

双曲平面上の古典格子模型と 1 次元量子系と 1 粒子量子力学

西野友年 (Tomotoshi NISHINO)¹, 上田宏 (Hiroshi UEDA)², Andrej GENDIAR³

1) Dept. Physics, Graduate School of Sciences, Kobe University

2) Dept. Mat. Engineering Science, Graduate School of Engineering Sciences, Osaka University

3) Institute of Electrical Engineering, Slovak Academy of Sciences

「2次元平面上の物理」には、臨界現象やら局在やら量子ホール効果やら何やらと興味深いものが幾らでも転がっている。平面で十分に面白いのだから、曲面だともっと面白いだろう。(←と書いても、誰も容易には首を縦に振らないでしょうが。) そう思って曲がった空間に手を出すと、重力理論などを含む古典論はともかく、統計力学や量子力学や場の量子論ではイバラの道が待ち構えている。ともかくも、単純な例から考えて行くなれば、まず球面上の物理が思い浮かぶ。但し

- 球面は有限の系なので相転移などを考え辛い。
- 球面上を進んで行くと元の場所に戻って来るので、散乱現象などを考え辛い。

など、あまり面白くないこともある。そこで曲率が負である双曲平面について考えることにした。直感を養う目的で、まず **双曲平面** 上の (5,4) 格子を眺めよう。これは、等しい大きさの 5 角形

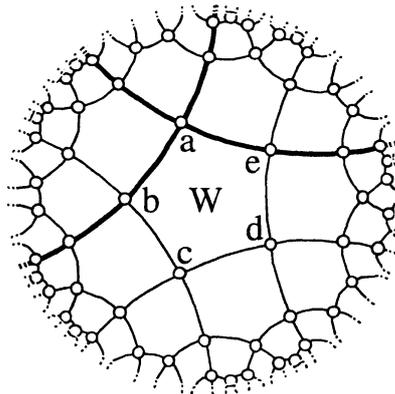


図 1: 双曲平面上の (5,4) 格子。太線は、格子点 a を通る 2 つの測地線。

をその頂点で 4 枚ずつ敷き詰めた「規則格子」だ。図上のどの場所も等価である図形なのだけれども、ポアンカレ円板の上に無理矢理押し込んで描いたので **本来は真っすぐな測地線** が円弧として描かれている。当然ながら、この格子はそれぞれの測地線に沿って並進対称性を持っている。また、ある 5 角形の中心から格子全体を眺めると 5 回対称になっている。ペンローズタイリングなど考えるまでもなく、**並進対称と 5 回対称が同居している** のだ。

... じゃあ、こんな 5 回対称の格子に X 線でも入射させると、回折パターンも 5 回対称になるんですね? —— と問われたら、その瞬間に地獄に落ちる。そもそも、回折を考えるには 3 次元空間が必要で、新たに付け足した 1 次元も含めて全空間を双曲な等質空間として扱い、そこで漸近波を作り、散乱断面積の計算をする 貴方は手を出せますか? (私、やめときます。) ひとつ救いがあるとするれば、漸近波が平坦な空間のソレよりも局在している (であろう) ことであるけれども。

より一般的に、正 p 角形を頂点で q 個ずつ敷き詰めた (p, q) 格子もあり、hyperbolic tessellation と呼ばれる平面充填図形の最も基本的な図形のグループを作っている。この格子の特徴を幾つか挙

げておこう。[1] (p, q) 格子の裏格子は (q, p) 格子であり、特に (q, q) 格子は自己双対 (self-dual) である。[2] p 角形の p が無限大ならば (p, q) 格子は Bethe 格子である。[3] 配位数 q が偶数であれば、格子は測地線で描かれる。[4] (p, q) 格子の位相次元は 2 であるが、ハウスドルフ次元 (フラクタル次元) は無限大である。これらを念頭に置いて、教科書に書いてあるような単純な物理を考え直すのも興味深い — たとえば次のように。

- 拡散問題は、平面格子とどのように異なるのだろうか? (←極限定理が面白そう。)
- 散乱断面積の定義は、どのように行なうのだろうか? また、漸近場の作り方は?
- 格子 Fermi 系を考える時、その状態密度は Bethe 格子と似ているだろうか?
- Hofstadter 模型を考えると、エネルギー固有値はちゃんとポアンカレ集合になるだろうか?

