

## On horospherical linear Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space

東京電機大学・工学部 國分雅敏 (Masatoshi Kokubu)  
School of Engineering,  
Tokyo Denki University

### 1 序

3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  内のホロ球面的線形 Weingarten 曲面と呼ばれるある種の Weingarten 曲面に関して、基本性質や表現公式 ([GMM2], [K]) とその応用について紹介する。とくに、向き付け可能性・余向き付け可能性が主テーマである。

通常、曲面の(外在的な)微分幾何では、曲面は底空間にはめ込まれたものとして研究を行うが、本稿でははめ込まれた曲面の一般化である波面に対して行う。波面とはある種の特異点を許容したものである。

2節では、底空間を任意の空間形として線形 Weingarten 曲面を少し詳しく紹介する。3節からは対象を  $\mathbb{H}^3$  内のホロ球面的線形 Weingarten 曲面に絞る。3節でははめ込みの範疇で議論するが、4節以降は、波面に一般化して議論する。5節ではホロ球面的線形 Weingarten 波面を複素解析的なデータで記述する表現公式を紹介する。6～8節では、大阪大学の梅原雅顕氏との最近の共同研究 ([KU]) による結果を紹介する。

### 2 背景

本内容の主なテーマは3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  内の曲面に関するものであるが、線形 Weingarten 曲面がどのような幾何学対象であるか理解するために、少し一般的な状況から始めることとする。

$M^2$  を連結な2次元多様体とする。3次元空間形  $\tilde{M}^3 = \tilde{M}^3(k)$  ( $k = 0, 1, -1$ ) =  $\mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$  にはめ込まれた曲面  $f: M^2 \rightarrow \tilde{M}^3$  は、その平均曲率関数  $H$  と Gauss 曲率関数  $K$  が関数関係にあるとき、すなわち、ある滑らかな2変数関数  $W = W(x, y)$  が存在して、 $M^2$  上  $W(H, K) = 0$  が成り立つとき、Weingarten 曲面 ( $W$  曲面) と呼ばれる。微分形式を使って、 $M$  上

$$dH \wedge dK = 0$$

が成り立つことが  $W$  曲面の定義であると言ってもよい。もしくは、主曲率関数  $\kappa_1, \kappa_2$  が

$$d\kappa_1 \wedge d\kappa_2 = 0$$

を満たすことと言ってもよい。すぐに思い浮かぶ例としては、平均曲率一定曲面、Gauss 曲率一定曲面、回転面が挙げられる。

**Remark 2.1.** 平均曲率関数  $H$  は  $M^2$  上大域的に定義されるか否かは、 $M^2$  が向き付け可能か否かによる。しかしながら、はめこみ  $f: M^2 \rightarrow \tilde{M}^3$  が Weingarten であることは、向き付け不可能なものに対しても well-defined である。実際、向きづけ不可能な場合、 $\pm H$  は決まるので、 $dH \wedge dK$  が 0 かどうかはちゃんと決まる。

W 曲面であって、とくに、 $H, K, 1$  が線形従属であるとき、つまり、

$$aH + bK + c = 0 \text{ for some } [a : b : c] \in \mathbb{R}P^2$$

が成り立つとき線形 Weingarten 曲面 (LW 曲面) と呼ばれる。平均曲率一定曲面、Gauss 曲率一定曲面は明白な例である。非自明な例としては、平均曲率一定曲面、Gauss 曲率一定曲面の平行曲面が挙げられる。例えば、 $\mathbb{E}^3$  において平均曲率一定値  $1/2$  の曲面に対し、距離  $t = 1$  の平行曲面をとれば Gauss 曲率が一定値  $1$  の曲面が得られることがよく知られているが、この変形の途中に現れる平行曲面  $f_t$  は、 $2(1-t)H_t + t(2-t)K_t - 1 = 0$  を満たすことが確かめられ、すなわち  $f_t$  はすべて LW 曲面である。

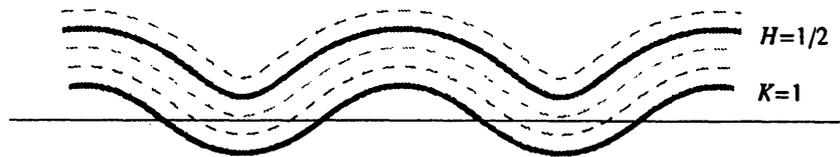


図 1: unduloid (平均曲率一定回転面) とその平行曲面族の母線

一方、必ずしも平均曲率や Gauss 曲率が一定ではない W 曲面が与えられたとき、その W 曲面の平行曲面 (仮に向き付け不可能であったなら、二重被覆に対しての平行曲面) は再び W 曲面であり、線形 W 曲面に限ってもそうであることが容易に確かめられる。すなわち、線形 W 曲面  $f$  の平行曲面  $f_t$  の Gauss 曲率  $K_t$ 、平均曲率  $H_t$  は

$$a_t H_t + b_t K_t + c_t = 0 \text{ for some } [a_t : b_t : c_t] \in \mathbb{R}P^2$$

を満たし、再び線形 W 曲面である。

さて、ここまでは平行曲面も正則 (regular) であると暗に仮定して話を述べてきたが、これは常に成り立つとは限らない。つまり、はめ込み  $f$  に対し、十分小さな  $t$  では  $f_t$  もはめ込みであることは保証されるが、ある程度  $|t|$  が大きくなると  $f_t$  は特異点をもつかもしれないし、むしろそのほうが普通である。

