

KP 方程式の線ソリトンの不安定性と再帰性に関する直接数値計算

阪府大工 村上洋一 (Youichi Murakami), 塩崎峻介 (Shunsuke Shiozaki)

Department of Aerospace Engineering
Osaka Prefecture University

1 はじめに

1 次元のソリトン系では, ソリトンは微小攪乱に対して安定であるばかりでなくソリトン同士の衝突においてもその構造を保つといった非常に安定な性質がある. また, 周期境界条件のもとで時間発展を行えば, 初期条件に戻るといった解の再帰性が数値的に示されている.

Kadomtsev and Petviashvili[1] は, K-dV ソリトンの進行方向よりも緩やかな横方向の変化を取り入れて, K-dV 方程式を 2 次元に拡張した方程式を導き, 媒質が正の分散のとき (位相速度が短波長であるほど大きい. 例としては水面上の表面張力波がある.) ソリトンは長波長の横方向攪乱に対して線形不安定であることを示した. この方程式は可積分系であることが後に示された [2,3]. 以下, KP 方程式と呼ぶことにする. KP 方程式に関連した最近の結果については Oikawa and Tsuji[4] に詳しい. 不安定なソリトンを含む系が解の再帰性を示すかどうかはわかっていない. この研究では, 正の分散性をもつ KP 方程式の時間発展を周期境界条件のもとで数値的に解くことによってこの問題を扱った.

まず, 線ソリトンの不安定性について得られている解析的結果について触れ. 次に, 数値シミュレーションの計算方法と初期条件について述べ, 最後に, 線ソリトンがどのように不安定化して相互作用していくのかといった数値シミュレーション結果を解析解と関連付けて説明する.

2 線ソリトンの不安定モード

初期条件として用いる線ソリトンとその不安定モード (固有関数) の表式と Zakharov[5] と Zhdanov[6] によって得られた増幅率を与える. 導出の方法は田尻と村上 [7] および塩崎と村上 [8] に与えられているので, ここでは結果のみを示す.

x 方向に進行する孤立波を表す線ソリトン解は

$$U = \frac{\alpha_0^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{2} \quad (1)$$

と表される。ただし,

$$\xi = \alpha_0 x + \Omega t - \xi_0, \quad \Omega = \alpha_0^3 \quad (2)$$

である。ここで, α_0 と ξ_0 は定数である。

不安定モード (固有関数) は

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{KL}} \operatorname{sech} \tilde{\xi}_0 \left\{ 2\alpha_0^2 \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi}_0 - \alpha_0^2 - \alpha_L^2 + 2\alpha_0 \alpha_L \tanh \frac{1}{2} \tilde{\xi}_L \tanh \tilde{\xi}_0 \right\} \cosh \frac{1}{2} \tilde{\xi}_L \cos(\delta y + \theta) \quad (3)$$

で表され, 対応する線形増幅率 (固有値) は

$$\gamma = 2\delta \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta} \quad (4)$$

である。ただし,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2\alpha_P + \alpha_L, \quad \delta = \alpha_P (\alpha_P + \alpha_L), \\ K &= \frac{(\alpha_P + \alpha_L)^2}{\alpha_L (2\alpha_P + \alpha_L)}, \quad L = \frac{(\alpha_P - \alpha_L)^2 - (\delta/\alpha_P)^2}{(\alpha_P + \alpha_L)^2 - (\delta/\alpha_P)^2}, \\ \tilde{\xi}_0 &= \tilde{\xi}_P + \tilde{\xi}_L / 2 + \sigma_0, \quad \tilde{\xi}_P = \alpha_P x + \frac{1}{2} \log L, \quad \tilde{\xi}_L = \alpha_L x + \log L, \\ \sigma_0 &= \log \left(\sqrt{K} / 2\alpha_P^2 \right) \end{aligned}$$

である。ソリトンを特徴づけるパラメータ α_0 と攪乱の横波数 δ を与えると, α_P と α_L が決まり他のパラメータも決定される。

また, 不安定な線ソリトンにこの攪乱を加えると, より振幅の小さな線ソリトンと周期ソリトン (局在した構造の無限列) に分裂することが解析的に示され [5,6], 数値的にも確認されている [9]。

なお, この方法では固有値問題の 1 つの増幅率が正である固有関数のみ求めることができ, すべての固有関数が求められるわけではない。この点に注意する必要がある。

3 数値シミュレーション

3.1 数値シミュレーションの方法

周期境界条件を x, y 方向について適用する。 x 方向は, 初期条件で与えられる線ソリトンのテールが十分小さくなるような周期を与え, y 方向は, 線ソリトンに攪乱として与えられる固有関数の y 方向の周期と同じ周期を与える。

