

ソリトン相互作用の有効ポテンシャル

富山大・工 角畠 浩 (Hiroshi Kakuhata)* ,
日大・理工 紺野 公明 (Kimiaki Konno)**

*Faculty of Engineering, University of Toyama

**College of Science and Technology, Nihon University

1 はじめに

ソリトンが衝突しても壊れない波で、衝突によって軌道が変化し位相シフトがおこることはよく知られている [1]。この衝突の際にソリトンを粒子と見なせばソリトン間に力が働いているように見える。ソリトン解からソリトンの相互作用の様子を再現するソリトン粒子の力学を構築することを目指す。

2 連立非分散方程式

連立非分散方程式は外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述し、ソリトンは非線形な外部 Lorentz 力と線形なストリング張力の釣り合いによって形成される。ソリトンは 3 次元 Euclidean 空間 \mathbb{R}^3 中で z 軸上を伝播し、 z 軸の周りに回転するため、ソリトンは 3 次元的に振る舞う。またソリトンは位相速度と角速度によってループであったりなかったりし、このためもあっていろいろなソリトン相互作用パターンがある。連立非分散方程式の運動方程式は

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}), \quad (1)$$

で与えられる。ここに、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル、 τ は時間、 σ はストリングに沿うパラメータであり、 \mathbf{J} は外部電流、を表す [2],[3]。左辺はストリング自体の運動に対応し、右辺が \mathbf{J} がつくる磁場とストリングの内部電流との相互作用に対応する。

3 連立非分散方程式のソリトン解

(1) を成分で書き下す。以下 簡単のため、 $\mathbf{J} = (0, 0, 1)$ とすると

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y. \end{aligned} \quad (2)$$

になる。ここで双線形変換

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{Re} \left(\frac{Q}{F} \right), \quad Y = \operatorname{Im} \left(\frac{Q}{F} \right), \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F, \end{aligned} \quad (3)$$

を行えば、双線形方程式

$$\begin{aligned} (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q^* &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}Q^*Q &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

を得る。ただし、 F は実関数、 Q は複素関数、「 $*$ 」は複素共役を表し、 D は双線形演算子である。

この双線形方程式より、(4) の1ソリトン解は

$$Q = e^\eta, \quad F = 1 + b^2 e^{2\eta},$$

で与えられる。ここで位相は $\eta = k\sigma - \omega\tau + \eta_0$ 、係数 b は $b = \frac{1}{2(\omega + \omega^* - k - k^*)}$ 、分散関係は $\omega^2 - k^2 = -1$ 、である。また、 η_0 、 k 、 ω とはそれぞれ複素初期位相、複素波数と複素振動数である。実空間 \mathbb{R}^3 ではソリトン解は

$$\begin{aligned} X &= A \cos \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Y &= A \sin \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \xi, \end{aligned}$$

その位相、 ξ と ζ および波数 γ は振幅、 A はそれぞれ

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta, \quad \zeta = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}, \\ A &= 2\gamma(1 + v), \end{aligned}$$

で与えられる。ここで v は位相速度 Ω は角速度、 θ と δ はそれぞれ回転と並進の実初期位相である。これから、ソリトンは位相速度 v が大きくなれば、振幅が大きくなり、また、 Z はキंक型であることがわかる。ただし、解が実数であるために、 $-1 < v < 1$ と $\frac{-1}{\sqrt{1 - v^2}} < \Omega < \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ を満足する必要がある。

(4) の2ソリトン解は

$$\begin{aligned} Q &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2} + c_2^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*}, \\ F &= 1 + b_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^*} + b_{12}^{*2} e^{\eta_1^* + \eta_2} \\ &\quad + b_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_2^*} + b_2^2 e^{\eta_2 + \eta_2^*} + d_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*}, \end{aligned}$$

であり、係数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2(\omega_n + \omega_n^* - k_n - k_n^*)}, \quad n = 1, 2, \\ b_{12} &= \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2^* - k_1 - k_2^*)}, \\ c_1 &= 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2) b_1 b_{12}^*, \\ c_2 &= 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2) b_2 b_{12}, \\ d_{12} &= 4|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^2 b_1 b_2 |b_{12}|^2, \end{aligned}$$

