

一層が非常に深い二層流体中の孤立波の非対称な二次元相互作用

九大・応力研 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)
九大・応力研 及川 正行 (Masayuki OIKAWA)

1 はじめに

成層流体中を伝播する波動は、流体それ自体の運動を記述するだけでなく、流体中の物体の挙動や物質の輸送・混合のメカニズムなどと重要な関連があると考えられる。特に、長波長の孤立波あるいは孤立波列は大気や海洋での観測でしばしば見られる [1]。この特徴的な現象を非線形性の視点から調べる多くの理論的な研究がこれまでに行われてきた [2]。

成層流体中の非線形波動を表すモデル方程式は、よく知られた Korteweg-de Vries(KdV) 方程式をはじめとして、様々なものが提案されているが、その中に、本研究で取り扱う Benjamin-Ono(BO) 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial T} + 6u \frac{\partial u}{\partial X} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right] = 0, \quad \mathcal{H}[u] \equiv \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X')}{X' - X} dX' \quad (1)$$

がある (P は主値積分) [3, 4]。

これは、二層流体を考えた時、一方の層が水平スケール (波長) に比べて浅く、他方の層の深さが水平スケールに比べ深い (無限に深いとみなせる) 場合の弱非線形波動を近似的に表す方程式である。この方程式は可積分性を持ち、N ソリトン解などの詳細が明らかにされている [5]。

さて、これまで調べられてきた非線形モデル方程式 (BO 方程式を含む) の多くは一次元的な波動の伝播を表す方程式であるが、水平二次元の領域を伝播する二次元的な波動の相互作用は一次元のものとは本質的に異なるという性質が、これまでの研究の中で解ってきた [6]。

例えば、伝播方向が非常に近い (弱二次元的) 場合の KdV ソリトン解の相互作用を表す Kadomtsev-Petvishvili(KP) 方程式では、可積分性を持つことから、理論的によく調べられている。Miles は一次元で見られない共鳴相互作用を調べ [7]、最近では、Kodama らのグループが新しいクラスの解についての一連の研究がある [8, 9]。

また、BO 方程式のソリトン解の弱二次元的な相互作用を表す二次元 BO(2dBO) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + 6u \frac{\partial u}{\partial X} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0, \quad (2)$$

が数値的に調べられた [10]。その結果から、BO 方程式に従う孤立波の相互作用は、KP 方程式での相互作用と定性的に類似性があることが明らかになった。すなわち、相互作用後の波動場はほぼ孤立波で構成されており、また相互作用によっては元の波よりも大きな孤立波が生成される場合がある。

この数値解析は、同じ振幅の孤立波同士の相互作用に限られていた。これは数値計算での境界条件に関する技術的な困難のためであった。しかし、最近 Navier-Stokes 方程式の数値計算に対して提案された方法 (window method [11]) を適用することによって、この困難が解決できることがわかった。

本研究では、[10] の発展として、BO 方程式に従う孤立波同士が異なる振幅を持つ場合での二次元相互作用を調べる。(2) 式は定常進行孤立波解

$$u = \frac{a\delta^2}{(X + \Omega Y - VT)^2 + \delta^2}, \quad \delta \equiv \frac{2}{3a}, \quad V \equiv \frac{3a}{2} + \Omega^2 \quad (3)$$

を持つ。ここで Ω は直線的に延びている峰線の向きを表すパラメーターであり、また孤立波は峰と直角の方向に進むので間接的に孤立波の進行方向を表している。この解を参考に、別々の方向に進む二つの孤立波を配置した初期条件を考え、そこからの時間発展での相互作用の様子を数値的に調べる。振幅の異なる孤立波の相互作用が、同じ振幅の孤立波同士の相互作用とどのように違うのかを明らかにすることが本研究の目的である。

なお、2dBO 方程式の基礎方程式からの導出については、[10] を参照されたい。

2 二次元 BO 方程式の数値計算の方法

数値解析の結果について述べる前に、その手法について述べる。計算領域として $L_X \times L_Y$ の長方形の領域を考える。空間微分は擬スペクトル法を用いている。時間発展は Crank-Nicholson 法で定式化し、非線形項の計算では反復法を用いている。計算点は X 方向に 8192 点、 Y 方向に 1024 点を取っている。格子間隔は両方向で 0.1、時間間隔は 0.005 としている。

