

On $(2, 3)$ torus decompositions of QL -configurations

東京理科大学理学研究科 川島 正行

Department of Mathematics
Tokyo University of science

1 Introduction

$C = \{F = 0\}$ を射影平面 \mathbb{P}^2 内の平面曲線とする. 古くから多くの研究者によって C のトポロジーは研究されている. \mathbb{P}^2 内の次数が d の平面曲線全体を \mathcal{M}_d と表す. 本研究では以下で定義するトーラス曲線が研究の中心である. 平面曲線 $C = \{F = 0\} \in \mathcal{M}_d$ がタイプ (p, q) ($p > q \geq 2$) のトーラス曲線であるとは, C の定義多項式 F がある二つの斉次多項式 F_m, F_n を用いて

$$F(X, Y, Z) = F_m(X, Y, Z)^p + F_n(X, Y, Z)^q, \quad pm = qn = d$$

の形に書けるときをいう. F を構成している二つの斉次多項式 F_m, F_n によって定義される曲線を $C_m = \{F_m = 0\}, C_n = \{F_n = 0\}$ とおく. トーラス曲線を研究するときには二つの曲線 C_n と C_m の交わり方などの局所的な情報を付加して考えることが基本的であり, C_n と C_m の各交点での局所交点数から整数 d^2/pq の分割 $I(C_n, C_m)$ が定まる. 例として C_n と C_m が各交点で横断的に交わっているとき, 分割として $(1, \dots, 1)$ が定まる. この分割のことを generic な分割と呼び今後 I_{gen} で表す.

$\mathcal{M}(p, q, d, I)$ で整数 d^2/pq の分割 I をもつ d 次の (p, q) トーラス曲線全体とすると d 次のトーラス曲線全体 T_d は

$$T_d = \bigcup_{p, q, I} \mathcal{M}(p, q, d, I)$$

と $\mathcal{M}(p, q, d, \mathcal{I})$ たちによって分解される. $\mathcal{M}(p, q, d, \mathcal{I})$ の元を分割 \mathcal{I} をもつ d 次の (p, q) トーラス曲線という.

本研究の主なテーマは与えられた平面曲線 C が T_d に入るかどうかを考察することである. 即ち、トーラス分解を持つかどうかを判定し、以下の問題を解決することである:

1. 与えられた平面曲線のトーラス分解の可能性と一意性.
2. 分解の個数と位相不変量との関係.
3. トーラス分解は持たないが、準トーラス曲線を持つ曲線は存在するか.

本研究では上記の問題を QL -configurations と呼ばれるある 4 次曲線達に対して考察していく. QL -configurations とは [3] で H. Tokunaga によって特徴づけられた 4 次曲線 Q と無限遠直線 L_∞ の組で位置関係は次のように与えられている:

- $Q \cap L_\infty$ が異なる 2 点のとき.
 - (i) Q は L_∞ に滑らかに 2 つの交点で接している.
 - (ii) Q は交点のうち 1 点で L_∞ に接していて、もう一方では特異点を持つ.
 - (iii) Q は 2 つの交点で特異点を持つ.



- $Q \cap L_\infty$ が 1 点のとき.
 - (iv) Q は L_∞ に局所交点数 4 で接する.
 - (v) Q は交点で局所交点数 4 になる特異点をもつ.

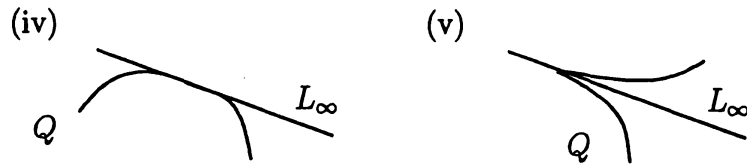


表 1 は [3] で与えられた $Q + L_\infty$ のリストのうち Q が既約な場合である.