ここでも位相は $\eta_n = k_n \sigma - \omega_n t + \delta_n + i\theta_n$ ($n = 1, 2$), 分散関係は $\omega_n^2 - k_n^2 = -1$ である。

4 ソリトン相互作用

この節では非分散連立方程式のソリトンの相互作用を簡単に紹介する。以下では同じ角速度 $\Omega = 0$ で、同じ大きさの位相速度での正面衝突のみ考える。このときには衝突の仕方によって3つのパターンがある。すなわち、正（負）の振幅同士の衝突のときは、小さい相対速度では弾くように衝突し、大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。正と負の振幅の衝突のときには、小さいループが一時的に消え、大きいループがさらに大きくなる (図 1)。直交するループの衝突も同様であるが、ソリトン同士が近づくにつれ、2つのループが同一の平面上にのるように相互作用する (図 2)。

5 ソリトンの軌道

前節のようなソリトン相互作用をソリトン粒子の相互作用として理解しようとするとき、ソリトンの位置を τ の関数として表せば加速度を計算でき、そのとき、ソリトン間に働く力が引力か斥力かを知ることができるだろう。ソリトンの位置をソリトンのピークの位置であるとする。以下では、前節と同じ状況を考え、右進行（大きい）ソリトンを soliton-1, 左進行（小さい）ソリトンを soliton-2 とする。 $\Omega = 0$ なので z 成分のみ考察する。このとき2つのソリトンの波数 γ は等しく

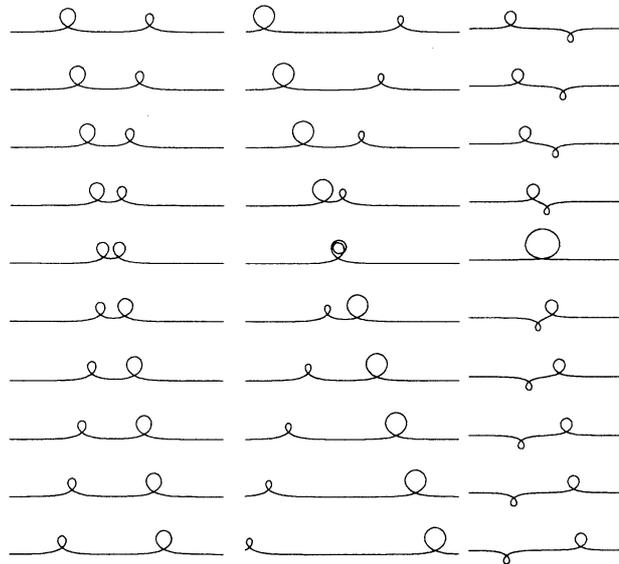
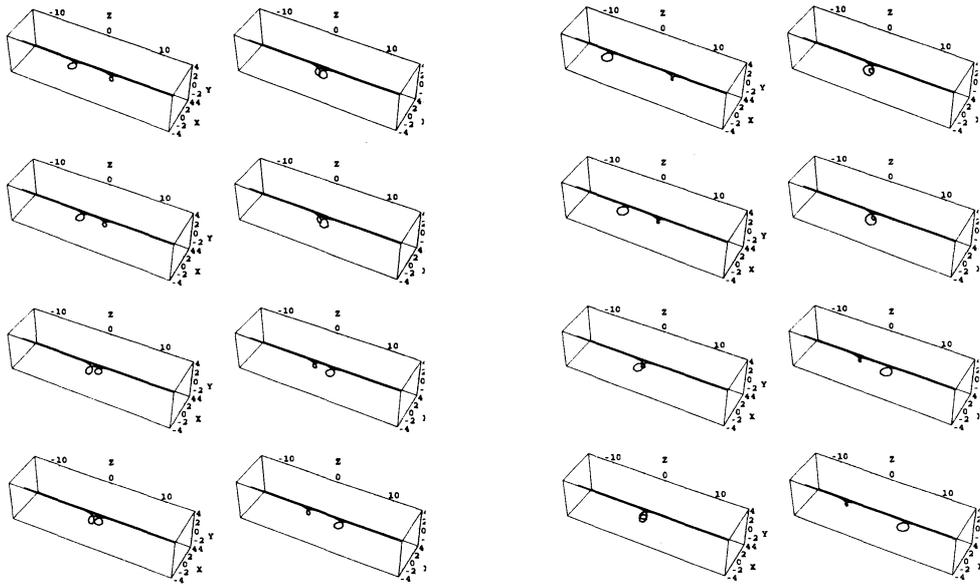


