数理解析研究所講究録
第 1705 巻 2010 年 115-127

多重マルコフ ガウス超過程とその双対性

Multiple Markov generalized Gaussian processes and their dualities

Si Si
愛知県立大学　情報科学部

2000 AMS Classification : 60H40

概 要

A stochastic process describes evolutional random phenomena towards future. Corresponding with this direction, there will be a process describing, as it were, backward evolution from future to present. The dual process is a realization of this fact.

We restrict our attention to Gaussian processes for which multiple Markov property is well investigated. This property expresses way of dependence of involved randomness as time goes by. We can therefore expect that such a process with multiple Markov property would present an exact form of the dual process.

We shall show that having defined generalized Gaussian process with multiple Markov property, we can construct the dual process satisfying the properties that we claim. The analysis for this can be done in the space of Hida distributions.

確率過程は進化するランダム現象について、過去から未来に向かって説明します。 この方向に対応しているもので、未来から見て後方の発展経過について説明する過程があると考えられます。二元的な過程はこの事実の実現です。

私たちは多重マルコフ性が上手に研究されているガウス過程に着目します。 時間が過ぎるとき、この特性は、かかわった過程について、その偶然性の依存のありかたを表します。したがって、私たちは、多重マルコフ性があるそのような過程が二元的な過程の正確なフォームを提示すると予想します。

このような二元的構造は、多重マルコフーガウス過程を**超過程** にまで拡張してその存在と構造とを明らかにしました。具体的に双対過程の構成まであきらかにしました。 このために　Hida　distribution の空間で解析を実行しました。

1 序

確率過程は未来に向かって発展する偶然現象の数学的記述と考えられる。それは 未来に向けての出来事を表現するのであるが、双対的に未来から過去を想定する（双対）過程を考えるのは自然である。

発展現象の時間的な従属性の記述にはマルコフ性が重要である。ガウス過程の場合はマルコフ性（実は単純マルコフ性）の自然な拡張として **多重マルコフ性** が定義され、その性質も研究されていて、定義の妥当なこともいくらか明らかにされている。

ここで、単純マルコフ性について revisit したいことがある。それは、直感的な言い方をすれば,「現在の観測値をしれば過去の現象と未来の現象とが独立になる」と言われている事実である。厳密な設定をしてみても、そこでは **過去と未来とが同等** に扱われている。いわば、そこに**双対性**がある。

ガウス過程について、多重マルコフ性の定義の妥当性を積極的に主張しようとするならば、過去と未来との双対性も発見されなければならない。本節のはじめに想定した **双対過程の存在**である。これを実証することが本論文の目的である。

時間的な発展を表すならば、微分方程式、とくに発展方程式の類似が考えられるかもしれない。しかし、我々の場合ランダムな量を扱うので、考え方は一段と複雑になる。計算式の類似は当然そこにみられるが、本質なことは別なところにある。

実際、我々の場合は、時間 t をパラメータにするランダム変数を用いて研究対象対称となる発展現象を表現したり、また記述したりして、解析につなげなければならない。このような目的に対して適当なものはガウス過程であり、ホワイトノイズによる表現である。次節はその準備にあてる。また 3, 4 節は知られた事実の summary であるが、やはり本論への introductory remark である。

2 ガウス過程の表現とマルコフ性

ここで扱うガウス過程 $X(t) = X(t,\omega), t \in T, \omega \in \Omega$, は、パラメータ空間 T が $[0,\infty)$ または R^1 全体で、平均値 $E(X(t))0$ と仮定する。

準備として以下に、ガウス過程 $X(t)$ の表現について概略を述べる。

$\mathcal{M}_t(X)$ は $X(s), s \leq t,\}$ の張る $L^2(\Omega)$ の閉部分空間、$\mathcal{M}(X) = \bigvee_{t\in T} \mathcal{M}_t(X)$ とする。