No.	Sing(Q)	$Q \cap L_\infty$	No.	Sing(Q)	$Q \cap L_\infty$
(1)	$2a_2$	(i)	(8)	a_5	(iv)
(2)	$2a_2$	(iv)	(9)	a_6^∞	(ii)
(3)	$2a_2 + a_1$	(i)	(10)	$a_4^\infty + a_2$	(v)
(4)	$2a_2 + a_1$	(iv)	(11)	e_6	(i)
(5)	$3a_2$	(i)	(12)	e_6	(iv)
(6)	$a_2 + a_3^\infty$	(ii)	(13)	$a_4 + a_2^\infty$	(ii)
(7)	a_5	(i)			

表 1.

ここで表内の特異点のタイプ a_n, e_6 は次のように定義される:

$$a_n : x^2 + y^{n+1} = 0 \quad (n \geq 1), \quad e_6 : x^3 + y^4 = 0.$$

また, $*^\infty$ は L_∞ 上での Q の特異点を表している.

本研究ではこの QL -configurations のトーラス分解の可能性を M. Oka([1]) によって導入された *line degenerated torus curve* を用いて明らかにしていく.

2 Line degenerated torus curves

$C_{p,q} = \{F_{p,q} = 0\}$ をタイプ (p, q) のトーラス曲線で定義多項式 $F_{p,q}$ が次のように定義されているとする:

$$\begin{aligned} F_{p,q}(X, Y, Z) &= F_p(X, Y, Z)^q + F_q(X, Y, Z)^p \\ &= Z^j G(X, Y, Z), \quad j \geq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで F_p, F_q, G は次数がそれぞれ $p, q, pq - j$ の斉次多項式である. G が定義する平面曲線 D を *a line degenerated torus curve of type (p, q)*

of order j といひ, $L_\infty = \{Z = 0\}$ を *the limit line of the degeneration* といふ. line degenerated torus curves を考えるとき, 我々は二つのケースに分けて考える.

First case. このケースでは F_p と F_q が次のような形をしていると仮定する:

$$F_p(X, Y, Z) = F'_{p-r}(X, Y, Z)Z^r, \quad F_q(X, Y, Z) = F'_{q-s}(X, Y, Z)Z^s$$

ここで r, s は正整数で $r < p, s < q$ であるとする. 簡単のために $sp \geq rq$ とすると, $F_{p,q}$ は $F_{p,q}(X, Y, Z) = Z^{rq}G(X, Y, Z)$ のように書け G は

$$G(X, Y, Z) = F'_{p-r}(X, Y, Z)^q + F'_{q-s}(X, Y, Z)^p Z^{sp-rq}. \quad (2)$$

のように与えられた多項式を用いて書くことができる. このとき D を *visible* な degeneration という.

Second case. 二つ目のケースは F_p, F_q のどちらかが Z を因子として持っていないときで D の定義多項式はもともとの多項式を用いて表すことができない. このとき D を *invisible* な degeneration であるという.

3 Statement of the Theorem.

Theorem 1. $QL(n)$ で QL -configurations の 4 次曲線の部分集合でタイプが (n) のもの全体とする ($n = 1, \dots, 13$). このとき $(2, 3)$ トーラス分解の可能性は次のように与えられる.

- (1) $Q \in QL(n)$ ($n \neq 5, 13$) のとき, $(2, 3)$ トーラス分解は存在し, その分解の仕方は一意的である.
- (2) $Q \in QL(5)$ のとき複数の $(2, 3)$ トーラス分解が存在する. 分解の仕方は *visible* な分解が 3 つあり *invisible* な分解が二つある.
- (3) $Q \in QL(13)$ のとき $(2, 3)$ トーラス分解は存在しない.

定理の証明は line degenerated $(2, 3)$ トーラス曲線の特異点の分類と無限遠での様子を見ることによって得られる. 次の章で line degenerated $(2, 3)$ トーラス曲線を詳しく調べてく.