恐らく、これらの疑問の幾つかは、既に研究されていることだろう。

我々は $(5, 4)$ 格子上のイジング模型についての研究から、まず手をつけた。その結果は「数理解析研究所講究録 1600 巻 2008 年 185-191」にある通り、Bethe 格子上のイジング模型と同様で、平均場的な相転移が起きていた。恐らく、少しでも負の曲率がある空間上でイジング模型を考えると、相転移は平均場的になるのである。そして実は、この 2 次相転移には **臨界がない** のである。(繰込み群を考えても、ガウシアンには行き着かないだろう。) 平面格子ではイジング的である繰込みの固定点が、負曲率の増加に対して「何処へ消えてしまうのか」は未だに不明であり、今後詰めて行かなければならない。

1 双曲面上での 1 粒子量子力学

2 次元古典系の事を考えたならば、次は $1+1$ 次元量子系という研究の流れは誰でも思いつくことだろう。1 次元量子系の、虚 (または実) 時間発展を経路積分により取り扱うと、2 次元古典統計系の問題となる。この **量子・古典対応** は、例えばトロッター・鈴木分解などを通して明示することも可能だ。では、双曲面上の古典統計モデルに対応する 1 次元量子系とは何なのだろうか? そこで、またまたポアンカレ円板上での作図に立ち戻ろう。縦線を時刻 τ 軸に取って、それに直交する測地線上では時刻 τ が等しいと定義する。これらの横軸上で距離 x を考える。

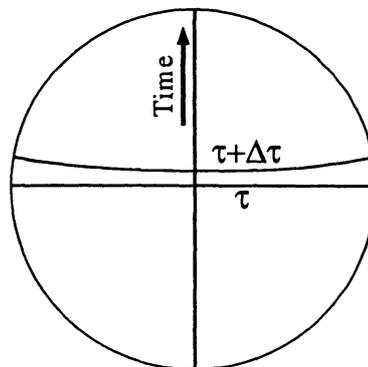


図 2: ポアンカレ円板上で考えた $1+1$ 次元空間。

時刻 τ の量子状態 $|\Psi(\tau)\rangle$ を考えよう。時刻 τ 以前の部分、つまり図の下半平面の部分が **一様な作用** で記述されるならば、状態 $|\Psi(\tau)\rangle$ には x の並進に対して不変であるものも含まれるだろう

——空間変調を伴う対称性の破れさえ無ければ。ともかくも、並進対称な場合のみについて微小(???)時間推進

$$|\Psi(\tau + \Delta\tau)\rangle = \mathcal{U}[\Delta\tau] |\Psi(\tau)\rangle \quad (1)$$

を考えて行く。状態 $|\Psi(\tau)\rangle$ や $|\Psi(\tau + \Delta\tau)\rangle$ が並進対称であっても $\mathcal{U}[\Delta\tau]$ は並進対称にはならない。図2に描かれた通り、時刻 τ を表す線と $\tau + \Delta\tau$ を表す線は「末広がり」になっているからだ——いつも「ホントに微小な推進なんですか?」と突っ込まれる。適当なパラメータ ν を用いると、 (x, τ) と $(x, \tau + \Delta\tau)$ の微小間隔は $(\cosh \nu x) \Delta\tau$ で表される。ハミルトニアン H を用いて、この $\mathcal{U}[\Delta\tau]$ を

$$\mathcal{U}[\Delta\tau] = \exp\left(-\int \hat{h}(x)(\cosh \nu x) \Delta\tau dx\right) = \exp(-\Delta\tau H) \quad (2)$$

と表せると仮定するならば、 H もまた並進対称ではない。直感的には上式のとおり

$$H = \int (\cosh \nu x) \hat{h}(x) dx. \quad (3)$$

と考えて良さそうだけど、 H が空間微分などを含むと、そう簡単には問屋が卸さない可能性もある。そこで地道に、離散的な格子ハミルトニアンから再出発する。1次元量子系の格子ハミルトニアンに対して、**双曲変形** という1パラメータ変形を考えて行くのだ。

2 離散から連続へ

1次元空間上で、規則格子を考える。格子定数を a 、 j 番目の格子点の空間座標を $x = aj$ と取ると、 $\lambda = \nu a$ の関係の下で次の関係式が成立する。

$$\cosh \nu x = \cosh \nu a j = \cosh \lambda j \quad (4)$$

これを横目に、隣接相互作用 $\hat{h}_{j,j+1}$ と on-site 項 \hat{g}_j からなるハミルトニアンを組んでみよう。

$$H(\lambda) = \sum_j \cosh \lambda j \hat{h}_{j,j+1} + \sum_j \cosh \lambda(j - \frac{1}{2}) \hat{g}_j \quad (5)$$

こう取るのが気に入らなければ、次のように取っても良い。

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \sum_j \cosh \lambda j \hat{h}_{j,j+1} + \frac{1}{2} \sum_j \left[\cosh \lambda j + \cosh \lambda(j-1) \right] \hat{g}_j \\ &= \sum_j \cosh \lambda j \hat{h}_{j,j+1} + \cosh \frac{\lambda}{2} \sum_j \cosh \lambda(j - \frac{1}{2}) \hat{g}_j \end{aligned} \quad (6)$$

