

# 超共形場理論と非可換幾何学

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

## 1 基本設定

場の量子論は、もちろんきわめて重要な物理の理論であり、数学における多くの基本的に重要なテーマと関連していることは言うまでもない。作用素環論との関係も古くから知られており、多くの結果があるが、ここでは、Connes の非可換幾何学との新しい関係について説明したい。ここで取り上げる場の理論は、超対称性を持ったカイラルな共形場理論である。

量子場の理論を数学的に扱う手段として古くからよく知られているものとして、Wightman field によるものがある。それは、時空と、その上の作用素値超関数と、時空の対称性の群を指定するものである。

共形場理論では、時空はまず 2次元 Minkowski 空間  $\{(x, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\}$  を考えるが、カイラルな理論では、その中の  $\{x = \pm t\}$  のいずれかをコンパクト化した 1次元円周  $S^1$  を考える。もう時間座標と空間座標は混ざってしまったが、これが「時空」にあたるものである。また、ここでの対称性の群は向きを保つ、自己微分同相写像の全体  $\text{Diff}(S^1)$  である。作用素値超関数の作用素は、真空ベクトルを持つ Hilbert 空間に作用する。これを、直接数学的に公理化したものが Wightman field の公理系である。今「時空」は、 $S^1$  なので、この上の作用素値超関数は、作用素を係数とする Fourier 級数に展開することができる。これを代数的に公理化したものが頂点作用素代数である。

しかしここでは、作用素環に基づく公理化を考える。代数的場の量子論と呼ばれるものである。( [9] に全体像がある。 ) 公理化のもととなる考え方は次のとおりである。 $S^1$  上の作用素値超関数  $T$  があったとしよう。区間  $I \subset S^1$  を固定し、 $\text{supp } \varphi \subset I$  となるような試験関数  $\varphi$  を取って、 $\langle T, \varphi \rangle$  を考える。「作用素値」超関数とは、これが (非有界かもしれない) 作用素になると言うことである。このとき、 $I$  を固定したまま、 $T$  や  $\varphi$  を取りかえる。こうしてできる  $\langle T, \varphi \rangle$  たちの生成する von Neumann 環を考える。これは「有界」な線形作用素のなす環である。この、 $I$  に  $A(I)$  を対応させる規則に条件を課したものを公理と思うのである。

1.  $I_1 \subset I_2 \Rightarrow A(I_1) \subset A(I_2)$ .
2.  $I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow [A(I_1), A(I_2)] = 0$ .
3.  $\text{Diff}(S^1)$ -共変性
4. 正エネルギー条件

## 5. 真空ベクトルの存在

2番目の条件中の括弧は交換子であり、この条件は局所性と呼ばれる。後の3つは題目だけ書いてある。正確な形は、[12]を参照していただきたい。このような条件を満たす作用素環の族  $\{A(I)\}$  を局所共形ネットという。数学的な立場からは、背景は忘れて単に上の5条件を満たす作用素環の族  $\{A(I)\}$  を考える、と言ってよい。

さて、このような公理系はよいが、どのような例があるのかまったく明らかでない。実際何も道具がなければ、自明な例(すべての  $I$  に対し  $A(I) = \mathbb{C}$ )以外の例を一つでも作ることは困難である。

そこで基本的な例を作る方法を説明しよう。Virasoro 代数と呼ばれる有名な無限次元 Lie 環がある。その生成元は  $\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  と、central element と呼ばれる一つの元  $c$  であり、それらの関係式は

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}.$$

と、 $c$  が中心的であることである。これに対し、Hilbert 空間の上へのユニタリ表現という概念があり、既約なユニタリ表現についてはよくわかっている。ここでは、 $c$  は正の実数に移され、その値は1以上の実数か、または  $c = 1 - 6/m(m+1)$ ,  $m = 3, 4, 5, \dots$  という形であることもわかっている。そのような表現で真空表現と呼ばれるものを一つ考えて固定し、 $L_n$  の像を同じ記号  $L_n$  と書く。そして、 $L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$  を  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 1$  に対して考えると、これがきちんと  $S^1$  上の作用素値超関数とすることができる。この一つの作用素値超関数に対して試験関数を用いて上の手続きを行うと、実際に局所共形ネットが作れていることがわかる。(この確認は自明ではない。)このとき  $c$  は特定の実数値を取っているので、こうしてできる局所共形ネットをこの値  $c$  に対する Virasoro ネットと言う。

ついで、この Virasoro 代数に、超対称性を取り込んだ、 $N = 1$  超 Virasoro 代数を考える。それは、 $\mathbb{Z}_2$ -grading を持つ超 Lie 環であって、その生成元は上述の、central charge  $c$  と  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (いずれも grading は偶) と、さらに grading が奇の元たち  $G_r$  である。ここで、 $r$  の動く範囲は2つの可能性があり、 $r \in \mathbb{Z}$  で考えるとき Ramond 代数、 $r \in \mathbb{Z} + 1/2$  で考えるとき Neveu-Schwarz 代数という。いずれの場合も、関係式は以下のとおりである。