4 次数が4の line degenerated (2, 3) トーラス曲線

4.1 Visible degeneration

$D = \{G = 0\}$ を以下のように定義される次数が4の visible degeneration とする:

$$D: G(X, Y, Z) = F_2'(X, Y, Z)^2 + F_1'(X, Y, Z)^3 Z = 0.$$

D を構成している多項式が定義する平面曲線を $C_2 := \{F_2' = 0\}$, $L := \{F_1' = 0\}$, $L_\infty := \{Z = 0\}$ とおく. P を D の特異点とし、 P が次のいずれかの共通部分に含まれているとき P を内特異点という:

$$C_2 \cap L, C_2 \cap L_\infty, C_2 \cap L \cap L_\infty.$$

また特異点 P が内特異点でないとき P のことを D の外特異点であるという. 点 P での各曲線たちの局所交点数を $\iota_1 := I(C_2, L; P)$, $\iota_2 := I(C_2, L_\infty; P)$ とおく.

Lemma 1. 上の状況下での D の局所的な状況は次のように与えられる.

(I) C_2 が P で滑らかなとき.

- (1) $P \in C_2 \cap L \setminus L_\infty$ のとき $(D, P) \sim a_{3\iota_1 - 1}$ である.
- (2) $P \in C_2 \cap L_\infty \setminus L$ のとき D は P で滑らかで L_∞ に重複度 $I(D, L_\infty; P) = 2\iota_2$ で接する.
- (3) $P \in C_2 \cap L \cap L_\infty$ のとき $(D, P) \sim a_{3\iota_1 + \iota_2 - 1}$ である.

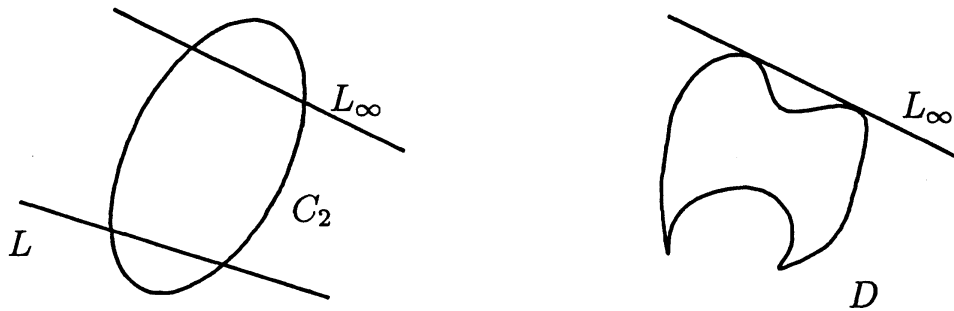
(II) C_2 が P で特異であるとき (即ち, $C_2 = L_1 \cap L_2$ で $P \in L_1 \cap L_2$).

- (1) $P \in C_2 \cap L \setminus L_\infty$ のとき $(D, P) \sim e_6$ である.
- (2) $P \in C_2 \cap L_\infty \setminus L$ のとき D は P で滑らかで L_∞ に重複度 $I(D, L_\infty; P) = 4$ で接する.
- (3) $P \in C_2 \cap L \cap L_\infty$ のとき D は四本の直線からなりそれらは P で交わる.

このように D の内特異点 P でのタイプは各局所交点数と C_2 の P での様子によって決定されることがわかる。また外特異点は次の補題で与えられる。

Lemma 2. $P \in D$ が外特異点のとき a_1 か a_2 特異点のどちらかである。

局所的な特異点を組み合わせることによって大域的な様子を見ることが出来る。特に D は表 1 の状況を (13) 以外すべて再現できる。例として (1) の場合を考えてみる。 C_2 と L を下図のような位置関係になるようにとると上の補題によって D は C_2 と L の交点で a_2 特異点をもち C_2 と L_∞ の交点では D は接していることがわかる。



