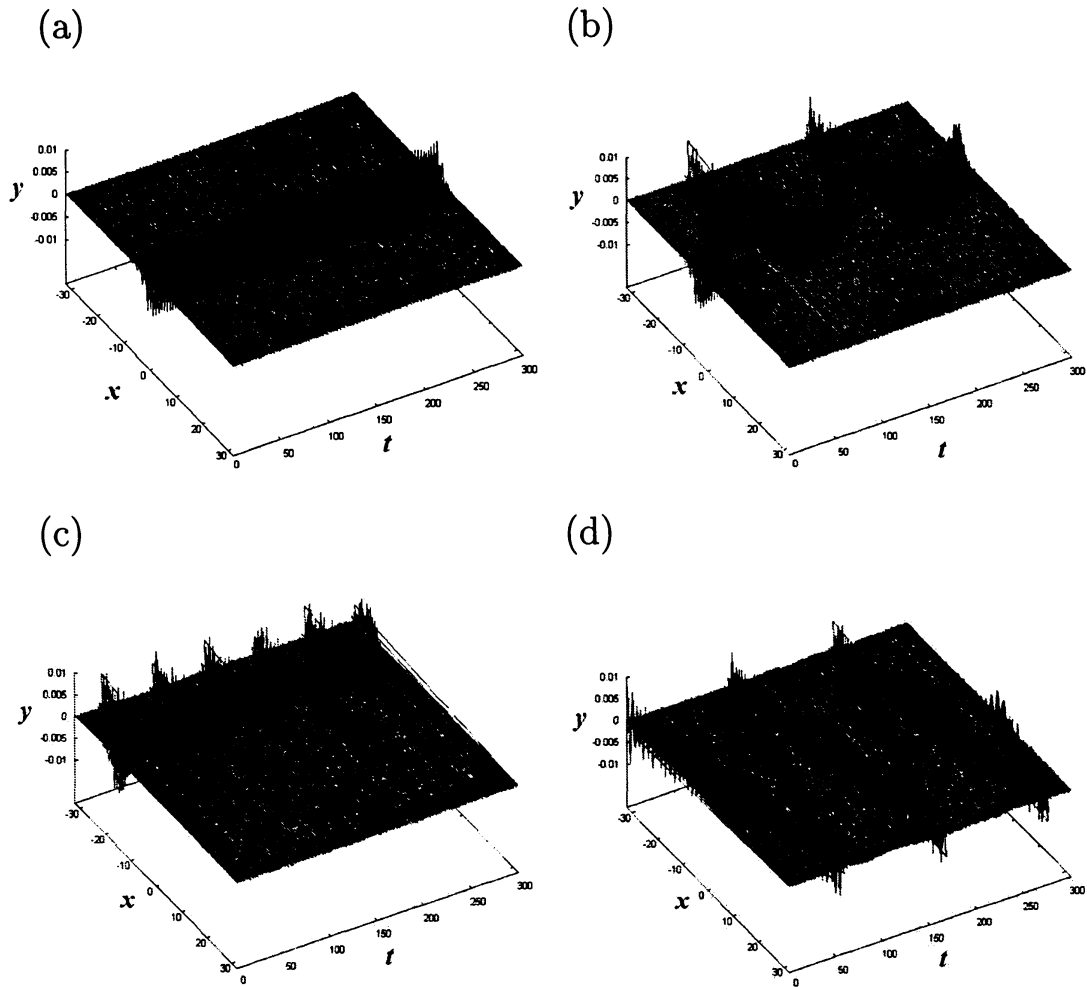


図 4: 系に励起された ILM の時空間発展 ( $0 \leq t \leq 300$ ): (a)  $s = 0$ , (b)  $s = 4$ , (c)  $s = 16$ , (d)  $s = 31$ .

### 3.2 ILM どうしの相互作用

本節では系内に2つのILMを励起させ、前節で示した単一のILMの系内での移動の特性を利用して、ILM どうしの相互作用について調べる。2つのILMを励起するための初期条件は前節を参考に以下の形で与える：

$$\begin{aligned}\phi_j &= (-1)^j \{A_1 \operatorname{sech}[\alpha_1(j - c + s_1)] + A_2 \operatorname{sech}[\alpha_2(j - c - s_2)]\}, \\ d\phi_j/dt &= 0.\end{aligned}$$

以下では  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.6$  を固定し、 $A_1, A_2, s_1, s_2$  の値の代表的な組み合わせについて得られた結果を示す。