$X(t)$ が純非決定的であるとは、それが

$$\bigwedge \mathcal{M}_t(X) = \{0\}$$

をみたすことをいう。 以下次のことを仮定する。

[I] $\mathcal{M}(X)$ は separable である。

[II] $X(t)$ は純非決定的である。

$X(t)$ に対して、ガウス加法過程 $Z(t)$ と関数 $F(t,u), n \leq t,$ が存在して、$X(t)$ が確率積分

$$X(t) = \int^t F(t,u)dZ(u),$$

によって表わされるとき、この積分表示を $X(t)$ の**表現** という。

当面の目標のために、さらに二つの仮定をおく。

[III] 表現に用いられる加法過程はブラウン運動 $B(t)$ である。

[IV] 表現は **標準表現**である。　すなわち、任意の $s < t$ に対して

$$E(X(t)/\mathbf{B}_s(X)) = \int^s F(t,u)dB(u) \tag{2.1}$$

ホワイトノイズ解析の手法を用いるので (2.1) 式の右辺は

$$\int^s F(t,u)\dot{B}(u)du$$

と書くことにする。なお積分の下限は特に指定しなければ、いつも $\int$ とする。

標準表現の核関数 $F(t,u)$ は符号を除き一意にきまる。すなわち、$X(t)$ の性質の多くが $F(t,u)$ の解析的性質で表現できる。

特に本報告では、ガウス過程 $X(t)$ の標準表現の理論を用いて、その従属性について考えたい。

たとえば、(単純) マルコフ性は

$$F(t,u) = f(t)g(u)$$

となる。ただし若干の注意が必要であるが。特に $X(t)$ が加法過程なら

$$f(t) = const.$$

となる。

また、$T = R^1$ にとって、$X(t)$ が平均連続な定常過程であるための条件は、標準表現の核関数 $F(t,u)$ が

$$F(t,u) = F(t-u)$$

と表わされることである。

本報告の主題である多重マルコフ性については次節以降で詳しく報告する。

3　ガウス過程の狭義多重マルコフ性

はじめに J.L. Doob による classical な N 重マルコフガウス過程の定義とその表現を簡単に復習しておく。ガウス過程 $X(t)t \geq 0,$ が N 階の常微分作用素 L_t を用いて

$$L_t X(t) = \dot{B}(t) \tag{3.1}$$

ただし $X(0)=0$, と表わされる場合、解となる $X(t)$ を**狭義** N **重**マルコフ ガウス過程と呼ぶ。

のとき $X(t)$ は2乗平均の位相で $N-1$ 回微分できるもとし、N 階導関数は形式的で $\dot{B}(t)$ も形式的に理解していた。（現在では正確な意味で理解できる。）

その標準表現は存在して

$$X(t)=\int_0^t R(t,u)\dot{B}(u)du. \tag{3.2}$$

のように表される。ここで、 $R(t,u)$ は、常微分方程式

$$L_t f=0$$

に対する Riemann の関数である。

この classical な結果から、以下のように、双対過程を定義することができる。それは我々の本題の課題である一般の多重マルコフガウス過程の双対過程の理解の助けとなる。記号を導入しておく。上の狭義 N 重マルコフ ガウス過程を、表現 (2.2) を明治して triple $(X(t),L_t,R)$ と表す。必要あればパラメータ t の動く区間も付け加える。

Theorem 3.1 狭義 N 重マルコフ ガウス過程 $(X(t),L_t,R)$、$[0,1]$ が与えられたとき、次の3条件を満たす *triple* $(X^*(t),L_t^*,R^*),[0,1])$ が存在する。

i) L_t^* は L_t の *formal adjoint.*

ii) R^* は L_t^* に対する *Riemann* の関数である。

iii) $X^*(t)=\int_t^1 R^*(t,u)\dot{B}(u)du$ は

$$L_t^*X^*(t)=\dot{B}(t) \tag{3.3}$$

の解である。

さらに

$$(X^*)^*(t)=X(t)$$

が成り立つ。

もし、$X(t)$ に定常性があれば、パラメータ t の動く範囲を $(-\infty,\infty)$ に変えて、次のことが主張できる。

Theorem 3.2 $X(t),-\infty<t<\infty,$ が定常、狭義 N 重マルコフ ガウス過程ならば、対応する N 階常微分作用素 L_t は定数係数で、*Riemann* の関数は $R(t-u)$ と表わされ $X(t)$ の標準表現は

$$X(t)=\int_{-\infty}^t R(t-u)\dot{B}(u)du \tag{3.4}$$

と表わされ、さらに、$X^*(t)$ は

$$X^*(t)=\int_t^\infty R^*(t-u)\dot{B}(u)du \tag{3.5}$$

と表わされる。ただし、$R^*(u)=R(-u)$ である。

定理の前半は周知の事実で、後半は前定理の小修正である。

以上両定理の議論から $X^*(t)$ は $X(t)$ の **双対過程** と見ることができる。

4 多重マルコフ ガウス過程

すでに establish された内容であるが、単純マルコフ過程の概念の拡張としての N 重マルコフ ガウス過程の定義とその特性をのべる。 ([2])