パラメータ λ が小さな所を考えて行くので、式(5)と式(6)の差異はあまり問題ではない。(問題となることも稀にあるので要注意だけれども。)更に具体的に、格子上の自由フェルミ系を考えてみよう。

$$H_{\text{TB}}(\lambda) = -t \sum_j \cosh \lambda j \left(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j \right) - \mu \sum_j \cosh \lambda(j - \frac{1}{2}) c_j^\dagger c_j \quad (7)$$

これは1体問題、つまり量子力学で考えた方が簡単なので、波動関数 $\Psi_j = \langle j | \Psi \rangle$ が従う(定常状態の)シュレディンガー方程式に焼き直すと次式を得る。

$$E \Psi_j = -t \cosh \lambda j \Psi_{j+1} - t \cosh \lambda(j-1) \Psi_{j-1} - \mu \cosh \lambda(j - \frac{1}{2}) \Psi_j \quad (8)$$

ここで、パラメターの間に関係 $-\mu/t = 2 \cosh(\lambda/2)$ を仮定すると、基底エネルギー E_0 はゼロとなる。これを足がかりに、 $x = aj$, $\lambda = a\nu$ を思い出して **連続極限** を取ると $\Psi_j = \Psi(aj) = \Psi(x)$ より次の関係式へと至る。

$$E\Psi(x) = -t \cosh \nu \left(x - \frac{a}{2}\right) \cosh \nu \frac{a}{2} [\Psi(x+a) + \Psi(x-a)] \quad (9)$$

$$-t \sinh \nu \left(x - \frac{a}{2}\right) \sinh \nu \frac{a}{2} [\Psi(x+a) - \Psi(x-a)] - \mu \cosh \nu \left(x - \frac{a}{2}\right) \Psi(x)$$

見栄え良くするために $t = \hbar^2/(2ma^2)$ および $\mu = -U - 2t$ とパラメターを取り直してから $a \rightarrow 0$ の極限を取ると、連続な空間上での微分方程式が得られる。(これは良く見る形の方程式で、特に珍しいものではない。)

$$E\Psi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \cosh \nu x \frac{\partial}{\partial x} + U \cosh \nu x \right] \Psi(x). \quad (10)$$

「これを解析的に解きましたか？」と良く質問されるけれども、著者達はまだ解を得ていない。大切なことは、こういう連続極限があるのだから、式 (5) や式 (6) で記述される物理系が準粒子励起を持っていれば、やはり同じように連続極限を持つと (多体問題についても) 考えることである。

シュレディンガー方程式だけ見ても、双曲という気分にならなければ、($\hbar = 1$ の下で) 虚時間 t に対するラグランジアンから書き始めて

$$\mathcal{L}(\Psi^*, \partial_t \Psi^*, \partial_x \Psi^*, \Psi, \partial_t \Psi, \partial_x \Psi) = \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \cosh \nu x \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + U \Psi^* \Psi \right] \quad (11)$$

時間をチョイと $(\cosh \nu x) dt = d\tau$ と再定義すると

$$\mathcal{L}'(\Psi^*, \partial_\tau \Psi^*, \partial_x \Psi^*, \Psi, \partial_\tau \Psi, \partial_x \Psi) = \cosh \nu x \left[\Psi^* \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + U \Psi^* \Psi \right] \quad (12)$$

という形に整理できるから、最終的には次の形へと持って行けて「双曲」な気分になれる。

$$S = \int \mathcal{L}'(\Psi^*, \partial_\tau \Psi^*, \partial_x \Psi^*, \Psi, \partial_\tau \Psi, \partial_x \Psi) d\tau dx = \int \left[\Psi^* \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi + \hat{h}(x) \right] (\cosh \nu x) d\tau dx \quad (13)$$

但し、局所ハミルトニアンは次のように与えられる。

$$\hat{h}(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + U \Psi^* \Psi \quad (14)$$

3 何の役に立つのか?

事業仕分け的に表現するならば、1次元格子ハミルトニアンの **双曲変形** はとりたてて何の役にも立たない。量子的な1次元格子系に対して連続極限が存在し、それが双曲平面上の古典2次元系に対応するものを1パラメター変形として造れるという事だけである。変形は変形なので、普通に1次元系で良く使う解析の道具も1パラメター変形できる。例えば Corner Hamiltonian の変形は直ちに得られ、ある意味で普通の corner Hamiltonian を regularize したものであることが見て取れる。ここまで見て行くと、ああ、なるほど、masless な系の **赤外発散** は空間を双曲にすればコントロールできるのだと気付いて来る。実は数値計算によって、小さな gap を持つと予想されている物理系の gap を求める手段として、双曲変形ハミルトニアンが役立つことがわかっている。この成果については、またの機会に紹介したい。