表1 計算条件

領域 (x 方向)	領域 (y 方向)	空間刻み (x 方向)	空間刻み (y 方向)	時間刻み
$0 < x < 6\pi$	$-\pi/\delta_2 < y < \pi/\delta_2$	1024	512	5.0×10^{-6}

空間に関してはフーリエ・ガラーキン法を用いる。2/3 則によってアラアジングエラーを除去する。時間に関しては4次のルンゲ=クッタ法を適用し、線形項については積分因子法を用いる。詳しい内容は塩崎と村上 [8] に説明されている。

3.2 数値シミュレーションの結果

初期条件としては線ソリトンに増幅率の異なる2つの不安定モードを与えた。これは、塩崎と村上 [9] における (iii) の場合と同じである。今回は長時間のシミュレーションを行った。

$$u = U + \varepsilon_1 \hat{u}_1 + \varepsilon_2 \hat{u}_2 \quad (|\varepsilon_1 \hat{u}_1| = |\varepsilon_2 \hat{u}_2|)$$

とする。ただし、 \hat{u} は不安定モードを表し、式 (3) で与えられる。 $\varepsilon_1 = 2.73 \times 10^{-7}$, $\varepsilon_2 = 7.68 \times 10^{-7}$ とした。図1に今回採用した、2つの不安定モードの y 方向の波数 δ と、増幅率 γ のを示す。図中の実線は、 $\alpha_0 = 6.19$ としたとき、共鳴条件を満たしたときの δ と γ の関係を表している。図中に示すように、 $\delta_1 = 8.0$, $\delta_2 = 4.0$ である。 y 方向について無駄な領域を確保しないために、 $\delta_1 : \delta_2 = 2 : 1$ とした。したがって、 y 方向に確保する領域は $2\pi/\delta_2$ となる。表1の計算条件を用いた。

図2に、(iii)の初期の時間発展の様子を示す。 $t = 0.48$ で1つの小さな線ソリトン u_{LS1} と2つの周期ソリトン u_{PS2} , u_{PS3} に分裂したことがわかる。模式的に書くと、

$$u = U + \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \rightarrow u_{LS1} + u_{PS3} + u_{PS2} \quad (5)$$

のようになる。なお、今後 ε を書くのを省略する。

塩崎と村上 [9] で数値的・解析的に示したように、線ソリトン u_{LS1} と周期ソリトン u_{PS3} は (準) 共鳴条件を満たし、融合して線ソリトン u_{LS2} になる。逆に言うと、線ソリトン u_{LS2} は線ソリトン u_{LS1} と周期ソリトン u_{PS3} に分裂する。同様に、周期ソリトン u_{PS2} と周期ソリトン u_{PS3} は (準) 共鳴条件を満たし、融合して周期ソリトン u_{PS1} になる。逆に分裂することもある。線ソリトン u_{LS1} と周期ソリトン u_{PS1} (もしくは線ソリトン u_{LS2} と周期ソリトン u_{PS2}) は (準) 共鳴状

態を満たし、融合して初期の線ソリトン U になる。逆に分裂することもある。以上をまとめると、

$$U \longleftrightarrow u_{\text{LS1}} + u_{\text{PS1}}, \quad (6)$$

$$U \longleftrightarrow u_{\text{LS2}} + u_{\text{PS2}}, \quad (7)$$

$$u_{\text{LS2}} \longleftrightarrow u_{\text{LS1}} + u_{\text{PS3}}, \quad (8)$$

$$u_{\text{PS1}} \longleftrightarrow u_{\text{PS2}} + u_{\text{PS3}}, \quad (9)$$

のような（準）共鳴関係にある。なお、各々のソリトンのパラメータは次のような関係が成り立っている。

$$U : \alpha_0 = 6.19, \quad (10)$$

$$u_{\text{LS1}} : \alpha_{\text{L1}} = \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1} = 2.513, \quad (11)$$

$$u_{\text{PS1}} : \alpha_{\text{P1}} = \frac{\alpha_0 - \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1}}{2} = 1.838, \quad \delta_1 = 8, \quad (12)$$

$$u_{\text{LS2}} : \alpha_{\text{L2}} = \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2} = 4.754, \quad (13)$$

$$u_{\text{PS2}} : \alpha_{\text{P2}} = \frac{\alpha_0 - \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2}}{2} = 0.7347, \quad \delta_2 = 4, \quad (14)$$

$$u_{\text{PS3}} : \alpha_{\text{P3}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2} - \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1} \right) = 1.105, \quad \delta_3 = \delta_1 - \delta_2 = 4. \quad (15)$$