Definition 4.1 任意の t_0 と任意の異なる $\{t_i\}$、ただし $t_0 \le t_1 < ... < t_N < t_{N+1}$, に対して

i) $E[X(t_i)|\mathbf{B}_{t_0}(X)], i = 1, 2, ..., N,$ は一次独立であるが、

ii) $E[X(t_i)|\mathbf{B}_{t_0}(X)], i = 1, 2, ...N + 1$ は一次従属、

であるとき、$X(t)$ を N**-重マルコフ ガウス過程** という。

Theorem 4.2 標準表現を持つガウス過程 $X(t)$ が N-重マルコフ過程であるための必要十分条件は標準核 F が N 次の *Goursat kernel* となることである。すなわち

$$F(t, u) = \sum_{1}^{N} f_i(t) g_i(u) \tag{4.1}$$

と表され、任意の異なる $t_j, 1 \le j \le N$ に対して $det(f_i(t_j)) \ne 0$ であり、また 任意の t にたいして $\{g_i(u), i = 1, 2, \cdots\}, n,$ は $L^2([0, t]),$ において一次独立である。

この結果は、ガウス過程に対しては、多重マルコフ性が標準表現の核関数の解析的条件によって表されるという興味深い結果になり、同時に多重マルコフ性の定義が (単純) マルコフ性の一般化として reasonable であるということもできる。 しかし、第 1 節で述べた過去と未来との同等性を示すには不十分である。実際 $\{f_i(t)\}$ と $\{g_i(u)\}$ の果す 役割も解析的性質も違っている。

ところが、classical な狭義多重マルコフ過程の標準核、すなわち Riemann の関数を見るとき、もちろんそれは Goursat kernel であるが、系 $\{f_j\}$ と 系 $\{g_j\}$ との間に、適当な表現を用いれば、双対的な関係を見ることができる。[2].

このような事実も参考にして、次節では、超ガウス過程の世界にまで立ち入って、多重マルコフ性と双対性の問題を解決する第一歩とする。

この目的のために、もう一つ概念を準備する。それは一様 N 重マルコフ性である。

Definition 4.3 標準表現を持つガウス過程 $X(t), t \ge 0,$ が任意の時間区間において、常に N 重マルコフ性を持つとき、$X(t)$ は **一様** N **重マルコフ** ガウス過程であると言う。

$X(t)$ が一様 N 重マルコフ性を持てば、当然 N 重マルコフ過程であり、標準核を構成する組 $\{f_j\}$ と $\{g_j\}$ があって Goursat kernel となる条件をみたす。 一様 N 重マルコフ性を仮定しても $\{f_j\}$ の性質は変わらないが、$\{g_j\}$ については、より強い性質、すなわち、任意の区間で一次独立性がある。このことは超過程を扱う場合に有意な条件となる。

しかし、 f_j や g_j の微分可能性については、この方向では保障できない。

5 超ガウス過程の多重マルコフ性

前節の終わりに注意したこと等にヒントを得て、これからはガウス型**超過程** $X(\xi), \xi \in E,$ を扱う。

本節の目的は

1. 超 Gauss 過程の多重マルコフ性を定義し、それによるクラスを決め、さらにそれらのホワイトノイズによる表現を求める。

2. N 重マルコフ性を持つ超過程と、同じく N 重マルコフ性を持つ双対ガウス超過程を構成し、両者の双対性を示す。

超過程を定義するのは通常の方法による。すなわち, テスト空間 E は σ-ヒルベルト核型空間で $L^2(R^1)$ で dense とする.

