

## スポット解の斜め衝突について

西浦廉政 北海道大学電子科学研究所      鈴木勝也 北海道大学理学院数学専攻  
nishiura@nsc.es.hokudai.ac.jp                      sue3.no.759@gmail.com

寺本 敬 千歳科学技術大学  
teramoto@photon.chitose.ac.jp

### 1 はじめに

空間局在する動的パターンは神経パルスや化学反応波を始め、散逸系ダイナミクスにおける代表的な局在構造である [1], [2], [3], [4], [5]. 近年はそれらの間の相互作用を論じるのが一つの大きなテーマになっている. 大きな変形を伴わない弱い相互作用は摂動的手法が有効であり, その多くは厳密化も可能である. しかし, 強い相互作用, 例えば衝突して消滅したり, 分裂するようなものについてはまだわかっていないことが多い. とりわけ散逸系に現れる動的空間局在パターンは様々な内部ダイナミクスを内包しており, これが相互作用を豊かな結果に導くと同時に, 理論的扱いを困難にさせている. 西浦らによるこれまでの研究 (例えば [6], [9] およびその文献参照) により, 衝突時の大変形を理解するためには, 安定解のみならず, 不安定な解の族も調べることが重要であることがわかっている. それらは「分水嶺解」とよばれ, 大変形の際の骨格ダイナミクスを与える役割をもつ. 不安定解の族を組織的に求めるにはパラメータに関する大域的な解の追跡とその構造探索が不可欠となる. 本稿では 3 種 Gray-Scott モデルをとりあげ, **2 次元スポット解の斜め衝突問題**を考える. 紙数の関係もあり, 反射-合体の遷移についてのみ議論することとする. 正面衝突と異なり, 衝突軸に関する対称性が破れるため, 進行ピーナツ解などが現れ, それが分水嶺解の役割を果たすことが示される. (関連する文献としては次を参照されたい. [7], [8], [10], [9], [11], [12]. [13]).

#### 1.1 スポット解の正面衝突

正面衝突については, 入力をスポットの衝突, 出力を衝突後の振る舞いとする, この入出力関係を操るのは分水嶺解が成すネットワーク構造であることがこれまで明らかにされてきた [9]. モデル方程式 (1) を用いた空間一様媒質中での振る舞いが数値的に調べられた.  $(x, y)$  空間内で, 対称な位置にスポットを配置して, 衝突後の振る舞いが調べられた. モデル方程式 (1) に含まれる時定数  $\tau$  と反応速度定数  $f_1$  を変化させることにより, 図 1 で表されるように衝突後の振る舞いとして反射 (repulsion), 合体 (fusion+drift), 消滅 (annihilation) がみられた. これらの振る舞いが起

こる各領域の相境界について注意深く調べることが、衝突後の振る舞いの詳細を知る鍵となる。ここでは、図1中Iの境界について説明する。図1FD領域では、衝突時にスポットが合体し、ピーナツスポットとなり、さらに中央部が盛り上がり、合体して単独のスポットとなる。図1RE領域では、スポットが接近し、ピーナツスポットとなるが今度は中央部が減衰して2つのスポットに分かれ、反射 (repulsion) となる。これらのことから、静止ピーナツスポットが擬似定常解 (定常解近くの解) であることがわかり、ニュートン法などを用いることにより相境界の分水嶺解が静止ピーナツスポットであることがわかっている。また、分水嶺解の局所ダイナミクス (固有値, 固有ベクトル) を調べることでその不安定方向に解軌道が駆動されることがわかっている。さらには、大域分岐構造まで調べることで図2のように、分水嶺解とそのネットワーク構造が衝突時の入出力を駆動していることがわかっている。図2は、パラメータを変化させたときの解軌道の様子を模式的に表したものである。パラメータがFD領域にあると、左側の安定多様体と不安定多様体で張られる曲面の上から解軌道は出発し、分水嶺解 (静止ピーナツスポット) に近づくと、分水嶺解同士をつなぐヘテロクリニック軌道に沿って動く。そして、右側の分水嶺解 (大きな静止スポット) の不安定多様体に引っ張られる。これは衝突後、合体することを表す。また、パラメータがRE領域に変わると下側の不安定多様体に引っ張られ、反射となる。