#### 3.2.1 対称な位置に励起したILMの相互作用

初期条件として系の中心に関して左右対称な2つの局在部を配置した場合 ( $s_1 = s_2 = s = 4, 16, 31$ ) の数値計算結果を図5に示す。 $A_1 = A_2 = A \equiv \pi/180$  としている。励起した2つのILMはいずれの  $s$  の値の場合にも対称性を保って移動しており、両者が十分に離れている時には

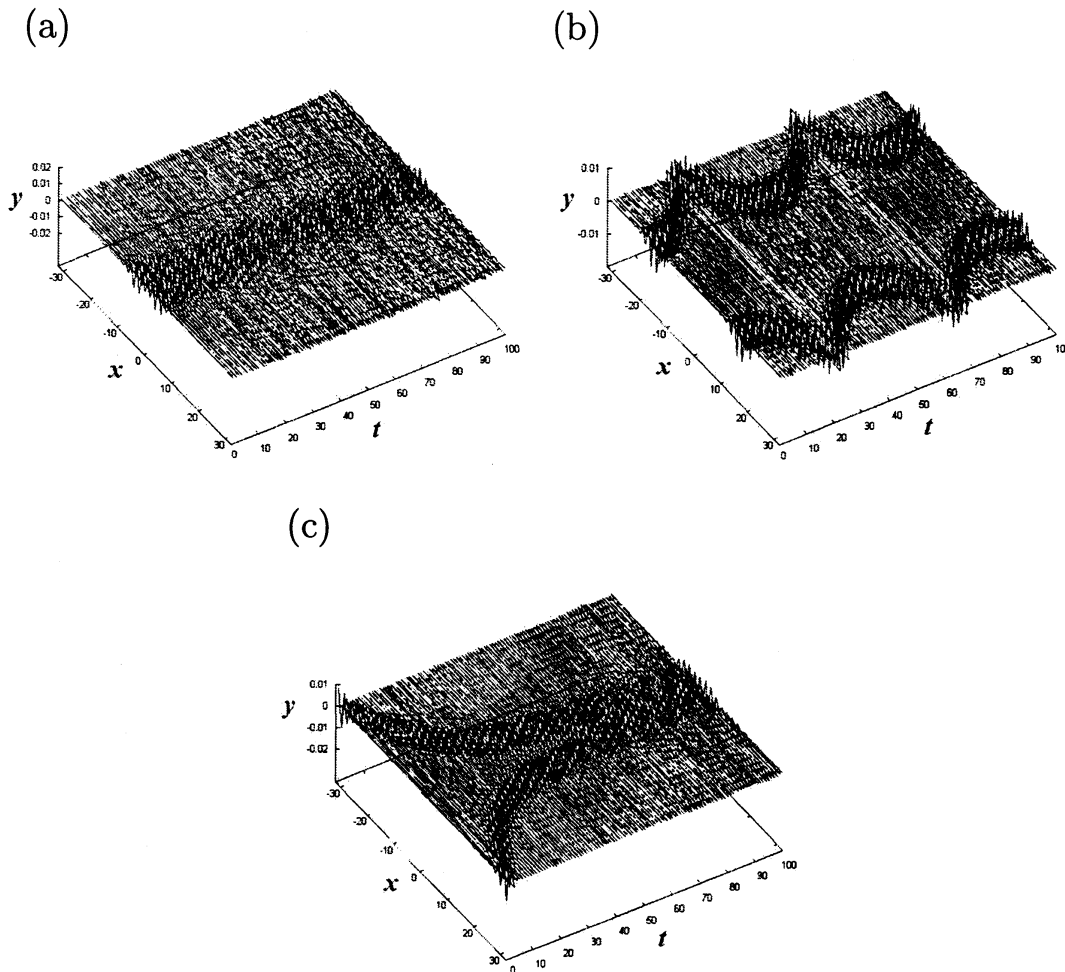


図5: 系が対称形となるように励起された2つのILMの時空間発展の例 ( $0 \leq t \leq 100$ ): (a)  $s = 4$ , (b)  $s = 16$ , (c)  $s = 31$ .

独立に振る舞うが、両者が接近した時には  $s = 4$  と  $s = 31$  とでは異なる様相を示している。  $s = 4$  の場合には両者が「合体」して1つの局在振動に落ち着く傾向が見られるのに対し、  $s = 31$  の場合には両者はいつまでも交わることなく系の中心付近で共存するよう見える。

### 3.2.2 非対称な位置に励起した ILM の相互作用

一方の局在部を系の中心に配置し ( $s_1 = 0$ ) , 他方を中心からずらして配置した場合の典型的な例 ( $s_2 = s = 2, 16$ ) を図 6 に示す ( $A_1 = A_2 = A$ ) . ILM が非対称な位置に励起した場合も、両者が十分に離れている時には、個別に移動することが分かる ( $s = 16$ ) . また両者が極めて近い位置に励起した場合は、あたかも1つの ILM のように振る舞うことが確認できる ( $s = 2$ ) .