境界条件は、 X, Y 方向共に周期境界条件である。注意すべき点は、領域内の孤立波は Y 方向の境界 ($Y = \pm L_Y/2$) の外まで延びている設定で数値計算している事である。そのままでは周期境界条件を満たしていないため、対策として window method を用いてい

る。window method は Y 方向の境界で 0 となるような窓関数を従属変数に作用させて変換し、新しい従属関数に関する方程式を作り、それを解く方法である。変換後の従属変数は、両端で 0 となるため周期境界条件を満たす。なお変換前の従属変数は、境界付近の孤立波は定常進行波解である事を用いて得られる。

初期条件は、以下の式で表す。

$$u = \frac{a_1 \delta_1^2}{(X + \Omega Y)^2 + \delta_1^2}, \quad \text{for } -L_Y/2 \leq Y \leq 0,$$

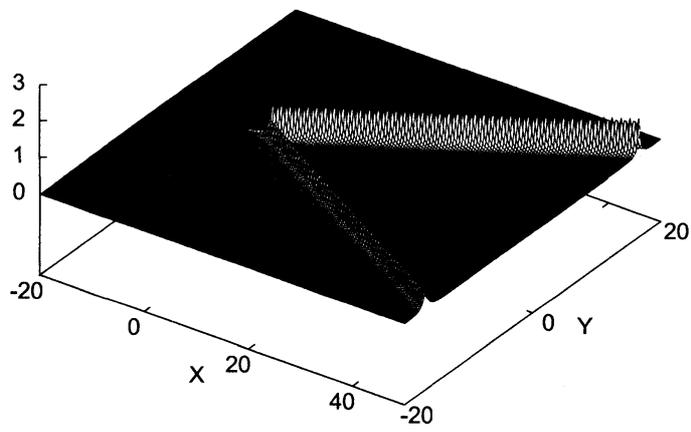
$$u = \frac{a_2 \delta_2^2}{(X - \Omega Y)^2 + \delta_2^2}, \quad \text{for } 0 \leq Y \leq L_Y/2, \quad \delta_i \equiv \frac{2}{3a_i}.$$

これはソリトンが Y の正負の領域に 1 個ずつ存在し、原点で交わっている V 字型の波形である。実際の波形は、後述の図 1(a) などに示されている。二つのソリトンは、振幅だけでなく進行方向に対する角度 (パラメーター Ω) についても独立に取れるが、ここでは簡単のため、それぞれの波で絶対値が等しい場合を考えた。以降では、 $\Omega = 3.0, 1.0, 0.5$ を与えた計算結果を示す。初期に与える孤立波の振幅は $a_1 = 0.5$ $a_2 = 1.0$ とする。

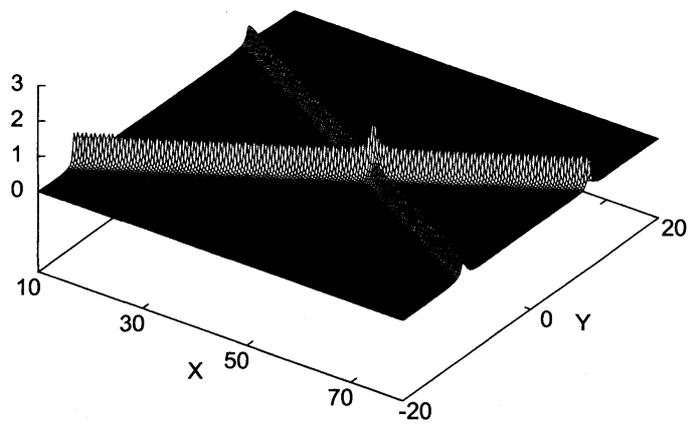
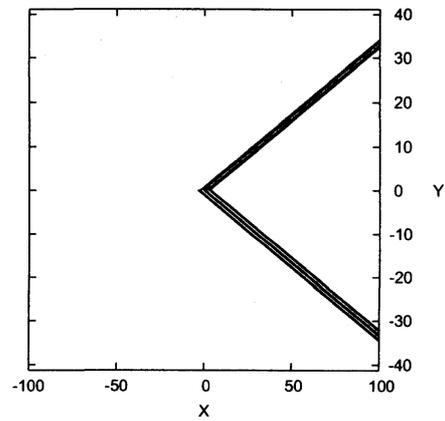
3 数値計算の結果