このように現れるソリトンはすべて初期に与えたソリトンのパラメータ α_0 と攪乱のパラメータ δ_1 と δ_2 のみで決定されている。

これらの関係を考慮して時間発展の様子の一部を観察する。繰り返しになるが、図 2 では、最初の線ソリトン U が $t = 0.48$ で、 u_{LS1} 、 u_{PS2} と u_{PS3} の 3 つのソリトンに分裂している。

図 3 の $t = 0.3050$ か $t = 3.200$ を見ると、 u_{PS3} が u_{LS1} に衝突し u_{LS2} を形成している。さらに、 $t = 3.300$ では u_{PS2} が u_{LS2} に衝突し最初の不安定な線ソリトン U に戻ろうとしている。 $t = 3.350$ では、 u_{PS1} が分裂しようとしている。このように単純な繰り返しではない。

図 4 の $t = 3.550$ から $t = 3.650$ では、 u_{PS2} が u_{LS1} と衝突しているが、これらは（準）共鳴条件を満たしていないので、通常のように相互作用しており融合はしない。

図 3 から図 6 を通じて最初の不安定な線ソリトンに戻るといふ解の再帰性が示されており、ソリトン間の（準）共鳴条件に整合した相互作用が見られる。また、周期ソリトンは横方向への位相のシフトが見られる。

最後の図 7 には $t = 5$ までの最大値の変化が示されている。最大値が 20 あたりで最小となっているが、ここが最初の不安定な線ソリトンに対応する。また、周期性があることもこの図からわかる。

4 参考文献

- [1] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: *Sov. Phys. Dokl.* **15** (1970) 539.
- [2] V. E. Zakharov and A. E. Shabat: *Funct. Anal. Appl.* **8** (1974) 226.
- [3] J. Satsuma: *J. Phys. Soc. Jpn.* **40** (1976) 286.
- [4] M. Oikawa and H. Tsuji: *Fluid Dyn. Res.* **38** (2006) 868.
- [5] V. E. Zakharov: *Sov. Phys. JETP Lett.* **22** (1975) 172.
- [6] S. K. Zhdanov: *Sov. Phys. Dokl.* **30** (1985) 769.
- [7] 田尻昌義, 村上洋一: 数理解析研講究録 782 (1992) 206.
- [8] 塩崎峻介, 村上洋一: 数理解析研講究録 1594 (2008) 166.
- [9] 塩崎峻介, 村上洋一: 数理解析研講究録 1645 (2009) 157.