この考察から QL -configuration のトーラス分解の可能性が得られる。

4.2 Invisible factorization

ここでは $D = \{G = 0\}$ を $(2, 3)$ -invisible degeneration とする:

$$F_{2,3}(X, Y, Z) = F_2(X, Y, Z)^3 - F_3(X, Y, Z)^2 = Z^2 G(X, Y, Z) \quad (2)$$

ここで D は被約で $Z \nmid G$ であるとする。簡単な計算によって F_2 と F_3 は以下のように与えられる:

$$(\#) \quad \begin{cases} F_2(X, Y, Z) = \ell_1(X, Y)^2 + \ell_2(X, Y)Z + a_{00}Z^2, \\ F_3(X, Y, Z) = \ell_1(X, Y)^3 + \frac{3}{2}\ell_1(X, Y)\ell_2(X, Y)Z + \ell_3(X, Y)Z^2 + b_{00}Z^3. \end{cases}$$

ここで ℓ_i は linear form である ($i = 1, 2, 3$)。このとき $F_{2,3}(X, Y, Z)$ は $F_{2,3}(X, Y, Z) = Z^2 G(X, Y, Z)$ と分解される。局所的な状況を考察することによって、 D は特異点 $\{3a_2\}$ を持つことがわかる。

5 Proof of (2) of Theorem 1.

$Q = \{F = 0\}$ を $\text{Sing}(Q) = \{3a_2\}$ であるような 4 次曲線とすると, プリュッカーの公式などから, Q は唯一つの bi-tangent line を持つことがわかる. この bi-tangent line を L_∞ として固定する. Q の特異点を $\Sigma(Q) = \{P_1, P_2, P_3\}$ とおき L_∞ との交点を $\{R_1, R_2\}$ とおく. $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ の \mathbb{P}^2 への作用によって,

$$P_1 = [1 : 0 : 1], \quad P_2 = \left[-\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1\right], \quad P_3 = \left[-\frac{1}{2} : -\frac{\sqrt{3}}{2} : 1\right], \quad R_1 = [1, 1, 0]$$

としておく. 簡単な計算によって Q の定義多項式 F は

$$F(X, Y, Z) = Z^4 - 6(X^2 + Y^2)Z^2 + 8(X^2 - 3Y^2)XZ - 3(X^2 + Y^2)^2.$$

となり, もう一つの接点 R_2 は $[-1 : 1 : 0]$ で与えられる. 次に以下のように定義される二つの \mathbb{P}^2 上の変換 $\sigma, \tau : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ を考える:

$$\sigma(X : Y : Z) := (X : -Y : Z), \quad \tau(X : Y : Z) := (X : Y : Z)A,$$

ここで

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta = -\frac{2}{3}\pi.$$

G で σ と τ によって生成される $\text{PSL}(3; \mathbb{C})$ の部分群とすると G は自然に S_3 と同型であり $\sigma^2 = \tau^3 = (\sigma\tau)^2 = e$ である. このとき L_∞ と $Q = \{F = 0\}$ は G の作用で不変であることがわかる:

$$F(X, Y, Z) = F(\sigma(X, Y, Z)) = F(\tau(X, Y, Z)).$$

さらに以下のことが成立する:

$$\sigma(R_1) = R_2, \quad \sigma(R_2) = R_1, \quad \sigma(P_1) = P_1, \quad \sigma(P_2) = P_3, \quad \sigma(P_3) = P_2.$$

$$\tau(R_i) = R_i, \quad i = 1, 2, \quad \tau(P_i) = \begin{cases} P_{i+1} & \text{if } i = 1, 2 \\ P_1 & \text{if } i = 3. \end{cases}$$

Remark. 上で構成した Q は G の作用で不変な 4 次曲線で特異点集合が $\{3a_2\}$ であるものとして特徴づけることができる. 実際 G の作用で不変な 4 次曲線の特異点集合は $\{3a_1\}$ か $\{3a_2\}$ のどちらかになり, 特異点の位置

を指定することによって定義多項式が唯一に決まる.

Visible degeneration. ここでは $Q = \{F = 0\}$ の visible degeneration について考える. F が以下のように書けているとする:

$$F(X, Y, Z) = F'_2(X, Y, Z)^2 + F'_1(X, Y, Z)^3 Z.$$

Lemma 1 によって P_1, P_2, P_3 のうちどれか二つは内特異点で一つは外特異点でなければならない:

- (1) P_1 が外特異点であり P_2, P_3 は内特異点である.
- (2) P_2 が外特異点であり P_1, P_3 は内特異点である.
- (3) P_3 が外特異点であり P_1, P_2 は内特異点である.