最初に $\Omega = 3$ の結果を図 1 に示す。二つの孤立波は初期状態 (a) から X の正の向き (以後この方向を前方と考える) に伝播しつつ、 $Y = 0$ に向かって伝播するため、領域の中心部で相互作用し始め、後方へと相互作用後に形成される孤立波が伸び始める。非対称の場合として特に顕著なのが、入射するそれぞれの波の峰線の延長線上に、対応する同じ振幅の孤立波が形成されることである。その後、初期条件に依存すると考えられる一時的な擾乱が後方へ伝わった後、波動が定常に伝播する状態 (b) に達する。そこでは波形は直線的に伸びる二本の孤立波の重ね合わせの状態となっている。このような相互作用は、振幅が同じ場合において、 Ω が比較的大きな値 (孤立波同士の進行方向のずれが大きい) 場合に見られるものと同様である。なお、KP 方程式の同種の計算でも、 Ω に対応する値が大きい時に同様な重ね合わせのパターンを見ることができる。以上のような、漸近状態において重ねあわせに近いパターンが現れる相互作用を **Type1** と呼ぶことにする。

次に $\Omega = 1$ の結果を図 2 に示す。この場合相互作用する場所において、2 本の入射波とは違った方向に伸びる大振幅の孤立波 (以後で stem と呼ぶ) が形成される。その一方、後方へと相互作用後に形成される孤立波が stem の両端に 2 本ずつ合計 4 本見られ、それぞれが stem と入射波の交点から伸びている。対称な初期条件の場合、stem は Y 軸に平行



(a)



(b)

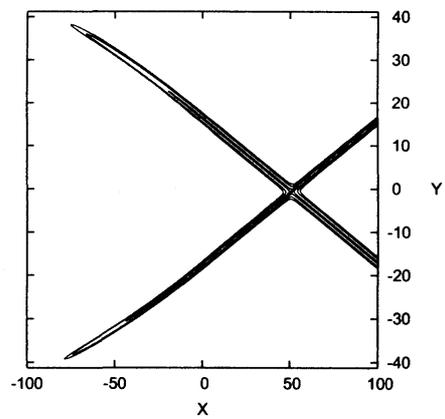


図 1: $\Omega = 3$ での二つの孤立波の相互作用。(a) $T = 0$, (b) $T = 5$ 。

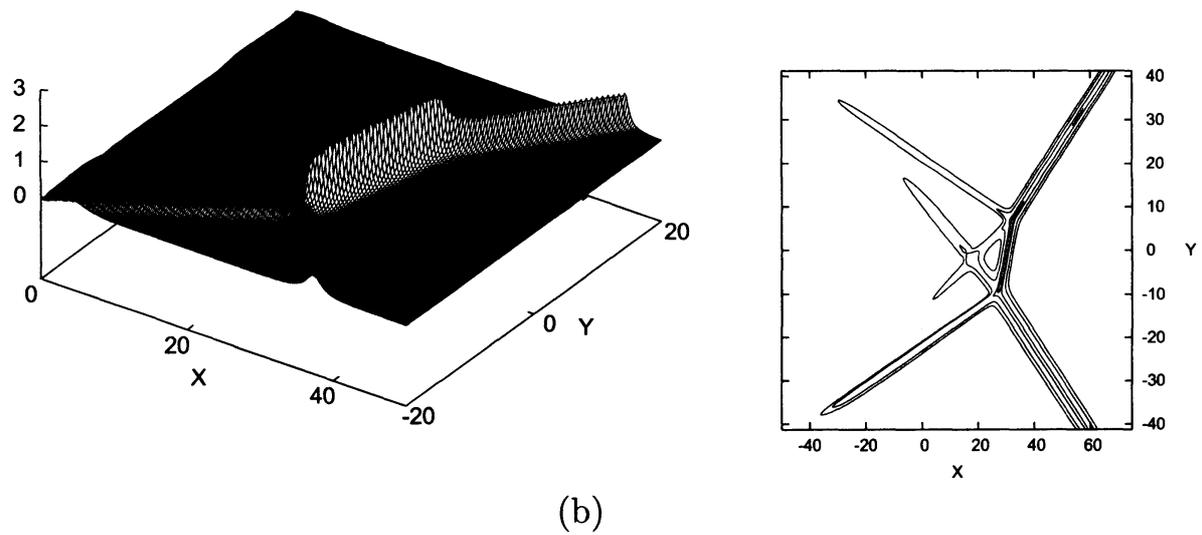
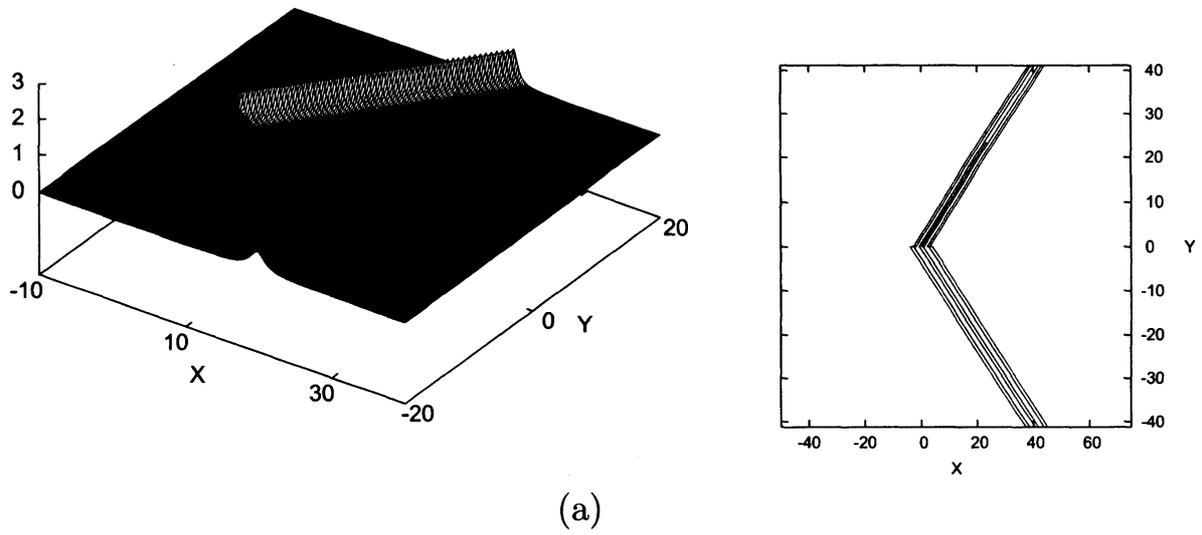