話を具体的にするため、ヒルベルト-ノルムの列 $\|\cdot\|_n$ は n 次ソボレフ- ノルムとしておく。このノルムによる E の完備化を E_n と書く。injection $E_n \mapsto E_{n-1}$ は Hilbert-Schmidt タイプである。さらに

$$E = \bigcap_n E_n$$

となる。特性汎関数 $C(\xi) = \exp[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2]$、$\xi \in E$ に対して、E^* (E の共役空間) 上の確率測度 μ が存在して

$$C(\xi) = \int_{E^*} \exp[i < x, \xi >] d\mu(x)$$

となる。 実際 $\mathcal{B}$ を E^* の cylinder sets から生成される Borel field として、確率空間 $(E^*, \mathcal{B}, \mu)$ が得られる。以後これを基礎の確率空間とする。

確率超過程 $X(\xi, x), \xi \in E.$ は $\xi(\in E)$ について連続かつ線形で、それをパラメータとする $(E^*, \mathcal{B}, \mu)$ 上の確率変数の系である。$< x, \xi >$ は $X(\xi)$ の標本とみることができる。これは、任意の ξ についてヒルベルト空間 $L^2(E^*, \mu)$ の要素である。そうみたとき、ξ を $L^2(R^1)$ の要素 f にまで拡張できる。$< x, f >$ は確率変数として分布 $N(0, \|f\|^2)$ に従う。

超過程 $X(\xi)$ にもどり、 さらに次のことを仮定する。

(i) $X(\xi, x), \xi \in E$ はガウス系をなし、 $E(X(\xi)) = 0$、$\xi \in E.$ である。

(ii) $X(\xi)$ $(= X(\xi, x))$ は x について線形であり、$\xi \in E$ について $(L^2) = L^2(E^*, \mu)$ 連続である。 .

$\mathcal{B}_t(X)$ は $\{X(\xi), supp(\xi) \subset (-\infty, t]\}$ で生成される事象のなす完全加法族とし、$\mathcal{B}(X) = \bigvee_t \mathcal{B}_t(X)$. とする。これから、ヒルベルト空間

$$L_t(X) = L^2(\mathcal{B}_t(X), \mu)$$

および

$$L(X) = L^2(\mathcal{B}(X), \mu).$$

を定義する。仮定 (ii) から

(iii) $L(X)$ は可分である次の仮定を追加する。

(iv) $\bigcap L_t(X) = \{0\}$ (純非決定的).

これらの仮定からブラウン運動 $B(t), t \in R,$ が存在して $X(\xi)$ の標準表現を与えることが示される。

$X(\xi)$ の多重、特に $N(>1)$ 重マルコフ性の定義のため、次の解析的条件。(A) と (B) をおく。

(A) $X(\xi)$ は $H_1^{(-N)}$, に属する確率変数である。ここで $H_1^{(-N)}$ は H_1 の拡張で、それはソボレフ空間 $K^{(N)}(R^1)$ に共役な空間 $K^{(-N)}(R^1)$ に同型である。[4], §2.6. 参照)

(B) $X(\xi, x)$ は $\xi \in K^N(R^1)$ ほとんどすべての x について連続である。

Definition 5.1 これまでの仮定のもとで、もし $X(\xi)$ が条件 *i)* と *ii)* を満たせば、N 重マルコフ超がウス過程であるという。ただし、任意に固定した t_0 と 任意の一次独立な ξ_i *with supp*$(\xi_i) \subset [t_0, \infty)$ を選んだとき

i) $\{E(X(\xi_i)|\mathcal{B}_{t_0}(X)), i = 1, 2, \cdots, N\}$ は一次独立で、

ii) $\{E(X(\xi_i)|\mathcal{B}_{t_0}(X)), i = 1, 2, \cdots, N+1\}$ は一次従属。

ここで、$\mathcal{B}_{t_0}(X)$ は $X(\xi)$ *with supp*$(\xi) \subset (-\infty, t_0]$. で生成される完全加法族である。

まず $N = 1$ のときを考える。

Theorem 5.2 $X(\xi)$ が *1*-重マルコフであるとすると、$f \in K^{(-1)}(R^1)$ と $g^t \in K^{(-1)}(R^1)$ *suc* が存在して

$$E\left(X(\xi)|\mathcal{B}_t(X)\right) = \langle f, \xi \rangle U_t, \tag{5.1}$$

となる。ただし *supp*$(\xi) \subset (t, \infty)$ であり $U_t = \displaystyle\int g^t(u)\dot{B}(u)du \in H_1^{(-1)}$. と表される。

証明。t を固定する。異なる $\xi_1, \xi_2 \in K^1$ に対して $E(X(\xi_1)|\mathcal{B}_t(X))$ と $E(X(\xi_2)|\mathcal{B}_t(X))$ は一次従属である。ゆえに関数 $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ が存在して

$$E(X(\xi_1)|\mathcal{B}_t(X)) = \varphi(\xi_1, \xi_2)E((X(\xi_2)|\mathcal{B}_t(X)). \tag{5.2}$$