上で定義した G の作用によって実は三つのケースのうちどれか一つを考えればよい. 実際 (1) のタイプの分解が存在したと仮定したとき (2) の分解が存在することを示せばよい. C_2, L を (1) のタイプの分解を与える曲線とする. 即ち, P_1 は外特異点であり

$$C_2 \cap L = \{P_2, P_3\} \quad C_2 \cap L_\infty = \{R_1, R_2\}$$

である. 特異点集合 $\Sigma(Q)$ は τ の作用によって不変であり,

$$\tau(C_2 \cap L) = \{P_3, P_1\}, \quad \tau(C_2 \cap L_\infty) = \{R_1, R_2\}$$

が成立していて Q は G の作用で不変であるので P_2 が Q の外特異点になっていなくてはならないことになる. このとき $\tau(C_2), \tau(L)$ が (2) のタイプの分解を与えている. このようにして, 一つの visible なトーラス分解が得られるとその曲線がもつ対称性によって異なる三つの分解が得られる.

(1) の分解を考察する. まず仮定から $L = \{F'_1 = 0\}$ と $C_2 = \{F'_2 = 0\}$ は次のことを満たしている:

- P_1 は外特異点.
- L は P_2 と P_3 を通る直線.
- C_2 は P_2, P_3, R_1 と R_2 を通る 2 次曲線.

このとき条件を満たす曲線の定義多項式 F'_1, F'_2 は簡単な計算によって

$$F'_1(X, Y, Z) = -\frac{1}{3}t^2(Z + 2X), \quad F'_2(X, Y, Z) = \frac{t^3}{6}(Z^2 + 4XZ + Y^2 + X^2).$$

で与えられる. t を $t^6 + 108 = 0$ の根の一つとすると F は

$$F(X, Y, Z) = -3(Z^2 + 4XZ + Y^2 + X^2)^2 + 4(Z + 2X)^3 Z. \quad (\text{V-1})$$

のように分解する. ここで C_2, L, P_1 と $\{P_2, P_3\}$ は σ の作用で不変である.

Invisible degeneration. つぎに invisible factorization な分解を考察する. §4.2 での考察によって invisible なケースには特異点 $\{3a_2\}$ をもち invisible な分解を与える定義多項式 F は

$$Z^2 F(X, Y, Z) = F_2(X, Y, Z)^3 - F_3(X, Y, Z)^2$$

を満たすものとして与えられる. ここで F_2 と F_3 は

$$\begin{aligned} F_2(X, Y, Z) &= \ell_1(X, Y)^2 + \ell_2(X, Y)Z + a_{00}Z^2, \\ (\#) \quad F_3(X, Y, Z) &= \ell_1(X, Y)^3 + \frac{3}{2}\ell_1(X, Y)\ell_2(X, Y)Z + \ell_3(X, Y)Z^2 + b_{00}Z^3 \end{aligned}$$

で与えられる. このとき P_1, P_2 と P_3 は内特異点であり, 条件

$$(*_1) \quad F_2(P_i) = F_3(P_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

などにより定義多項式は

$$\begin{aligned} F_2(X, Y, Z) &= t^2(X - IY)^2 - t^2(X + IY)Z, \\ F_3(X, Y, Z) &= \frac{t^3}{2}(Z^3 - 3(X^2 + Y^2)Z + 2(X - IY)^3) \end{aligned}$$

となり $C_2 = \{F_2 = 0\}$ と $C_3 = \{F_3 = 0\}$ は σ の作用で不変である. このとき

$$\frac{t^6}{4}Z^2 F(X, Y, Z) = F_2(X, Y, Z)^3 - F_3(X, Y, Z)^2.$$

であり, t を $t^6 = 4$ の一つの根とすると invisible な分解

$$Z^2 F(X, Y, Z) = ((X + IY)Z - (X - IY)^2)^3 + (Z^3 - 3(X^2 + Y^2)Z + 2(X - IY)^3)^2. \quad (\text{In-1})$$