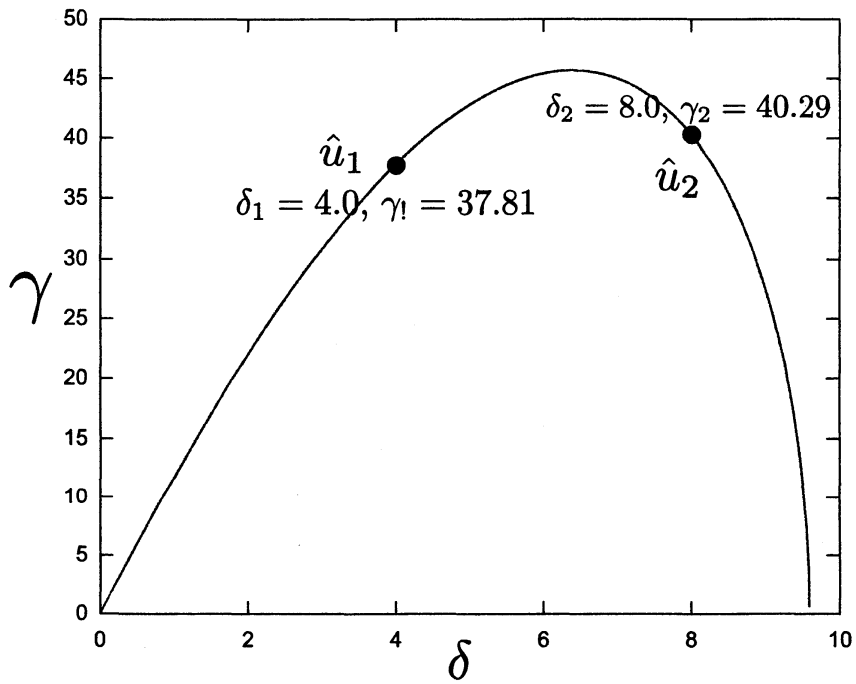


図1 増幅率の異なる2つの不安定モード

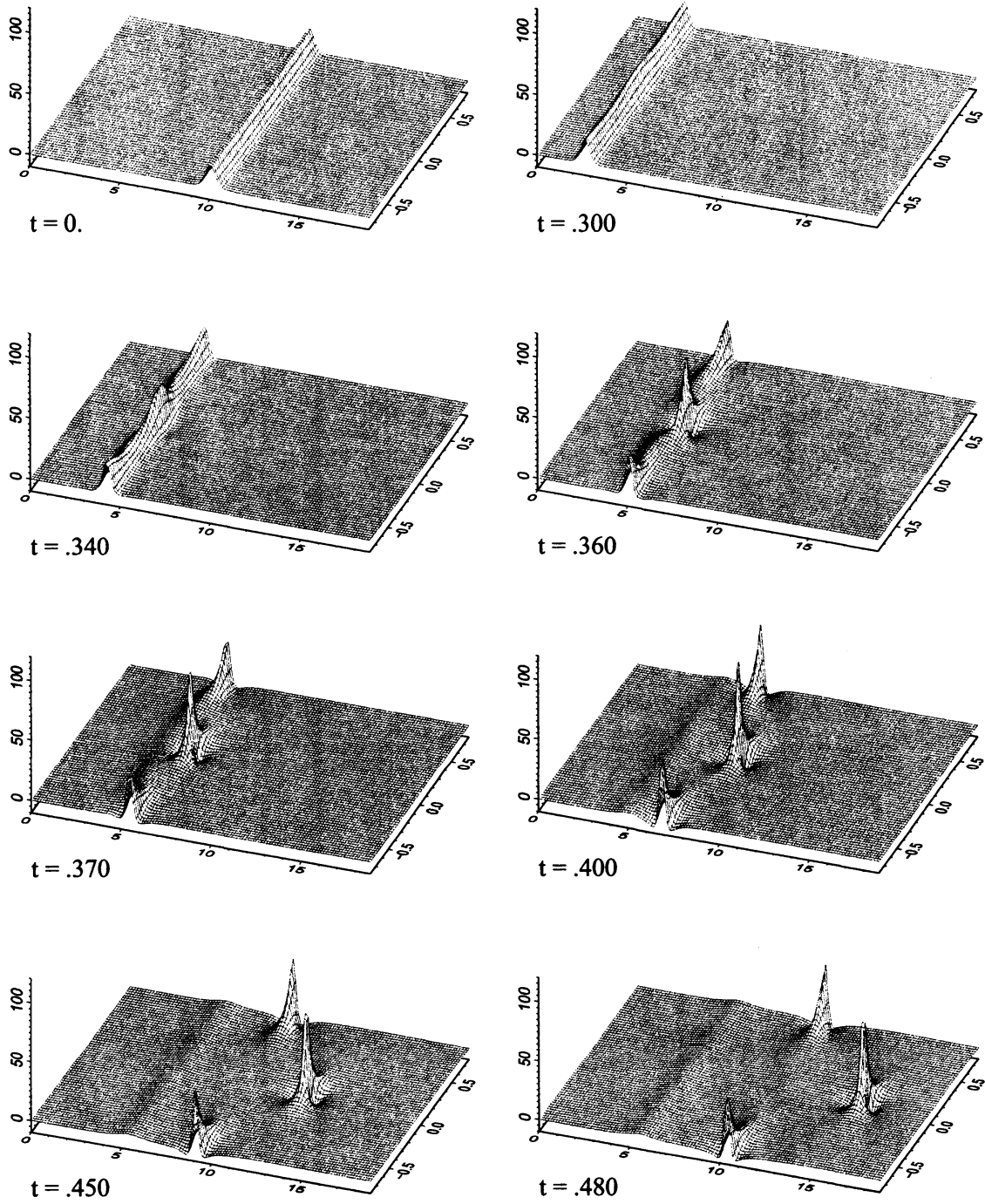


図 2 時間発展-1

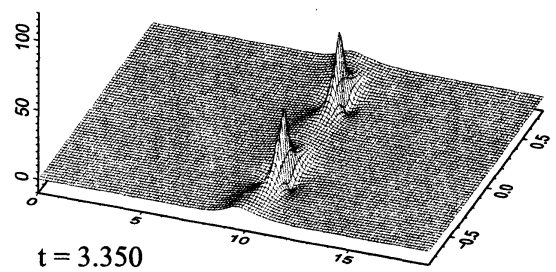
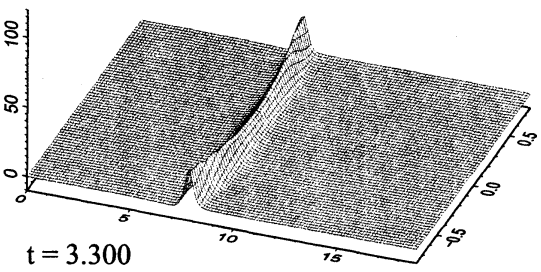
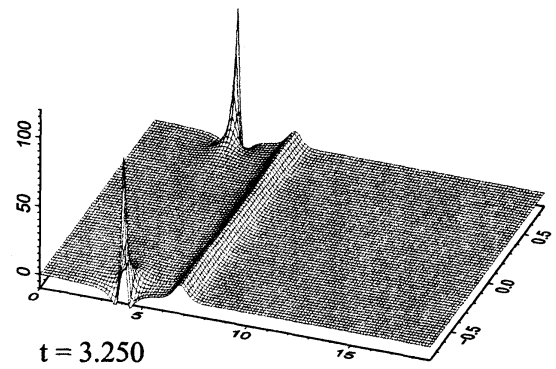