となる。あきらかに $\varphi(\xi, \xi) = 1$ および $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_2, \xi_1)^{-1}$ としてよい。任意の ξ_3 supported by $[t, \infty)$, に対して

$$E(X(\xi_2)|\mathcal{B}_t(X)) = \varphi(\xi_2, \xi_3)E((X(\xi_3)|\mathcal{B}_t(X)) \tag{5.3}$$

および

$$E(X(\xi_1)|\mathcal{B}_t(X)) = \varphi(\xi_1,\xi_3)E((X(\xi_3)|\mathcal{B}_t(X)). \tag{5.4}$$

である。(5.2),(5.3) および (5.4) を組み合わせて

$$\varphi(\xi_1,\xi_3) = \varphi(\xi_1,\xi_2)\varphi(\xi_2,\xi_3) \tag{5.5}$$

が出る。ξ, を固定して、たとえば $\xi = \xi_2$, とすれば

$$\varphi(\xi_1,\xi_3) = \frac{\varphi(\xi_1,\xi)}{\varphi(\xi_3,\xi)}. \tag{5.6}$$

だから、単に

$$\varphi(\xi_1,\xi_3) = \frac{\varphi(\xi_1)}{\varphi(\xi_3)}. \tag{5.7}$$

としてよい。故に、式 (5.4) は、 $\xi_1 = \xi$ とおいて

$$E(X(\xi)|\mathcal{B}_t(X)) = \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\xi_3)}E((X(\xi_3)|\mathcal{B}_t(X)) \tag{5.8}$$

となるが、それは

$$E\,(X(\xi)|\mathcal{B}_t(X)) = \varphi(\xi)U_t(\xi_3),$$

である。ただし $\varphi \neq 0$ の仮定のもとで

$$U(t,\xi) = \frac{E(X(\xi)|\mathcal{B}_t(X))}{\varphi(\xi)},$$

となる。等式 (5.2) から用意にわかるように、$U(t,\xi)$ は ξ に依存しない。よって。$U(t,\xi)$ は単に $U(t)$ と書いてよい。なお、$U(t)$ は $\mathcal{B}_t(X)$-可測であるから $\langle g^t, \dot{B}\rangle$ としてよい。ただし $g^t \in K^{(-1)}((-\infty,t])$ である。 a だから $U(t)$ は $H_1^{(-1)}$ で $\mathcal{B}_t(X)$-可測である。

さらに

$$E(\cdot|\mathcal{B}_{t'}(X)) = E(E(\cdot|\mathcal{B}_t(X))|\mathcal{B}_{t'}(X)), \quad (t > t'),$$

を用いて $g^t(u)$ の $(-\infty,t']$ への制限が $g^{t'}(u)$ と一致することがわかる。故に $g(u)$ が存在し、局所化積分で $K^{(-1)}(R^1)$ に属し、その $(-\infty,t]$ への制限が $g^t(u)$ する。

よって

$$U(t) = \langle g^t, \dot{B}\rangle.$$

ところで、 $\varphi(\xi)$ は (f,ξ)、 $f \in K^{(-1)}(R^1)$, と表されるので

$$E\,(X(\xi)|\mathcal{B}_t(X)) = (f,\xi)U(t).$$

これで定理が証明された。

以上のことを、 $N > 1.$ の場合に一般化する。

X のホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ よる表現が存在して、それが標準的であるとする。すなわち

$$\mathcal{B}_t(X) = \mathcal{B}_t(\dot{B}).$$

仮定 (A), (B) のもとで、次の定理が成り立つ。

Theorem 5.3 $X(\xi)$ は *is* N-重マルコフ ガウス超過程とすれば、$K^{(-N)}(R^1)$ に属する二つの関数の系 $\{f_i; 1 \le i \le N\}$ と $\{g_i; 1 \le i \le N\}$ が存在してそれぞれ一次独立な系をなし、 $det(\langle f_i, \xi_j\rangle) \neq 0$ である。さらに、

$$E\left(X(\xi)|\mathcal{B}_t(X)\right) = \sum_1^N \langle f_i, \xi\rangle U_i^t, \qquad \xi \in E \tag{5.9}$$

が成り立つ。ここで、$U_i^t = \langle g_i^t, \dot{B}\rangle$ であり、 g_i^t は g_i の $(-\infty, t]$ への制限である。