を得る。また曲線の対称性と visible な分解のケースと同様な議論をすることによってもう一つの分解

$$Z^2 F(\sigma(X, Y, Z)) = ((X - IY)Z - (X + IY)^2)^3 + (Z^3 - 3(X^2 + Y^2)Z + 2(X + IY)^3)^2. \quad (\text{In-2})$$

が得られる。このように異なる二つの invisible な分解 (In-1), (In-2) が得られる。

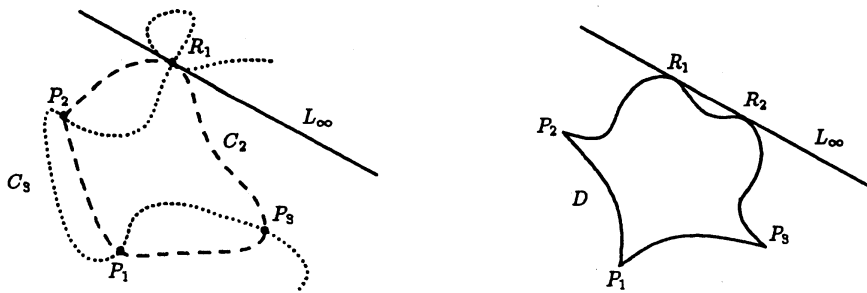


図 1: Invisible factorization (In-1) of the quartic (5)

さらにこの Q に対してはまだ他の分解が存在している。 s_1, s_3, s_5 を次数がそれぞれ 1, 3, 5 の多項式で次のように定義されているとする:

$$s_1(x, y) = x - Iy - 1,$$

$$s_3(x, y) = \sqrt[3]{4}(3Iy^3 - (5x + 7)y^2 - I(x - 1)^2y - (x - 1)^3),$$

$$s_5(x, y) = \sqrt{3}(y^5 + 3I(x + 5)y^4 - 2(x^2 + 13x + 10)y^3 + 2I(x - 4)(x - 1)^2y^2 - 3(x + 1)(x - 1)^3y - I(x - 1)^5).$$

このとき

$$s_1(x, y)^6 f(x, y) = s_5(x, y)^2 + s_3(x, y)^3.$$

が成立する。

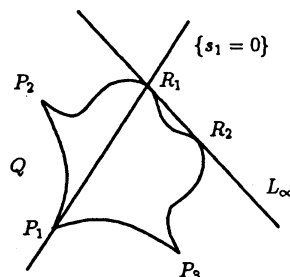


図 2:

この分解においても曲線の対称性によって複数の分解が存在する。実際、上式で与えられる分解を D_1 とすると、 σ, τ によって

$$\begin{array}{ccccc} D_1 & \xrightarrow{\tau} & D_2 & \xrightarrow{\tau} & D_3 \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ D_4 & \xrightarrow{\tau} & D_5 & \xrightarrow{\tau} & D_6 \end{array}$$

のように新しい分解を5つ構成することができる。

このように $\{3a_2\}$ をもつ4次曲線には複数の分解が存在しているが、現段階では現在見つかっている分解がすべてかどうかわかっていない。今後の研究課題としてはこの4次曲線の分解の個数を決めることと、この曲線の他にも複数の分解を持つ曲線が存在するかどうかを考察することである。

参考文献

- [1] M. Oka. Tangential Alexander polynomials and non-reduced degeneration. In *Singularities in geometry and topology*, pages 669–704. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [2] M. Oka and D. Pho. Classification of sextics of torus type. *Tokyo J. Math.* 25 (2002), no. 2, pages 399–433, 2002.
- [3] H.-o. Tokunaga. Dihedral covers and an elementary arithmetic on elliptic surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 44(2):255–270, 2004.