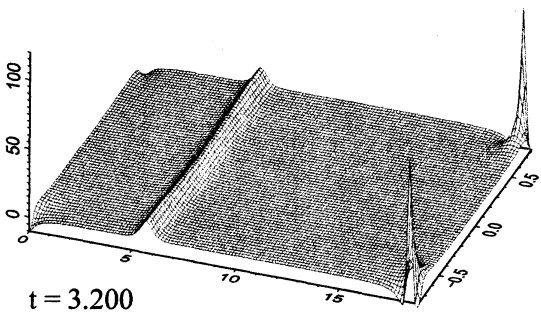
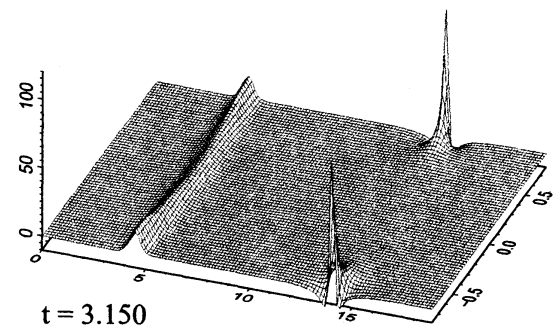
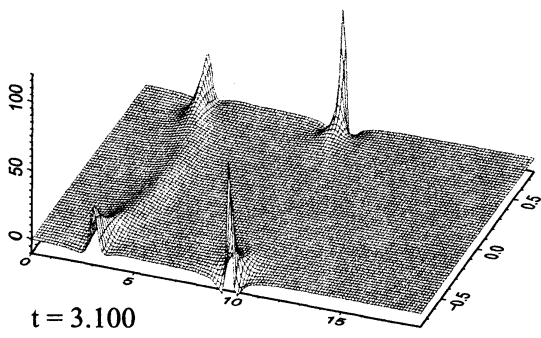
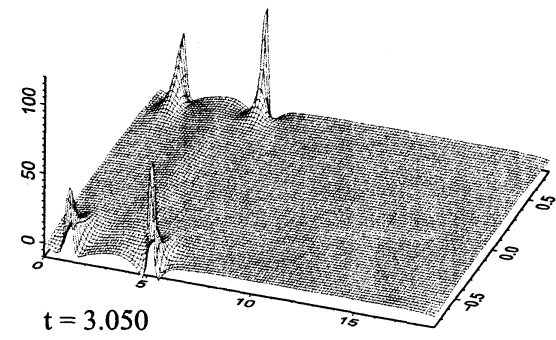
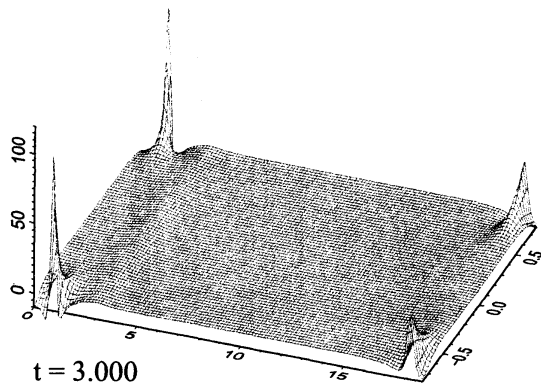