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \quad (1)$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{m}{2} - r\right)G_{m+r}, \quad (2)$$

$$[G_r, G_s] = 2L_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}. \quad (3)$$

このうち Neveu-Schwarz 代数については、真空表現と呼ばれる既約ユニタリ表現がある。ここで、前と同様に、 $L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$  と、さらに  $\sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} G_r z^{-r-3/2}$  を考えると、これらは  $S^1$  上の作用素値超関数と解釈できる。ここで前と同様に、試験関数を使うと、やはり、作用素環の族  $\{A(I)\}$  ができるが、

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow [A(I_1), A(I_2)] = 0$$

の解釈では、角括弧は超交換子と思わなくてはいけない。つまり、超 Lie 環の偶奇性から、作用素たちにも偶奇性が定まり、奇の元同志の角括弧は反交換子と解釈するという意味である。こうしてできる作用素環の族を超共形ネットと言う。

今度は、既約ユニタリ表現における  $c$  の値は、

$$\left\{ \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{8}{m(m+2)} \right) \mid m = 3, 4, 5, \dots \right\} \cup [3/2, \infty)$$

という集合に入ることが知られている。  $c < 3/2$  の場合を考えよう。一般の超共形場理論では、もっと量子場(作用素値超関数)があるので、  $A(I)$  は大きくなると考えられる。そこで、  $A(I)$  をどのように大きくできるかを考える。(本当は  $A(I)$  を大きくするには、 Hilbert 空間も大きくしなくてはならないが、今はその話は省略する。 [12] に詳しく出ている。) 一般に  $A(I)$  を大きくする可能性は非常に限定されることが示され、  $c < 3/2$  のケースは完全な分類リストが [5] で示されている。それらは、  $A-D-E$  Dynkin 図形のある種のペアでラベルづけされている。これらは [1], [2], [14], [16], [17], [18], [19] に基づく。なお、 Jones 理論 [10] のこの文脈での説明は [7] にある。

共形場理論に対する他の手法との対比については、 [8] とそこでの参照文献を見るとよいであろう。 [11] にも最近の解説がある。

## 2 微分幾何学との類似

向きづけられた  $n$  次元コンパクト Riemann 多様体の Laplacian  $\Delta$  を考える。 Weyl の公式は、  $t \rightarrow 0$  のとき、

$$\text{Tr}(e^{-t\Delta}) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} (a_0 + a_1 t + \dots),$$

という漸近展開を与える。ここで、  $a_0$  は多様体の体積であり、  $n = 2$  のときは  $a_1$  は多様体の Euler 標数 (の適当な定数倍) である。

一方、たちのよい局所共形ネットに対し、  $t \rightarrow 0$  のとき

$$\log \text{Tr}(e^{-tL_0}) \sim \frac{1}{t} (a_0 + a_1 t + \dots),$$

という形の漸近展開がなりたつことが [13] で示された。ここで係数のうち最初の3つ、  $a_0, a_1, a_2$  は具体的に与えられている。

これはつまり、多様体の Laplacian と、局所共形ネットの  $L_0$  (conformal Hamiltonian と呼ばれる) が何か似たものであることを示している。また上の式で  $\log$  がついていてということは、局所共形ネットが、「無限次元」の幾何学的対象だということを示しており、それは当然最もなことであろう。しかし、  $\log$  を取った後の式は、ある種の正規化の後では、局所共形ネットは2次元の幾何学的対象のようなふるまいをするということである。このことについては詳しくは [13] を見るとよい。

「たちのよい」という条件は正確には、  $SL(2, \mathbb{Z})$  の二つの自然な作用が一致するということである。一つは、character の上の1次分数変換から定まり、もう一つは braiding から定まる。ある種の有限性条件を満たすすべての知られている例では、この二つの作用は一致している。

この種の類似のさらに一般的な追究が [15] にある。

## 3 非可換幾何学との関係

Connes の非可換幾何学 [6] の基本的な考え方は、非可換な作用素環は、「非可換空間」の上「関数環」と思ふべきだ、というものである。これは単位元を持つ可換な  $C^*$ -環は、コ

コンパクト Hausdorff 空間の上の連続関数環であり、可換な von Neumann 環は、測度空間の上の  $L^\infty$ -関数環であることに基づき、これ自体は古くからある考え方である。しかし、通常幾何学では単なるコンパクト Hausdorff 空間や測度空間ではなく、もっと強い構造の入ったもの、たとえば多様体を考える。そこで作用素環でも、(コンパクト Riemann) 多様体の上の  $C^\infty$ -関数環を「非可換化」したようなものを考えたいのである。

Connes による spectral triple がそのような、「非可換多様体」の公理化である。それは、より正確にはコンパクト Riemann spin 多様体の「非可換化」であり、次の 3 つ組  $(A, H, D)$  のことである。

1.  $H$ : Hilbert 空間.
2.  $A$ :  $B(H)$  の  $*$ -部分環.
3.  $D$ :  $H$  上の (非有界) 自己共役作用素.