図 1 $v = 0.12,$ $v = 0.24,$ $v = 0.12$

図2 $v = 0.12$ $v = 0.24$

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, になり, 振幅と位相は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\gamma(1+v), A_2 = 2\gamma(1-v), \\ \eta_1 &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta_1, \eta_2 = \gamma(\sigma + v\tau) + \delta_2, \\ \xi_1 &= \theta_1, \xi_2 = \theta_2, \end{aligned}$$

双線形方程式の従属変数 F は

$$\begin{aligned} F &= \beta(\tau) + v^2 \cosh 2\gamma\sigma, \\ \beta(\tau) &= \cosh 2\gamma v\tau + (1-v^2) \cos \theta_{12}, \end{aligned}$$

のように非常に簡単になる。ここで, θ_{12} は回転の初期位相差で $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$ である。

Z はキック型なので, ソリトンのピークは

$$\partial_\sigma^2 Z = 0 \quad (\partial_\sigma^3 Z > 0).$$

で与えられ, この方程式は, $e^{2\gamma\sigma}$ の4次方程式

$$\begin{aligned} v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau))e^{8\gamma\sigma} - 2(v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau + \beta(\tau)^2 - 2v^4)e^{6\gamma\sigma} \\ - 6v^3 \sinh 2\gamma v\tau e^{4\gamma\sigma} - (v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)^2 + 2v^4)e^{2\gamma\sigma} \\ + v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)) = 0, \end{aligned}$$

になる。この方程式は厳密解を求めることができるが, 残念ながら, 厳密解は非常に複雑なため, ソリトン同士が十分離れているときを考察し, $e^{2\gamma v\tau}$ の0次と1次のみで σ_n ($n = 1, 2$) を表すこ

とにする。soliton-1 の位置, σ_1 , と soliton-2 の位置, σ_2 , はそれぞれ, $\sigma_1 \approx v\tau$ と $\sigma_2 \approx -v\tau$ で与えられるので, 衝突前 ($\tau \rightarrow -\infty$) には, z - σ 空間での soliton-1 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}, \quad (5)$$

soliton-2 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{1 + 2(1+v)(2-v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}. \quad (6)$$

になる。同様に, 衝突後 ($\tau \rightarrow +\infty$) では, soliton-1 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}, \quad (7)$$

soliton-2 の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}. \quad (8)$$

になる。なお, これらには, $\cos\theta_{12} < 0$ のとき特異性がある。

実空間 \mathbb{R}^3 でのソリトンの位置は $Z_n(\tau) = Z(\tau, \sigma_n(\tau))$ ($n = 1, 2$) として,

$$Z_n(\tau) = \sigma_n + Z_0 + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F|_{\sigma=\sigma_n}, \quad n = 1, 2. \quad (9)$$

で与えられる。2つのソリトン間の相対座標を

$$r = Z_2(\tau) - Z_1(\tau), \quad (10)$$

で定義すると, 衝突前には

$$r = -2v\tau + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4(2-v^2)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}} - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma, \quad (11)$$

衝突後には

$$r = -2v\tau + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(2-v^2)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}} + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma, \quad (12)$$