図3 時間発展-2

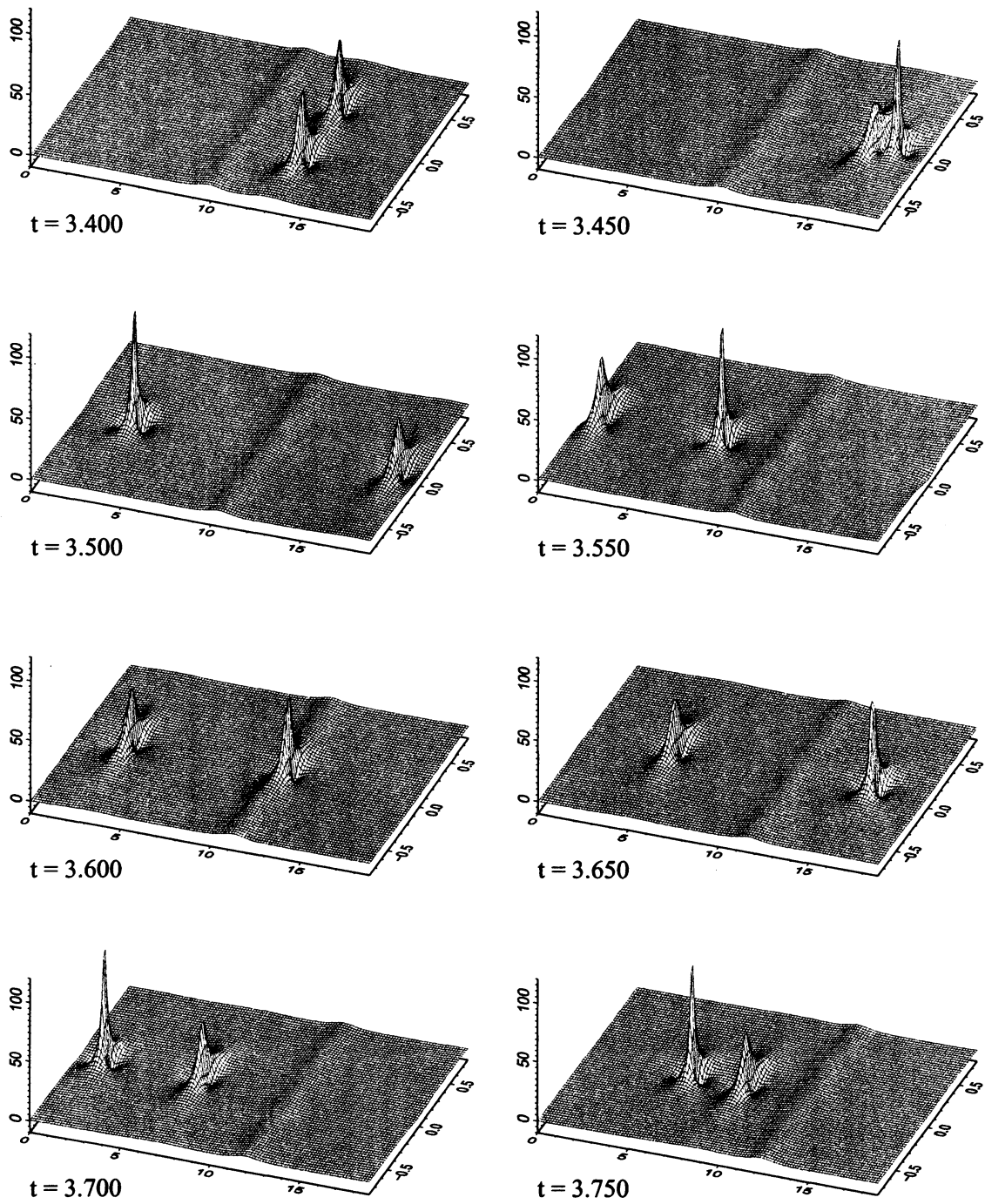


図4 時間発展-3