証明. 考え方は $N = 1$ の場合と同じで、類似の方法で証明できる。 t を固定する. $supp(\xi_j) \subset [t, \infty), 1 \le j \le N,$ で ξ_i's は一次独立と仮定する。よって $\mathrm{T}E(X(\xi_j)|\mathcal{B}_t(X)), j = 1, 2, \cdots N$ も一次独立である。$\xi_{N+1} = \zeta$ と書くと、5.2 の一般化として

$$E(X(\zeta)|\mathcal{B}_s(X)) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\zeta; \xi_1, \cdots, \xi_N) E(X(\xi_j)|\mathcal{B}_s(X)), \tag{5.10}$$

が得られる。ただし、 $supp(\zeta) \subset [s, \infty), s < t$ である。ベクトル $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ を $\boldsymbol{\xi}$ で表すと

$$E(X(\zeta)|\mathcal{B}_t(X)) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\zeta; \boldsymbol{\xi}) E(X(\xi_j)|\mathcal{B}_t(X)).$$

となる。それは、 $\tau < s < t$ で $supp(\eta_j) \subset [\tau, \infty), 1 \le j \le N,$ なら

$$\varphi(\zeta; \boldsymbol{\eta}) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\zeta; \boldsymbol{\xi}) \varphi(\xi_j; \boldsymbol{\eta}).$$

となる。N 個の異なる ζ_j's をとり、$\{\varphi(\zeta_j; \xi_1, \cdots, \xi_N), j = 1, \cdots, N\}$ を $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{\xi})$ と書く。

そうすれば

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{\eta}) = A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}),$$

となる。ただし、$A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) = [\varphi_j(\zeta_i; \boldsymbol{\xi})]_{i,j=1,\cdots,N}$. である。上の式から

$$\boldsymbol{\varphi}(\zeta; \boldsymbol{\eta}) = A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varphi}(\xi; \boldsymbol{\eta}) = A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) A(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}') \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}'; \boldsymbol{\eta})).$$

が出る。なお

$$\boldsymbol{\varphi}(\zeta; \boldsymbol{\eta}) = A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}') \boldsymbol{\varphi}(\eta'; \boldsymbol{\eta}),$$

だから

$$A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}') = A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) A(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}') \tag{5.11}$$

であるが、 $supp(\eta_j') \subset [\tau', \infty)$, for each j, and $\tau' < \tau$. に注意する。したがって。

$$A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) = A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}') A^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}') \tag{5.12}$$

これは η' に依存しない。 したがって次のように書くことができる。

$$A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi})) = A(\boldsymbol{\zeta}) A^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \tag{5.13}$$

一方, (5.10) における ζ の代りに ζ_j をとれば

$$E(X(\zeta_j)|\mathcal{B}_t(X)) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_k(\zeta_j; \boldsymbol{\xi}) E(X(\xi_j)|\mathcal{B}_t(X)),$$

$j = 1, \cdots, N$ である。

$(E(X(\zeta_1)|\mathcal{B}_t(X)), \cdots, E(X(\zeta_N)|\mathcal{B}_t(X)))$ を簡単に $\boldsymbol{E(X(\zeta)|\mathcal{B}_t(X)}$, と書けば

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\zeta})|\boldsymbol{\mathcal{B}}_t(\boldsymbol{X})) = A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\mathcal{B}}_t(\boldsymbol{X})). \tag{5.14}$$

となる。

$$\boldsymbol{U}^t(\boldsymbol{\zeta}) = (U_1^t(\boldsymbol{\zeta}), \cdots, U_N^t(\boldsymbol{\zeta})) \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{U}^t(\boldsymbol{\zeta}) = A^{-1}(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\zeta})|\boldsymbol{\mathcal{B}}_t(\boldsymbol{X})),$$

とする。ただし、各 j と $\tau < t$ について、$supp(\zeta_j) \cap [\tau, \infty) \neq \phi$, である。関係式 (5.13) および (5.14)　から

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}^t(\boldsymbol{\zeta}) = A^{-1}(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\zeta})|\boldsymbol{\mathcal{B}}_t(\boldsymbol{X}))& \\
&= A^{-1}(\boldsymbol{\zeta}) A(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\mathcal{B}}_t(\boldsymbol{X})) \\
&= A^{-1}(\boldsymbol{\zeta}) A(\boldsymbol{\zeta}) A^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi})|\boldsymbol{\mathcal{B}}_t(\boldsymbol{X})) \\
&= \boldsymbol{U}^t(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