になる。

6 effective forces と有効ポテンシャル

(11) と (12) を用いて, ソリトン粒子に対する漸近的な Newton の運動方程式を求めるために, ソリトンの質量を定義する。ソリトンの運動量の z 成分は $P_z = \int d\sigma \partial_\tau Z$ で与えられるので, それぞれのソリトンの運動量は

$$P_{z1} = 4\gamma(1+v)v, \quad P_{z2} = -4\gamma(1-v)v, \quad (13)$$

で与えられる。ソリトン質量の候補として,

$$M = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{4(1+v-v^2)}{(1-v)\sqrt{1-v^2}},$$

が考えられるが [4], $M < 0$, ($v < -0.61$) および $\lim_{v \rightarrow -1} M = -\infty$, となるので不適である。そこで, (13) の v の係数をソリトンの質量とすることにすれば, soliton-1 と soliton-2 の質量として, それぞれ,

$$m_1 = 4\gamma(1+v), \quad m_2 = 4\gamma(1-v),$$

を得る。これらから換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ は

$$\mu = \frac{2}{\gamma}.$$

になる。これを用いれば, 相対座標に対する加速度から, 漸近的な Newton の運動方程式は衝突前に

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{16(1-v^2) \cos \theta_{12}}{e^{-2\gamma v\tau} + 8(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (14)$$

衝突後に

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{-16(1-v^2) \cos \theta_{12}}{e^{2\gamma v\tau} + 8(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (15)$$

となるので, 右辺が effective force を表す。 v の絶対値が大きくなると力が弱まることが判る。尚, これらの力は遠隔作用ではないので作用反作用の法則は成り立たない。実際, σ_n からそれぞれの運動方程式を求めても, その和, すなわち重心運動の加速度は 0 にならない。また, effective force に現れる特異性はソリトンの位置の特異性に起因するもので, 正と負の振幅の場合の小さいループの消失に対応するものと思われる。これらの式, (14) と (15) から, effective force は $1 \geq \cos \theta_{12} > 0$ では斥力, $\cos \theta_{12} = 0$ では force free, $0 > \cos \theta_{12} \geq -1$ では引力, であることが判る。これらは定性的にソリトンの衝突の様子を説明する。

実空間で有効ポテンシャルを求めるため, effective forces を相対座標 r の関数として表す。そこで (11) と (12), すなわち,

$$4a^2 \cos \theta_{12} x^3 + a^2 x^2 - 4(2-v^2) \cos \theta_{12} x - 1 = 0,$$

を x について解く。ここで x と a は衝突前には $x = e^{2\gamma v\tau}$ および $a = e^{\gamma(r + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma)}$, 衝突後には $x = e^{-2\gamma v\tau}$ および $a = e^{-\gamma(r - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma)}$ である。この方程式は x の 3 次方程式でやはり解が複雑なので, a^{-1} の 2 次まで展開して,

$$\begin{aligned} e^{2\gamma v\tau} &\approx e^{-\gamma(r + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma)} + 2(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma(r + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma)}, \\ e^{-2\gamma v\tau} &\approx e^{\gamma(r - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma)} + 2(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma(r - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma)}, \end{aligned}$$