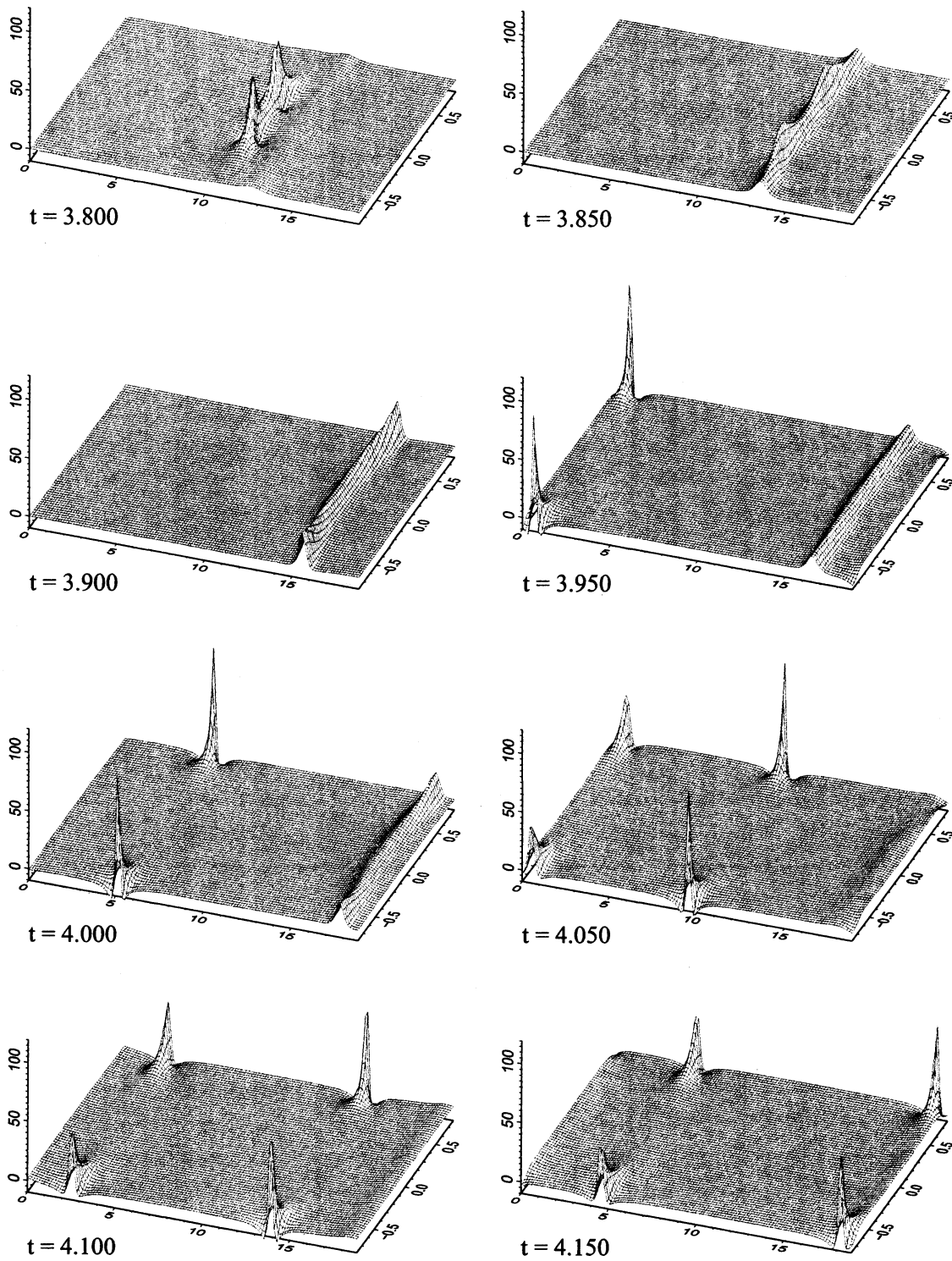


図5 時間発展-4

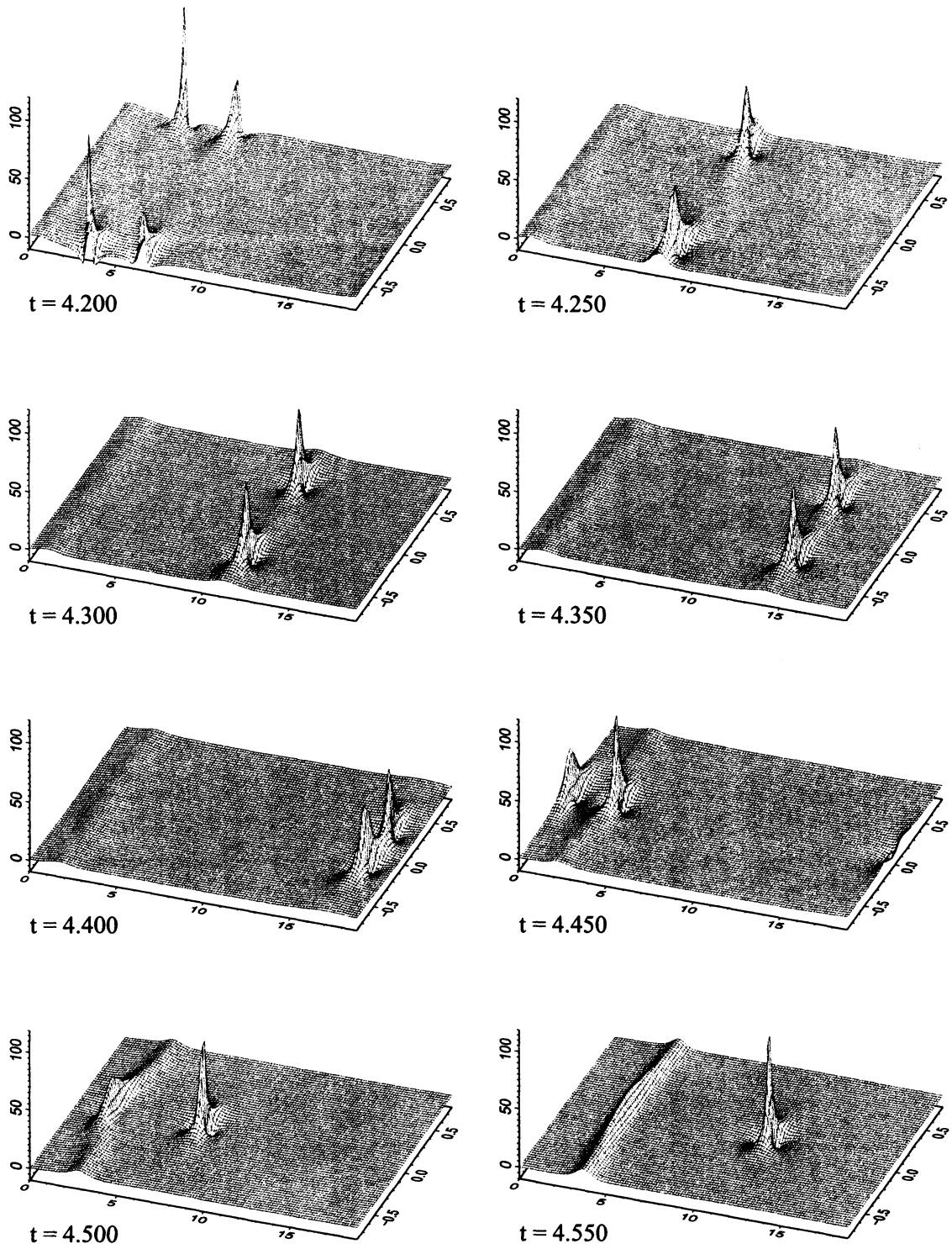