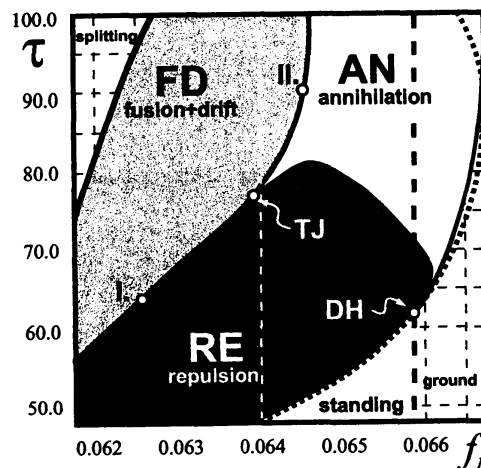


図1 正面衝突の  $(f_1, \tau)$  相図. [9] より引用.

## 2 モデル方程式

### 2.1 3種 Gray-Scott モデル

本研究では、空間2次元におけるスポットの斜め衝突後の振る舞いを次の3種 Gray-Scott モデルを用いて調べる。3種 Gray-Scott モデルの方程式系 (1) は、2種系 (基質 - 消費系) に抑制因子

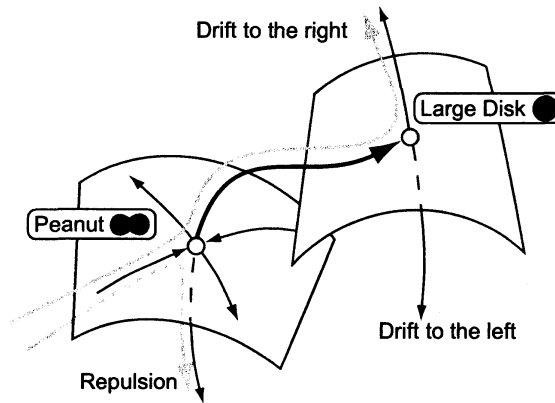


図2 相空間における分水嶺解(サドル解)とそのネットワーク構造の模式図。パラメータを固定し、異なる初期値から解軌道が出発した時、解軌道の動きを追っていくとスポット解の振る舞いがどのように遷移しているか見て取れる。[9]より引用。

$w$ を加えた拡張されたモデルである。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u - \frac{uw^2}{1+f_2w} + f_0(1-u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + \frac{uw^2}{1+f_2w} - (f_0 + f_1)v \\ \tau \frac{\partial w}{\partial t} = D_w \nabla^2 w + f_3(v-w). \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $(f_0, f_1, f_2, f_3)$ 、拡散係数 $(D_u, D_v, D_w)$ 、時定数 $\tau$ は正のパラメータである。

$u = u(t, x, y)$ は反応基質の濃度、 $v = v(t, x, y)$ は活性因子の濃度、 $w = w(t, x, y)$ は抑制因子の濃度をそれぞれ表し、Activator-Substrate-Inhibitor系ともよばれる。

### 3 斜め衝突ダイナミクス ( $\tau=90$ のとき)

#### 3.1 単独スポットの安定性

スポットの衝突問題を考えるとき、安定な進行スポットが存在する必要があるが、 $\tau=90$ のとき安定な進行スポットの存在領域は、 $0.0625 \lesssim f_1 \lesssim 0.0668$ である。ただし、 $f_1 \lesssim 0.0624$ ではスポットは分裂し、分裂領域と進行領域の境界ではサドルノード分岐が起こっているので、この境界付近の進行スポットは分裂不安定性を内在している。また、 $0.0669 \lesssim f_1$ ではスポットは消滅する。これらのことを注意しながら、衝突問題における数値実験を行う。