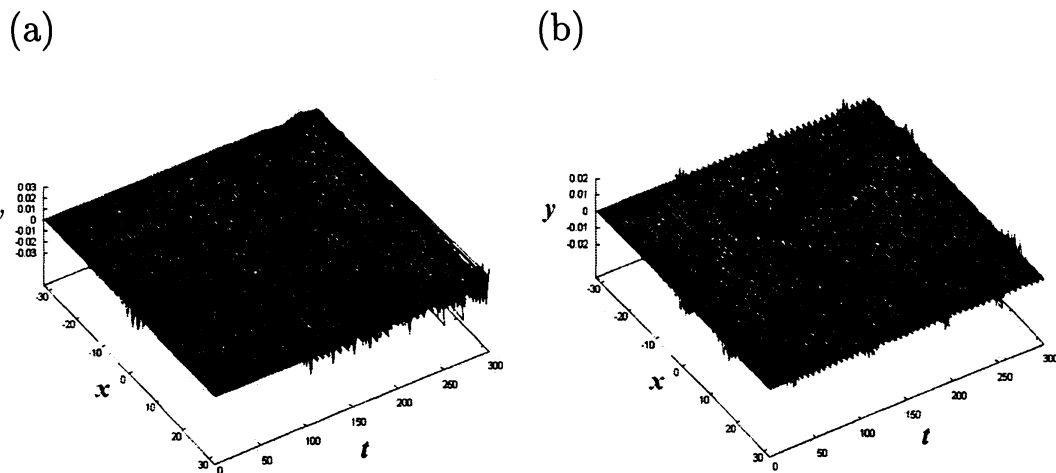


図 6: 系が非対称となる位置に励起された2つの ILM の時空間発展の例 ( $0 \leq t \leq 300$ ): (a)  $s = 2$ , (b)  $s = 16$ .

### 3.2.3 逆位相の ILM の相互作用

$A_1 = -A_2 = A$  ( $s_1 = s_2 = s$ ) とし、2つの局在部の位相が互いに逆になる場合についての計算を行い、3.2.1 節の結果 (図 5) との比較を行う ( $s = 4, 16, 31$ ) . 逆位相の場合は、2つの ILM が一時的に系の中心で接近することがあっても、  $s$  の値に依らず、すぐに反発し合い、それぞれ系の端へ向かう傾向がある (図 7) . 図 5 で見られた、系の中心で1つの ILM になったり ( $s = 4$ ) , 系の中心付近で定在・共存する ( $s = 31$ ) のとは明らかに異なる振る舞いを示している。

## 4 おわりに

本研究では接続剛体系において2つの ILM を励起させ、その相互作用について数値的に調べた。本稿では特に両者が等振幅の場合の計算結果を報告したが、ILM の系内の移動には系の端の存在が強く効いていること、局在部の位相に関して、同位相の場合には“引力”、逆位相の場合には“斥力”的な作用が両者の間にはたらく傾向があることを示した。また本稿では報告していないが、非線形性がより強い ( $\kappa$  の値が大きい) 場合や2つの ILM の振幅が異なる場合についても調べており、“衝突”があってもお互いに独立に移動し続ける (すり抜ける) 場合や両者が一体となって (一方が他方に“吸収”されて) 移動する場合があることなどが明らかとなった。これら初期条件