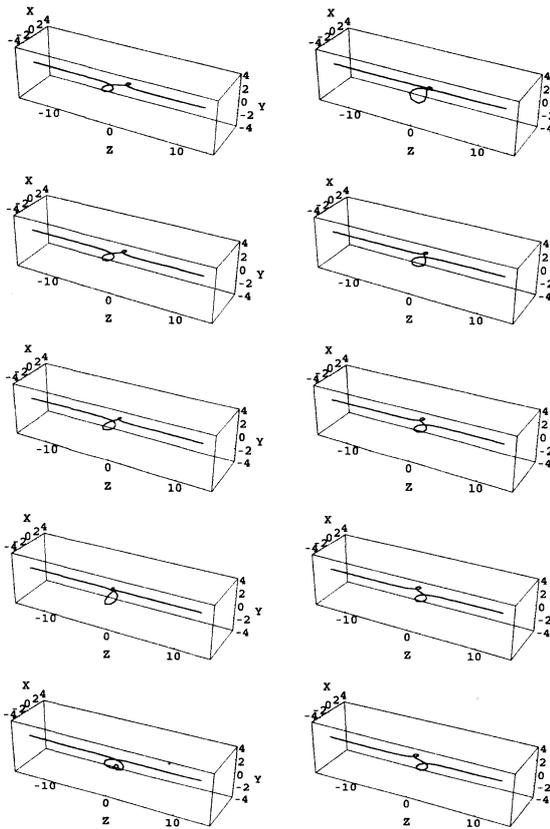


図3 $v = 0.12, \theta_{12} = \frac{96\pi}{100}$

を得る。これらを用いれば、Newton 方程式の漸近形は、衝突前には、

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} \approx \frac{16(1-v^2) \cos \theta_{12} [e^{\gamma(r + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma)} + 2(1-v^2) \cos \theta_{12}]}{e^{2\gamma(r + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma)} + 8(3-v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma(r + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma)} + \rho}, \quad (16)$$

衝突後には

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} \approx \frac{-16(1-v^2) \cos \theta_{12} [e^{-\gamma(r - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma)} + 2(1-v^2) \cos \theta_{12}]}{e^{-2\gamma(r - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma)} + 8(3-v^2) \cos \theta_{12} e^{-\gamma(r - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma)} + \rho}, \quad (17)$$

分母の第3項 $\rho = 16(1-v^2)(3-v^2) \cos^2 \theta_{12}$ は高次の項なので無視すべきだが、正と負の振幅に近い状態での衝突は図3のように soliton-2 が消失せず、soliton-1 のループの中を回るので、全ての r で有効ポテンシャルを得るためにあえて残した。

(16) と (17) の右辺を r で積分して、有効ポテンシャルは衝突前に

$$U(r) = -\frac{1-v^2}{\gamma(3-v^2)} \left\{ 2 \ln(\Delta e^{\gamma r}) + \frac{\sqrt{3-v^2}}{\sqrt{2}} \ln \frac{\Delta e^{\gamma r} - \lambda^{(+)}}{\Delta e^{\gamma r} - \lambda^{(-)}} - \ln(\Delta e^{\gamma r} - \lambda^{(+)}) (\Delta e^{\gamma r} - \lambda^{(-)}) \right\}$$

衝突後に

$$U(r) = -\frac{1-v^2}{\gamma(3-v^2)} \left\{ 2 \ln(\Delta e^{-\gamma r}) + \frac{\sqrt{3-v^2}}{\sqrt{2}} \ln \frac{\Delta e^{-\gamma r} - \lambda^{(+)}}{\Delta e^{-\gamma r} - \lambda^{(-)}} - \ln(\Delta e^{-\gamma r} - \lambda^{(+)}) (\Delta e^{-\gamma r} - \lambda^{(-)}) \right\}$$

になる。ここで

$$\Delta = e^{\gamma(\ln v^4 + 4\gamma)},$$

$$\lambda^{(\pm)} = 4 \left\{ -3 + v^2 \pm \sqrt{2(3-v^2)} \right\} \cos \theta_{12}$$

である。これらの有効ポテンシャルの漸近形は

$$U(r) = -\frac{1-v^2}{\gamma(3-v^2)} \left\{ 2 \ln(2\Delta \cosh \gamma r) + \frac{\sqrt{3-v^2}}{\sqrt{2}} \ln \frac{2\Delta \cosh \gamma r - \lambda^{(+)}}{2\Delta \cosh \gamma r - \lambda^{(-)}} - \ln(2\Delta \cosh \gamma r - \lambda^{(+)}) (2\Delta \cosh \gamma r - \lambda^{(-)}) \right\}$$

と統一的に全 r で書くことができる。この全 r での有効ポテンシャルを図4に示した。これから、 $\theta_{12} = 0$ のときには釣り鐘状のソリトン型の斥力ポテンシャルになり、 $\theta_{12} = \pi$ の場合には、引力ポテンシャルで特異性があり、 $r = 0$ 付近では、小さな斥力領域があることがわかる。しかし、斥力領域では小さい方のソリトンが消失している部分に対応し、本来、 r の定義が無効な領域であって、その有効性は定かではない。