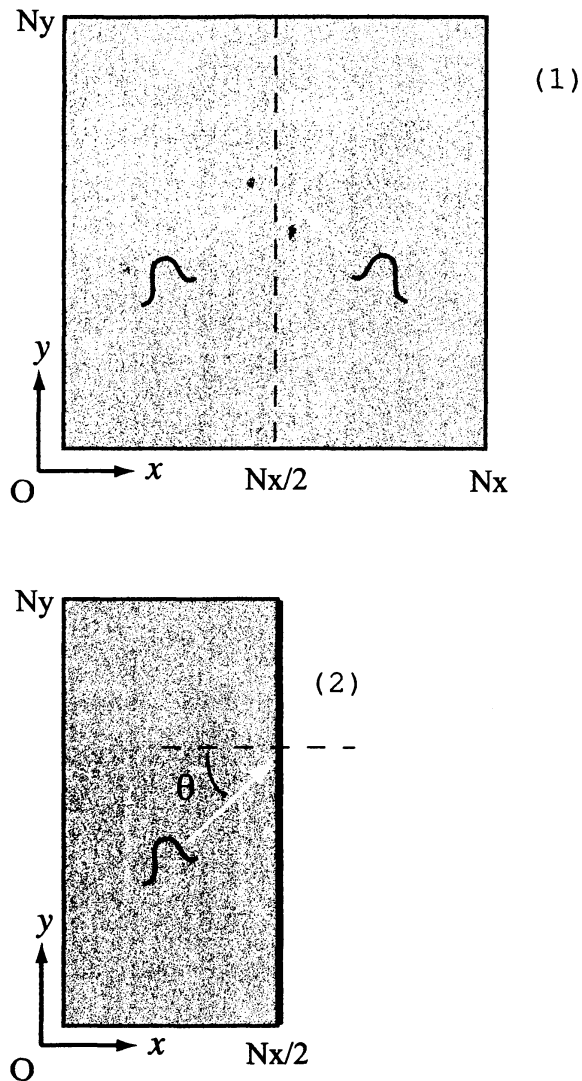


図3 (1)は  $x = \frac{Nx}{2}$  (破線) に関して対称な進行スポット同士の斜め衝突を表した模式図である。(2)は単独進行スポットのノイマン境界壁への衝突を表した模式図である。矢印はスポットの進行方向を表し、矢印と水平方向の破線がなす角を入射角  $\theta$  と表す。

### 3.2 斜め衝突ダイナミクス

スポット同士の正面衝突 [9] で得られた相図 1 の合体 - 消滅境界 (本稿では  $\tau = 90$  を採用) に着目し,  $f_1$  と入射角  $\theta$  の2つのパラメータを変化させる. その結果, 入射角  $\theta$  を0から大きくしていくと, 図4で見られるように, 合体とドリフト - 消滅境界に反射の振る舞いが出現した. これは, 入射角  $\theta$  を大きくしていくと, スポットの速度ベクトルの  $x$  成分がどんどん小さくなり緩やかな衝突となるため, 正面衝突で見られた強い相互作用が働く振る舞い (合体, 消滅) が見られなくなった

と直感的に理解できる。本稿では次節で合体-反射境界に焦点を当て、衝突後の振る舞いがどのような機構により駆動されているかを、合体領域と反射領域の境界付近 ( $\theta \approx 14^\circ$ ,  $f_1 \approx 0.0644650$ ) の挙動を調べるにより明らかにしたい。