が得られる。

すなわち $\boldsymbol{U}^t$ は $\boldsymbol{\zeta}$ と独立であり、 U_j^t.　もそうである。

また U_j^t は $H_1^{(-N)}$ に属し "加法的" であり、 系 U_j^t's　は一次独立な系である。したがって

$$U_j^t = \langle g_j^t, \dot{B} \rangle$$

のように表すことができる。ただし、 $g_j^t \in K^{-N}(R^1)$　である。

$\varphi_j(\xi; \xi_1, \cdots, \xi_N)$ (5.10) は $\xi_1, \cdots, \xi_n$ の線形関数であるから,$f_j \in K^{(-N)}(R^1)$ を用いて　$\langle f_j, \xi \rangle$　と表すことができる。よって定理が証明された。

Definition 5.4 超ガウス過程 $X(\xi)$ が任意の時間区間において N-重マルコフ性をもつとき、それを**一様 N-重マルコフ超ガウス過程** と呼ぶ。

Theorem 5.5 超ガウス過程 $X(\xi)$ が一様 N-重マルコフ超ガウス過程であれば当然 N-重マルコフ超過程で、それが定める f_i's は $K^{(-N)}(R^1)$ において一次独立で、 $det(\langle g_i, \xi_j \rangle \neq 0$ である。ここで ξ_j's は任意の一次独立な系である。.

この定理は $\{f_i\}$ と $\{g_j\}$ を $K^{-N}(R^1)$ 関数の系とみるとき、一次独立性については同じ表現ができる。 こうして次の最終目標である主定理に到達する。

Theorem 5.6 超ガウス過程 $X(\xi)$ が 一様 N-重マルコフ超過程であれば $X(\xi)$　の双対過程 $X^*(\xi)$ が存在して、 次式で表される：

$$E(X^*(\xi)|\mathcal{B}_t(X)) = \sum_{i=1}^{N} \langle g_i, \xi \rangle U_i^*(t). \tag{5.16}$$

ただし、 $U_i^*(t) = \langle f_i^t, \dot{B} \rangle$　である。

6 定常 N-重マルコフ超ガウス過程

超過程の定常性は、通常の確率過程と同様に、その確率分布が時間の shift に関して不変であると定義する。

$X(\xi)$ は定常 N-重マルコフ超ガウス過程で, 純非決定的であると仮定する。Section 2 における定義を一般化する。すなわち

$$\wedge_t \mathcal{B}_t(X) = 2(mod.P)$$

ここで 2 は空集合と全事象からなる自明な集合族を示す。

仮定から二つの系 $\{f_i\}$ と $\{g_i\}$ とがきまる。

Theorem 6.1 上記の仮定のもとで、 $\{f_i\}$ を用いて次式が成り立つ:

$$E(X(\xi)|\mathcal{B}_t(X)) = \sum_1^N \langle f_i, \xi \rangle U_i(t). \tag{6.1}$$

: ここで用いられる $\{f_i\}$ は次のような定数係数常微分方程式が存在してその基本解系をなす。

$$L_t f_i = 0,\ L_t = \sum_1^N a_i (\frac{d}{dt})^{N-i}, \tag{6.2}$$

a_i's は定数。また $U_i(t) = \langle g_i, \dot{B} \rangle$ である。さらに、双対過程 $X^*(\xi)$ が存在して

$$E(X^*(\xi)|\mathcal{B}_t(X)) = \sum_{j=1}^N \langle g_j, \xi \rangle U_j^*(t) \tag{6.3}$$

ただし $U_j^*(t) = \langle f_j^*, \dot{B} \rangle$ で、 $\{f_j^*\}$ は

$$L_t^* f_j^* = 0.\ L_t^* = \sum_1^N (-1)^{N-j} a_j (\frac{d}{dt})^{N-j}. \tag{6.4}$$

の基本解系である。

証明は [2] における定常過程の扱いと同様に与えられるが、それに双対過程の認識が加わる。

Theorem 6.2 定常 N-重マルコフ超ガウス過程は *K. Itô* の意味での空間 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_N$ に属する。