図6 時間発展-5

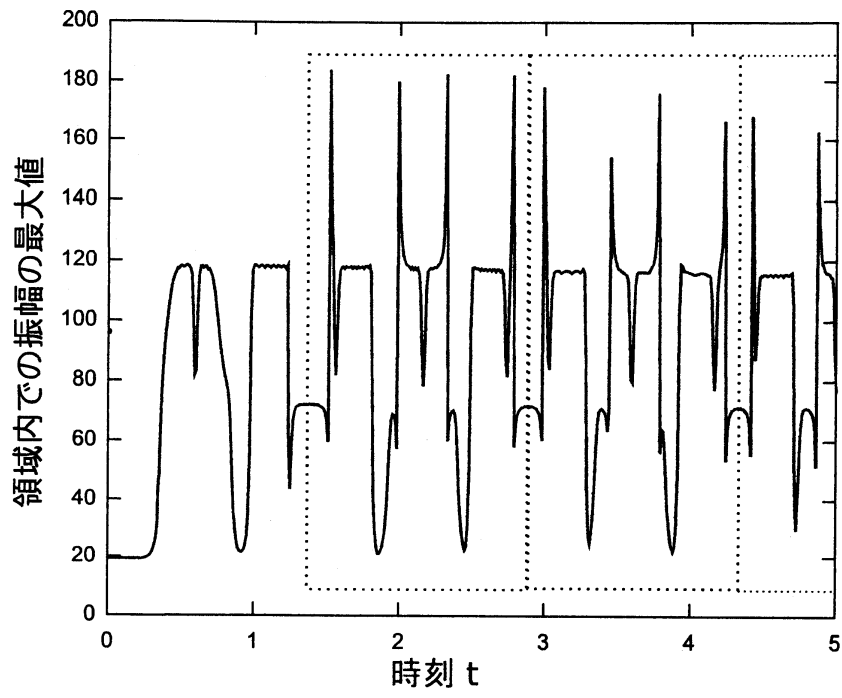


図7 領域内の最大振幅の時間変化