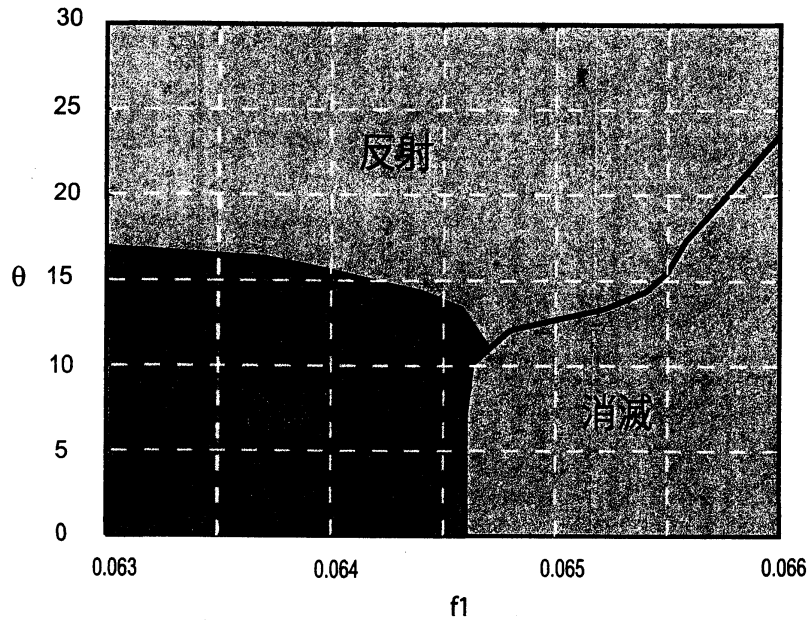


図4 斜め衝突 ( $\tau = 90$ ) の  $(f_1, \theta)$  相図。縦軸は  $\theta$ 、横軸は  $f_1$  を表す。入射角  $\theta$  を大きくしていくと、合体 - 消滅境界に反射が出現した。さらに  $\theta$  を大きくすると反射が振る舞いの大部分をしめるようになる。

### 3.2.1 合体 - 反射境界

#### 分水嶺解とその局所ダイナミクス

境界付近における衝突前後の振る舞いは次のようになる。図5の(a)は合体、(b)は反射を示している。(c)、(d)は、スポットの高さが最大となる  $x$  軸方向の1次元プロファイルの時空間プロットである。注意深く観察すると、 $t \approx 3000$  から  $t \approx 5000$  まで進行ピーナッツスポットの形状に非常に近づいていることがわかる。その後、合体、反射の振る舞いがそれぞれ現れる。

ここで適当な擬似定常解を初期値に、動座標系 (進行速度  $c \approx 0.00024$ ) でニュートン法により方程式系 (1) の定常解となる静止ピーナッツスポット (図6(a)) が得られた。図6(a)は2次元  $xy$  平面を真上から見たものである。元の座標系ではこれは進行ピーナッツスポット (TP:traveling peanut) であることがわかる。

合体の場合の衝突後から最終状態までの遷移過程を大域分岐図である図7と対応させて考える。図7の中央部分の上向き矢印(左)がTPからTSへの遷移を表している。TPの分岐解近くから出発し時間発展に伴い遷移が進むとTSの分岐解に移ることに対応していると考えられる。さらに、この分水嶺解の不安定固有値 ( $\lambda \approx 0.015$ ) に対応する固有関数は、図6(b)のようになる。(b)は2次元  $xy$  平面を真上から見たものであるが、正方向に2山、負方向に1山の形状をしている。図6(c)は、(b)において▲で挟まれた  $x$  軸方向の1次元プロファイルを表しており、正方向に2山、負方向に1山のグラフである。

#### 分水嶺解の摂動実験

合体と反射の振る舞いは、分水嶺解の不安定多様体により駆動される影響される。これは、不安定固有値に対応する固有関数を正の定数倍、負の定数倍したものを摂動として分水嶺解に施すことで、数値的に確かめられる。実際、図6(d)は、負の定数倍した固有関数を摂動(負の摂動)として分水嶺解(進行ピーナッツスポット)に施した様子であり、単独の進行スポットが見られた。これは、合体の振る舞いに相当する。図6(e)は、先程と同様に正の定数倍した固有関数を摂動(正の摂動)として分水嶺解に施した様子であり、ピーナッツスポットから分裂して右上、左上に進行するスポットが見られた。これは、反射の振る舞いに相当する。このようにして分水嶺解の不安定方向のどちらかに影響されることで、振る舞いが隔てられることがわかった。このことから衝突問題の出力関係を表した模式図である図2のように、分水嶺解(TP)から合体、反射の振る舞いが生じると整理できる。