証明　純非決定的な定常 N-重マルコフ超ガウス過程のスペクトル測度は絶対連続で、その密度関数 $f(\lambda)$ は

$$f(\lambda) = \frac{Q(\lambda^2)}{P(\lambda^2)},$$

のように表される。ここで、P と Q λ^2 の多項式で、P と Q の次数はそれぞれ N および 高々$2N-1$ である。このことから Itô's classification (Appendix　参照) が適用できる。

7 Concluding remarks

ガウス過程の多重マルコフ性を、duality を考慮しながら、考えようとするとき、超過程にまで広げて議論することの意義を知るには、次の [I] と [II] を対比するのも一つの方法であろう。多重マルコフ性に関連して Duality を重視するのは、(単純) マルコフ過程について、現在を知ったとき、過去と未来の独立性が Duality の立場を明らかにしていることに起因する。

[I] 狭義 N-重マルコフ ガウス過程 $X(t)$ の場合。

定義には常微分作用素 L_t を用いる。 そのため $X(t)$ が $(N-1)$ 回微分可能を仮定し、N 回 微分は超過程の意味で理解する。マルコフ性の次数 N と $X(t)$ の解析性とは直接結びつくものとは考え難い。しかも狭義マルコフ仮定の場合、その N がマルコフ性の次数になっている。

一方。 $X(t)$ の表現の核関数は Riemann の関数で、その解析的な表示は duality を示すものと理解できる。実際、容易に双対過程が構成できる (Section 3 参照)。

[II] $X(\xi)$ の場合。

N-重マルコフ性の定義に直接 $X(\xi)$ の微分可能性を要求していない。

もう一つの重要な着眼点は、通常の $X(t)$ の場合、標準表現の核関数は Goursat 核で $\{f_i\}$ と $\{g_i\}$ との性質が違っていて、相互に移り代われない。しかし狭義 N-重マルコフなら、相互関係は明らかでに見られる。

超過程の世界で考えると、 Hida distribution が使えて、上の不満は解消された。

なお、ガウス系の場合、多重マルコフ性を考えるのに、前節の設定は、ある意味で maximal な領域とみることができる。

Appendix

定常超過程の K. Itō classification.

定常超過程 $X(\xi)$ のスペクトル測度 μ が

$$\int \frac{d\mu(\lambda)}{(1+\lambda^2)^k} < \infty$$

を満たすときクラス $\boldsymbol{S}_k$ に属するという。

$$\boldsymbol{S} = \cup_k \boldsymbol{S}_k$$

$$\cdots \subseteq \boldsymbol{S}_{-2} \subseteq \boldsymbol{S}_{-1} \subseteq \boldsymbol{S}_0 \subseteq \boldsymbol{S}_1 \subseteq \boldsymbol{S}_2 \subseteq \cdots,$$

Acknowledgement 今回報告しましたのは、ガウス過程のマルコフ性を 双対性の立場から研究する試みですが、この結果を発表する機会を与えて頂いた研究会オーガナイザーの小嶋 泉 先生にお礼申しあげます。

参考文献

[1] J.L. Doob, The elementary Gaussian processes. Annals of Math. Stat. vol 15, 229-282 (1944).

[2] T. Hida, Canonical representations of Gaussian processes and their applications. Mem. Coll. Sci. Univc. Kyoto, 34 (1960), 109-155.

[3] T. Hida, A characteristic properties of the space of generalized white noise functionals viewed through a system of dual pairs. 2008 RIMS Conference organized by I. Ojima,

[4] T. Hida and Si Si, Lecture on White noise functionals, World Scientific, Publ. Co. 2008.

[5] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin, Generalized functions, Vol 4. Academic Press, 1964.

[6] K. Itô, Stationary random distributions. Mem. Univ. of Kyoto, A. 28 Math. (1953)

[7] J.L. Lions, E. Magenes, Non-homogeneous boundary value problems ans applicatios. I. Springer-Verlag 1972.

[8] L.Schwartz, Théorie des distributions, Hemann 1950.

[9] Si Si, Win Win Htay, L. Accardi, $\mathcal{T}$-transform of Hida distribution and factorizations, Centro Vito Volterra N. 625, Feb 2009,1-15.

[10] Si Si, Introduction to Hida distributions. World Sci. Pub. Co. 2009. to appear

[11] Win Win Htay, Multiple Markov Property and Entropy of a Gaussian Process (preprint).

[12] Win Win Htay, Information loss of multiple Markov Gaussian processes. Nagoya Univ. preprint.