ここで Hilbert 空間  $H$  は、 $L^2$ -spinors の空間の非可換化であり、 $A$  は、多様体  $M$  上の  $C^\infty(M)$  の非可換化である。 $A$  は norm で閉じていることは要請されていないので、一般に  $C^*$ -環ではない。 $D$  は Dirac 作用素の非可換化である。これらに対する公理として、 $D$  の resolvent がコンパクトであること、 $a \in A$  に対し、 $[a, D] \in B(H)$  であることを要請する。(正確には、 $[a, D]$  の定義域は  $H$  全体でないが、 $H$  全体に延ばせるということである。)

Ramond 代数の関係式の中に  $G_0^2 = L_0 - c/24$  があることに注意しよう。 $c/24$  は表現ではスカラーであり気にしなくてもよいので、 $G_0$  は実質的には、conformal Hamiltonian  $L_0$  の平方根である。Dirac 作用素は、適当な意味で、Laplacian  $\Delta$  の平方根とみなせるもので、 $\Delta$  と  $L_0$  の類似性を上で見たところなので、 $G_0$  は Dirac 作用素の類似物と思えるのである。

そこで、Ramond 代数のユニタリ表現から出発する。これにより、Hilbert 空間  $H$  の上の、von Neumann 環の族  $\{A(I)\}$  ができる。(  $I$  は  $S^1$  の区間である。 ) このとき、 $H$  は真空ベクトルを持たないので、これは上で述べた意味での超共形ネットではないのだが、それは今問題ではない。これによって、spectral triple のうち、Hilbert 空間  $H$  と、 $G_0$  の像  $D$  ができた。Resolvent のコンパクト性は問題ない。なお、今は  $G(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} G_r z^{-r-3/2}$  を見ると、 $r \in \mathbb{Z}$  なので、 $z$  の指数が半整数になってしまうが、それでも問題なく、構成が実行できる。詳しくは [4] を見よ。

さて、あとは作用素の環  $A$  だが、これは、区間  $I$  でパラメトライズされたものを作る。すでに、区間  $I$  ごとに von Neumann 環  $A(I)$  があるわけだが、これでは大きすぎるので、

$$A(I) = \{x \in A(I) \mid [D, x] \in B(H)\}$$

とおく。今度は作り方より、各区間  $I$  ごとに  $\{A(I), H, D\}$  が spectral triple になることは明らかだが、 $A(I) = \mathbb{C}$  になってしまうかもしれない。もちろん、このような spectral triple には何の興味もない。ここで、Buchholz-Grundling [3] の手法により、 $A(I)$  は、「十分大きい」ことが示せるのである。

なお、 $t > 0$  に対して、 $\text{Tr}(e^{-tD^2}) < \infty$  であることもすぐにわかる。非可換幾何学では、これはよく出てくる条件で  $\theta$ -総和可能条件と呼ばれる。これは、ある種の無限次元非可換多様体がたちのよいものであるという条件である。今、 $L_0$  の固有値の多重度は急速に大きくなっていくため、固有値の増大度はたいへんゆっくりであることに注意する。正確な構成と証明は [4] にゆずる。

## References

- [1] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On  $\alpha$ -induction, chiral projectors and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999), 429–487.
- [2] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **210** (2000), 733–784.
- [3] D. Buchholz & H. Grundling, *Algebraic supersymmetry: A case study*, Commun. Math. Phys. **272** (2007), 699–750.
- [4] S. Carpi, R. Hillier, Y. Kawahigashi & R. Longo, *Spectral triples and the super-Virasoro algebra*, Commun. Math. Phys. **295** (2010), 71–97.
- [5] S. Carpi, Y. Kawahigashi & R. Longo, *Structure and classification of superconformal nets*, Ann. Henri Poincaré. **9**, 1069–1121 (2008).
- [6] A. Connes, “Noncommutative Geometry” Academic Press (1994).
- [7] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, “Quantum Symmetries on Operator Algebras”, Oxford University Press, Oxford (1998).
- [8] T. Gannon, “Moonshine Beyond The Monster: The Bridge Connecting Algebra, Modular Forms And Physics”, Cambridge University Press (2006).
- [9] R. Haag, “Local Quantum Physics”, Springer (1996).
- [10] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–25.
- [11] Y. Kawahigashi, *From operator algebras to superconformal field theory*, J. Math. Phys. **51** (2010), 015209.
- [12] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of local conformal nets. Case  $c < 1$* , Ann. of Math. **160** (2004), 493–522.
- [13] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Noncommutative spectral invariants and black hole entropy*, Commun. Math. Phys. **257** (2005), 193–225.
- [14] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001), 631–669.
- [15] R. Longo, *Notes for a quantum index theorem*, Commun. Math. Phys. **222** (2001) 45–96.
- [16] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995), 567–597.
- [17] F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, Commun. Math. Phys. **192** (1998), 347–403.

- [18] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories I*, Commun. Math. Phys. **211** (2000), 1–44.
- [19] F. Xu, *Mirror extensions of local nets*, Commun. Math. Phys. **270** (2007) 835–847.