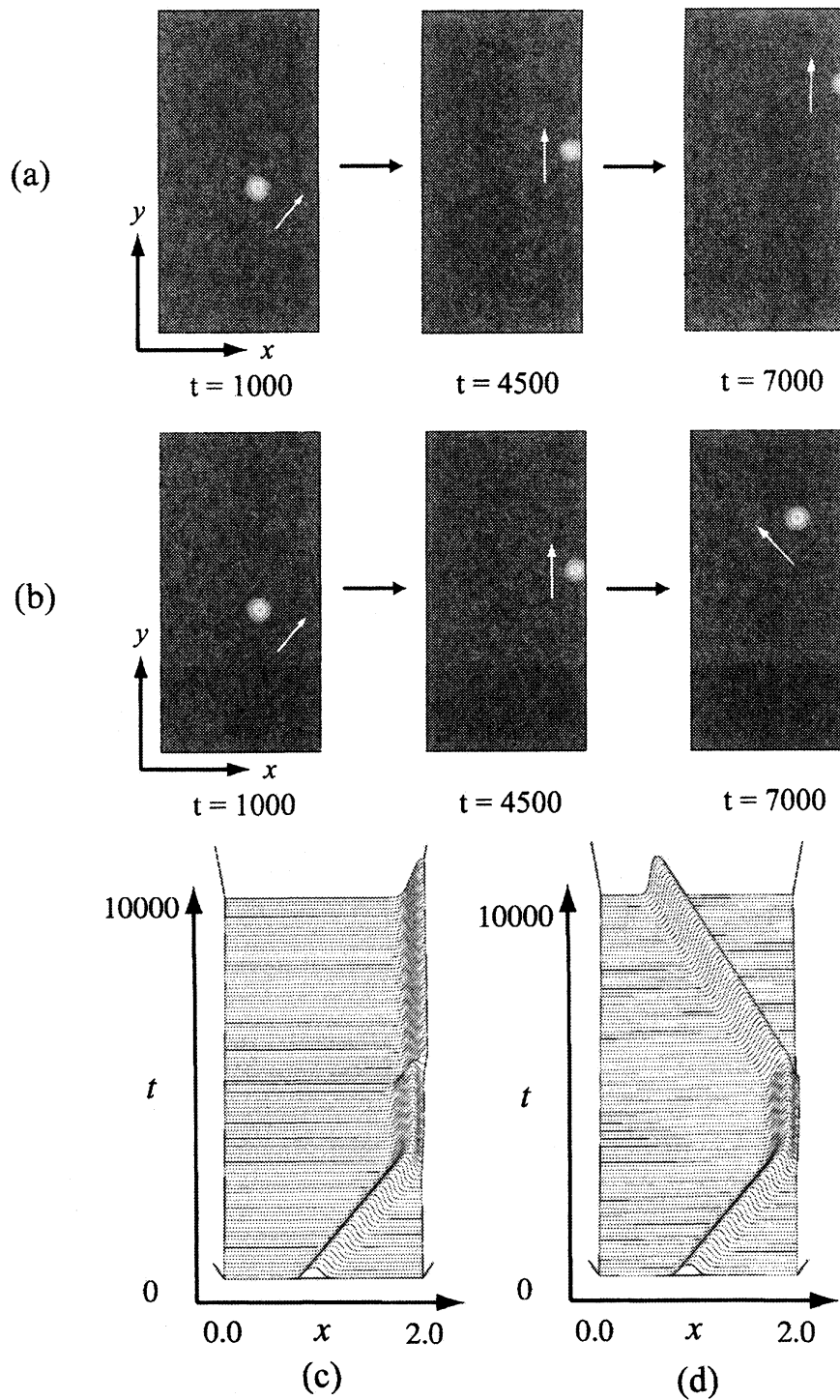


図5 合体 - 反射 境界のスポット ( $\theta \approx 14^\circ$ ,  $f_1 \approx 0.0644650$ ,  $v$  成分) の振る舞い. (a) 合体の振る舞いを表す時間発展の様子. 衝突時に分水嶺解 (TP) に近づき, その後合体し TS となる. 矢印はスポットの進行方向を表す. (b) 反射の振る舞いを表す時間発展の様子. 衝突時に分水嶺解 (TP) に近づき, その後スポットは離れていく. 矢印はスポットの進行方向を表す. (c),(d) はそれぞれ (a),(b) について, 時間ステップ毎にスポットの高さが最大となる  $x$  方向の 1 次元プロファイルを取り出し, 時空間プロットとして表した.