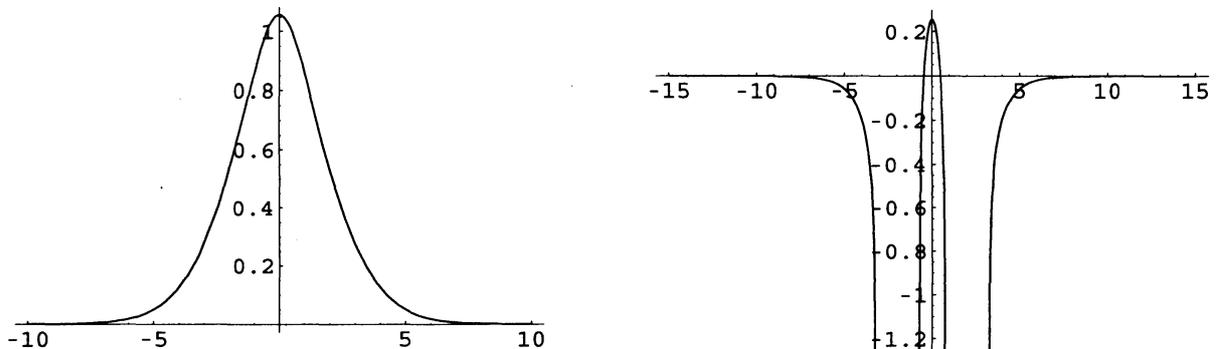


図4 有効ポテンシャル： $v = 0.12, \theta_{12} = 0$

$v = 0.12, \theta_{12} = \pi$

7 Summary

連立非分散方程式のソリトン間に働く effective force と有効ポテンシャルを求めた。effective force は、 $\theta_{12} = 0$ に対しては斥力、 $\theta_{12} = \pi$ に対しては引力、 $\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$ では force free で、有効ポテンシャルもこれに対応する。

これらはソリトンの衝突の様子を定性的に説明する。正と正（負と負）の振幅の衝突では、小さな相対速度での衝突は斥力により弾くが、相対速度が大きくなると停止できずに中を回る。正と負

の振幅の場合には、引力により加速されより大きな速さで衝突する (図 1)。 $\theta_{12} = \pi/2$ の場合の弾く相互作用は説明できないように見えるが、近距離ではほぼ同一平面上にのるという事実を認めてしまえば、同一平面上での斥力相互作用と考えることができる。また、図 3 の相互作用は、本来弾くような相互作用の位相速度であるが、小さな相対速度でも正と負の振幅に近い状況で小ループが大ループ内を回るのは初期には引力により加速され実質的に初速度の大きな衝突になり、同一平面向かう過程で引力が斥力に変わったからと考えることができる。

本稿の方法は原理的にはほぼ全域で effective force や有効ポテンシャルを計算でき、しかも、 v の大きさによらない。しかし、2つのソリトンが一つになってしまうような場合、特に、引力ポテンシャルの斥力領域の場合は2つのソリトンの位置を特定できない領域なので、この方法で議論するのは困難である。従って、全 r での有効ポテンシャルはどの程度正しいのかは不明である。また、 $\cos \theta < 0$ の場合の引力ポテンシャル (図 4 右) に特異性が現れることはソリトンの位置に現れる特異性に起因し、小さいソリトンの消失に対応するものと思われるが、詳細は不明である。作用反作用の法則が成立するようにできるかという問題もあげられる。これには定式化を変えるか、質量の変化を考慮するかが考えられるが今のところ良い方法は見つかっていない。

課題としてはより近い位置での相互作用の様子を調べるため、無視した高次の項を取り入れる、あるいは、近距離ではソリトンの位置の取り扱いを変えることと effective force の Z 成分以外の成分を求めることおよび他のソリトン方程式に適用することが可能かどうかを検討することなどがあげられる。

参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] H. Kakuata and K. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [3] H. Kakuata and K. Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [4] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.