図 2: $\Omega = 1$ での二つの孤立波の相互作用。(a) $T = 0$, (b) $T = 10$ 。

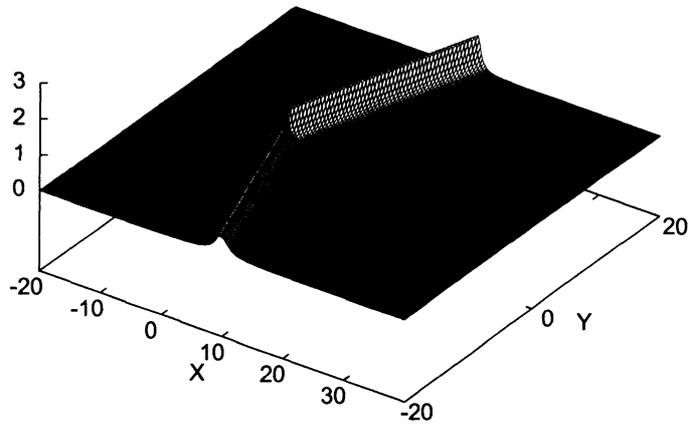
に延びつつ X 方向に伝播するが、この場合には非対称性を反映して Y の負の方向に進む。後方に延びる波を見ると、stem と振幅の大きい方の入射波の交点から延びる波は、他方に対して、小さくなっている。これは、Type1 の場合と同様である。KP 方程式での同種の計算と比較すると、外側に（入射波の後ろ側へ）延びている波は、KP 方程式の相互作用でも見られる。しかし、内側に（stem の後ろ側の空間へ）と延びている波は、2dBO 方程式での相互作用に特有なものである。この特徴は、対称な初期条件の場合 [10] でも見られたが、非対称な初期条件においても同様であることが、この計算結果より明らかになった。以上のような、漸近状態において stem とその両端に後方にできる波がそれぞれ 2 本生成・伝播する相互作用を **Type2** と呼ぶことにする。