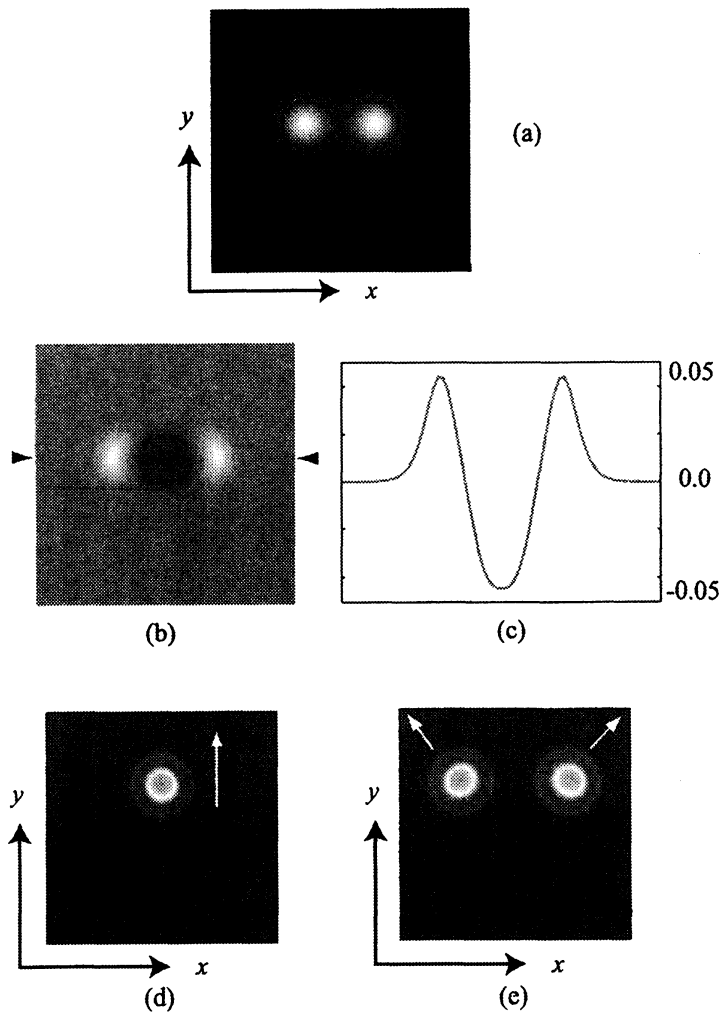


図6 (a) 合体 - 反射境界 ( $\theta \approx 14^\circ$ ,  $f_1 \approx 0.0644650$ ,  $v$  成分) での分水嶺解 (TP) を真上から見た. (b) (a) の不安定固有値  $\lambda \approx 0.015$  に対する固有関数を真上から見た. (c) (b) において  $\blacktriangle$  で挟まれた  $x$  方向の 1 次元プロファイル. 2 つのピーク, 1 つの深い谷を持つ形のグラフ. (d) 固有関数 (b) を  $-0.1$  倍して, 摂動を (a) に施した後の様子. 固有関数 (b) における負の不安定方向に影響され, TS となる. 矢印は進行方向を表す. (e) 固有関数 (b) を  $+0.1$  倍して, 摂動を (a) に施した後の様子. 固有関数 (b) における正の不安定方向に影響され, TP は分裂し, 2 つの TS となる. 矢印は進行方向を表す.