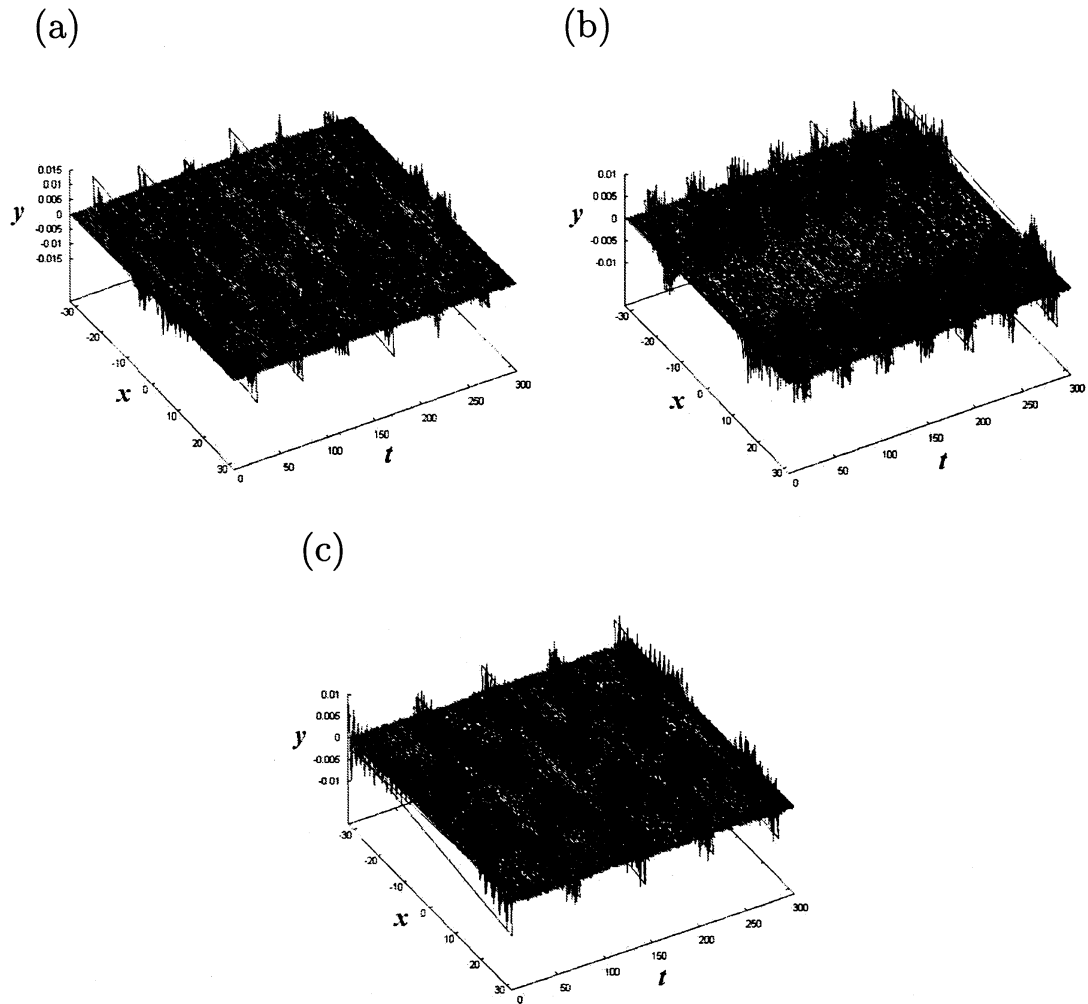


図 7: 系が反対称形となるように励起された 2 つの ILM の時空間発展の例 ( $0 \leq t \leq 300$ ):  
 (a)  $s = 4$ , (b)  $s = 16$ , (c)  $s = 31$ .

と結果との間の関係を統一的に説明できる指標や物理的解釈の提案が今後望まれる。このように接続剛体系における ILM は、励起時の系内での局在部の位置、形状（位相や振幅等）によって、さまざまな相互作用のパターンが存在する。安定な非線形局在モードの存在や局在モード間の相互作用は、連続系におけるソリトンの存在やその相互作用を想起させるかもしれないが、両者は数学的に異なり、ILM はソリトンの場合よりも多様性に富んだモード間相互作用の存在を提示する。

## 参考文献

- [1] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic Localized Modes in Anharmonic Crystals," *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 970-973 (1988).
- [2] 武野正三, "格子力学と非線形波動," 数理科学, **387**, 54-61 (1995).
- [3] D. K. Campbell, S. Flach and Y. S. Kivshar, "Localizing Energy through Nonlinearity and Discreteness," *Physics Today*, **57**, 43-49 (2004).
- [4] M. Sato, B. E. Hubbard, A. J. Sievers, "Colloquium: Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays," *Rev. Mod. Phys.*, **78**, 137-157 (2006).
- [5] K. Yoshimura, Y. Doi, "Moving discrete breathers in nonlinear lattices: Resonance and stability," *Wave Motion*, **45**, 83-99 (2007).
- [6] Y. Watanabe and N. Sugimoto, "Flexural wave propagation in a spatially periodic structure of articulated beams," *Wave Motion*, **42**, 155-167 (2005).
- [7] Y. Watanabe, K. Hamada, N. Sugimoto, "Localized oscillations of a spatially periodic and articulated structure," *Wave Motion*, **45**, 100-117 (2007).
- [8] 渡辺陽介, 濱田和幸, 杉本信正, "接続剛体系を移動する非線形局在モード," 九州大学応用力学研究所研究集会報告 **19ME-S2** 『戸田格子 40 周年 非線形波動研究の歩みと展望』, 145-150 (2008).
- [9] 渡辺陽介, 濱田和幸, 杉本信正, "接続剛体系において境界に捕捉される局在振動," 日本機械学会関西支部第 **89** 期定時総会講演会講演論文集, 1019 (2008).