ここまでの二例は、対称な初期条件の場合の結果に対応するものがある。しかし、次に示す $\Omega = 0.5$ の例では非対称性が本質的であり、その結果を図 3 に示す。この場合は、大きな振幅を持つ入射波の後方には顕著な波が生成されない。反対に小さな振幅を持つ入射波の後ろには、Type2 の場合と同様に、外側に延びる孤立波と内側に小さな 2 次的な波が見られる。このような著しく非対称な特徴をもつ結果は、対称な初期条件での結果に対応するものが見られない。対称な初期条件の場合では、 Ω を小さくするについて後方にできる波の振幅は小さくなるが、対称に小さくなっていくため、片方の波が消えることは起こらない。逆に非対称の時には、ある Ω で片方の波が先に存在しなくなる。相互作用する部分に目を向けると、Type2 の場合と同様に、振幅と方向が違う stem 的な波が生成・伝播していく。注目すべき点として、大きな振幅を持つ入射波と stem との違いは、振幅・方向ともわずかである。なお、図の等高線では見えない非常に小さな波が、大きな振幅を持つ入射波と stem との交点から出ている。しかしその波は、反対側の交点から出ている孤立波や 2 次的な波と対応しているのか、それとも全く違った相互作用なのかは。現時点では分かっていない。以上のような、漸近状態において stem の片側にのみ顕著な波が生成される相互作用を **Type3** と呼ぶことにする。

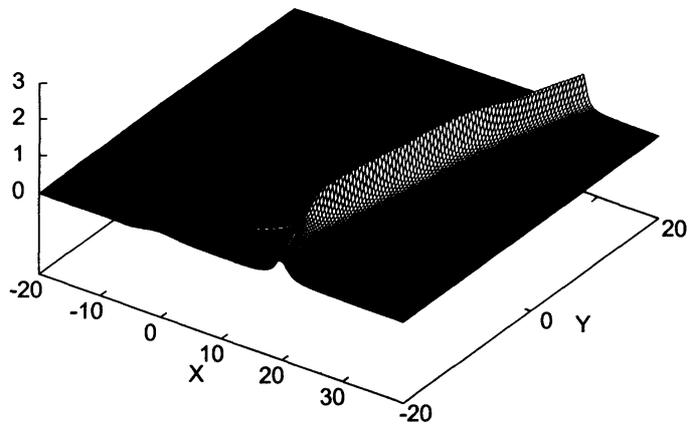
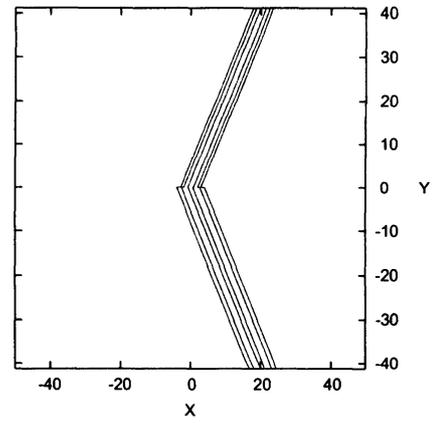
最後に、入射波の振幅比を様々に変えつつ、 Ω を変えた場合に見られる相互作用を整理したものを図 4 に示す。ここで、以下のスケール変換

$$\bar{u} = \frac{u}{a}, \quad \bar{X} = aX, \quad \bar{Y} = a^{3/2}Y, \quad \bar{T} = a^2T$$

で、方程式が不変であることから、 Ω については、 $a_1^{1/2}$ でスケールリングしていることに注意する。以前の対称な初期条件の結果は、 $a_2/a_1 = 1$ の場合である。そこでは、Type3 にあたる相互作用は見られず、ある Ω の臨界値を境にして、その相互作用が Type1 か Type2 のどちらかを取ることが明らかになっており、それは図のなかでも示されている。



(a)



(b)