#### 4 まとめ

散逸系に現れる 2 次元進行スポット解の斜め衝突ダイナミクスを考えた. モデル方程式としては Activator-substrate-inhibitor 系とよばれる 3 種反応拡散系を用いた. パラメータに応じて, 合体, 反射, 消滅が衝突後に現れる. 本稿ではとくに合体-反射の遷移ダイナミクスに焦点をあて,



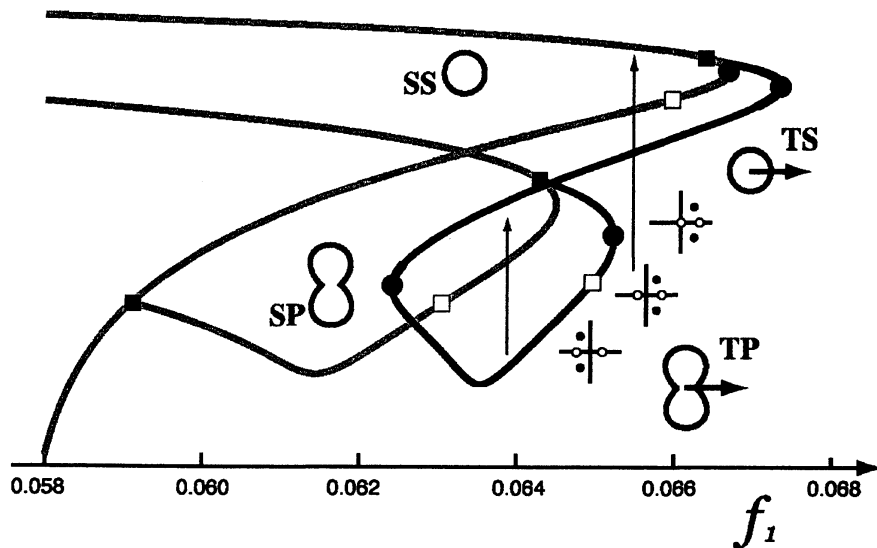


図7 灰線 (SS 近く) が静止スポットの分岐線, 灰線 (SP 近く) が静止ピーナッツスポットの分岐線, 黒線 (TS 近く) が進行スポットの分岐線, 黒線 (TP 近く) が進行ピーナッツスポットの分岐線をそれぞれ表す. ●はサドルノード分岐点, □はホップ分岐点, ■はピッチフォーク分岐点を表している. 中央矢印 (左) は, 進行ピーナッツスポット (TP) から進行スポット (TS) へ振る舞いが遷移することを表している. 中央矢印 (右) は, 進行ピーナッツスポット (TP) から静止スポット (SS) へ振る舞いが遷移することを表している.

進行ピーナッツ解がそのダイナミクスを仕分ける分水嶺解であることが判明した. スペクトル解析および大域分岐解析によりこの遷移ダイナミクスの構造的な理解が可能となった.

## 参考文献

- [1] A.M.Turing, Phil.Trans.Roy.Soc.London, **B327**, 37 (1952).
- [2] Q.Ouyang, H.L.Swinney: Nature vol **352** 610 (1991).
- [3] K.J.Lee, W.D.McCormick, J.E.Pearson, H.L.Swinney: Nature 215 vol **369** (1994).
- [4] Vladimir K. Vanag and Irving R. Epstein: Chaos **17**, 037110 (2007).
- [5] H.H.Rotermund, S.Jakubith, A.von.Oertzen and G.Ertl: Phys.Rev.Lett. **66**, 3083-3086 (1991).
- [6] Y. Nishiura, T. Teramoto and K.-I. Ueda, Phys. Rev. E, **67**: 056210 (2003)
- [7] Y. Nishiura, Y.Oyama, K.-I. Ueda: Hokkaido Mathematical Journal **36**, 207 (2007).
- [8] Y. Nishiura, D. Ueyama: Physica D 150 (2001) 137-62.
- [9] Y. Nishiura, T. Teramoto and K.-I. Ueda: Chaos **15**, 047509 (2005).
- [10] X. Yuan, T. Teramoto, Y. Nishiura: Physical Review E **75**, 036220 (2007).
- [11] 田中一慶: 北海道大学大学院理学院数学専攻修士論文 (2008).
- [12] 西浦廉政, 寺本敬, 上田肇一: 「散逸系における散乱現象 その多彩な入出力関係をめぐって」

数理科学 4 (2003).

- [13] 西浦廉政: 岩波講座 物理の世界 物理と数理 5 自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス, 岩波書店 (2003).