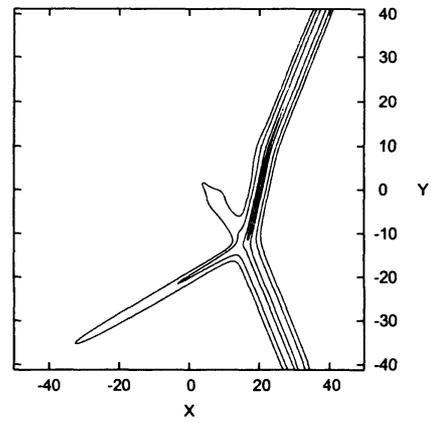


図 3: $\Omega = 0.5$ での二つの孤立波の相互作用。(a) $T = 0$, (b) $T = 10$ 。

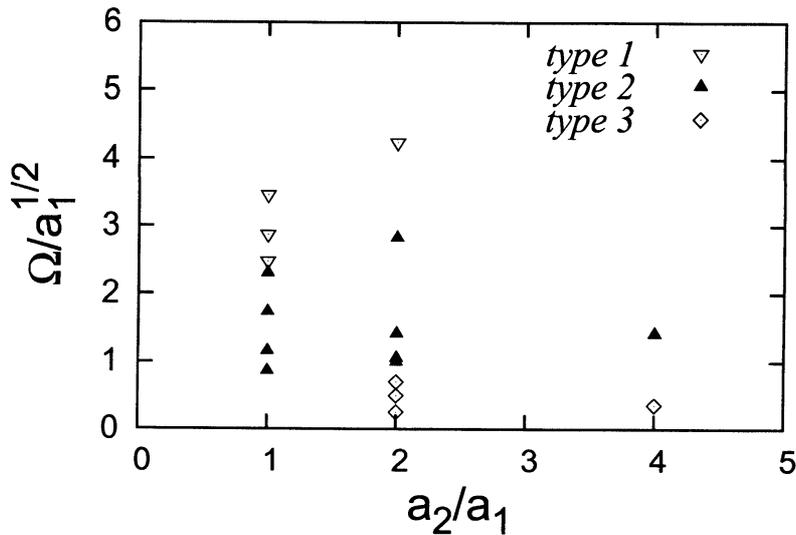


図 4: 孤立波の振幅・角度に関する相互作用の種類分類。

一方、この論文で示したのは振幅比 $a_2/a_1 = 2$ の場合である。この場合、 Ω の臨界値は、Type1 と Type2 の境界の他に Type2 と Type3 の境界と合計二つある事になる。まだ十分なデータが取れていないため、不十分な議論しかできないが、Type1 と Type2 の境界値は $a_2/a_1 = 1$ と比較してより大きな値になっていると推測される。その一方で、Type2 と Type3 の境界値については、 $a_2/a_1 = 4$ の例より、 a_2/a_1 が大きくなっても存在していると推測できるが、その変化の仕方については、今後の課題である。

4 まとめ

一層が水平スケールに比べて深いとみなせる二層流体中を伝わる長波長孤立波について進行方向に対して非対称に交わる場合の二次元相互作用を、2dBO 方程式を解くことによって明らかにした。以前に報告した対称な場合で見られる相互作用、即ち重ねあわせに似た相互作用、stem とその両側から 2 本の孤立波が延びる相互作用の他に、stem の両端で波のパターンが異なる相互作用を発見し、初期条件の非対称性が本質的な相互作用の形態があることを確かめた。

今後の課題として、さらに数値計算を進め、図 4 に示すような振幅、角度依存性についての詳細を明らかにしたい。また、KP 方程式での理論との比較も行う予定である。

参考文献

- 1) Global Ocean Associates, "An Atlas of Internal Solitary-like Waves and their Properties (Second Edition)", <http://internalwaveatlas.com/> (ウェブサイト).
- 2) 船越, 及川, "成層流体中の非線形波動", *ながれ*, 8(1989), 311-335.
- 3) Benjamin, T. B., "Internal waves of permanent form in fluids of great depth", *J. Fluid Mech.* 29(1967), 559-592.
- 4) Ono, H., "Algebraic solitary waves in stratified fluids", *J. Phys. Soc. Japan* 39(1975), 1082-1091.
- 5) Matsuno, Y., "Bilinear Transformation Method", Academic Press, Orlando(1984).
- 6) Oikawa, M. and Tsuji, H., "Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems", *Fluid Dyn. Res.*, 38(2006) 868-898.
- 7) Miles, J. W., "Resonantly interacting solitary waves", *J. Fluid Mech.* 79(1977), 171-179.
- 8) Kodama Y., Oikawa, M., and Tsuji, H., "Soliton solutions of the KP equation with V-shape initial waves" *J. Phys. A* 42(2009) 312001(9pp).
- 9) Chakravarty, S. and Kodama, Y., "Soliton Solutions of the KP Equation and Application to Shallow Water Wave", *Stud. Appl. Math* 123 (2009) 83-151.
- 10) Tsuji, H. and Oikawa M., "Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth", *Fluid Dyn. Res.*, 29(2001) 251-267.
- 11) Schlatter, P., Adams, N.A. and Kleiser, L., "A windowing method for periodic inflow/outflow boundary treatment of non-periodic flows", *J. Comp. Phys.*, 206(2005) 505-535.