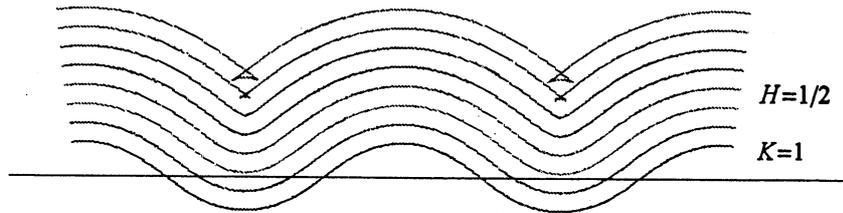


図 2: unduloid の平行曲面族の母線 (特異点を許容するものも含む)

この特異点つき曲面は波面 (wave front) と呼ばれるクラスに属する。我々の研究も、最終的には波面の範疇で行う。

### 3 $\mathbb{H}^3$ 内のホ口球面型の線形 W 曲面

対象を絞って、3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  にはめ込まれた曲面であって、

$$\alpha(H - 1) = \beta K \text{ for some } [\alpha : \beta] \in \mathbb{R}P^1 \quad (*)$$

を満たすものを考える。これも線形 W 曲面の例であるが、我々は次のように呼ぶこととする。

**Definition 3.1.** 条件 (\*) を満たす線形 W 曲面をホ口球面型の線形 Weingarten 曲面 (HLW 曲面) と呼ぶ。(ホ口球面自体は  $H = 1$  かつ  $K = 0$  の曲面として特徴付けられることを思い出そう。)

**Lemma 3.2.** HLW 曲面は向き付け可能である。

*Outline of proof.* 3つに場合分けして考える。

平坦な場合, i.e.,  $K = 0$  の場合: [KRUY] で証明済み

平坦ではないが極小の場合, i.e.,  $K \neq 0, H = 0$  の場合: 条件より, Gauss 曲率  $K$  も一定でなければならない。ここで [C] の結果を用いると, 曲面は全測地的でなければならない。

平坦でも極小でもない場合, i.e.,  $K \neq 0, H \neq 0$  の場合: 向き付け不可能な HLW 曲面があったとすると, 向き付け可能な領域  $U \subset M^2$  上で,  $\alpha(H - 1) = \beta K$  が成り立つのと同時に,  $\alpha'(-H - 1) = \beta'K$  が成り立たなければならないが, これは起こりえない。□

対象を絞った理由は, それらが更に良い性質をもつからである:

- (1) この曲面のクラスに限っても, 平行曲面をとることにに関してこのクラスの中で閉じている。

- (2)  $[\alpha : \beta] = [2 : 1]$  の場合を除いて,  $(\mathbb{E}^3$  の極小曲面の Weierstrass 表現公式のような) 正則関数 (holomorphic function) による表現公式をもつ. (5節で説明する.)

上記 (1) に関してもう少し詳しく説明しよう.  $\mathbb{H}^3$  にはいくつかのモデルがあるが, ここでは  $\mathbb{H}^3$  を 4次元 Lorentz-Minkowski 空間  $L^4$  の超曲面

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = -1, x^0 > 0\}$$

と見ることとする. ここで,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$  は符号  $(-, +, +, +)$  の Lorentz 内積である. すると, はめ込み  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  は  $L^4$  に値をもつ関数で  $\langle f, f \rangle_L = -1, f^0 > 0$  を満たすもの, その単位法ベクトル場  $n$  は  $L^4$  に値をもつ関数で  $\langle n, n \rangle_L = 1$  を満たすものとして扱うことができる. このとき, 実数  $\delta \in \mathbb{R}$  に対して

$$f_\delta := (\cosh \delta)f + (\sinh \delta)n$$

は再び,  $\mathbb{H}^3$  への写像であり, 各  $p$  に対して  $f(p)$  と  $f_\delta(p)$  の距離はちょうど  $\delta$  であることが確かめられる. すなわち  $f_\delta$  は  $f$  の平行曲面である.

上記 (1) については, より詳しく次が成り立つ (図 3 参照):

**Proposition 3.3.** (i) 平坦曲面 ( $K = 0$ ) の平行曲面は, 再び平坦である.

(ii)  $2(H - 1) = K$  を満たす曲面は, その平行曲面も  $2(H - 1) = K$  を満たす.

(iii)  $H - 1 = \lambda K$  ( $\lambda > 1/2$ ) を満たす曲面は, その平行曲面も  $H - 1 = \lambda K$  ( $\lambda > 1/2$ ) を満たす.

(iv)  $H - 1 = \lambda K$  ( $\lambda < 1/2$ ) を満たす曲面は, その平行曲面も  $H - 1 = \lambda K$  ( $\lambda < 1/2$ ) を満たす.

証明は [K] を参照されたい.

$$\mathcal{W}_{[\alpha:\beta]} := \{ \alpha(H - 1) = \beta K \text{ を満たす Weingarten 曲面} \}$$

$$\mathcal{W} := \bigcup_{[\alpha:\beta] \in \mathbb{RP}^1} \mathcal{W}_{[\alpha:\beta]}$$

とおくと, 次の各サブクラス  $\mathcal{W}^i$  が平行曲面をとることに閉じていることを主張している.

$$\mathcal{W}^0 := \mathcal{W}_{[0:1]}, \quad \mathcal{W}^1 := \bigcup_{\lambda < 1/2} \mathcal{W}_{[1:\lambda]}, \quad \mathcal{W}^2 := \mathcal{W}_{[1:1/2]}, \quad \mathcal{W}^3 := \bigcup_{\lambda > 1/2} \mathcal{W}_{[1:\lambda]}.$$

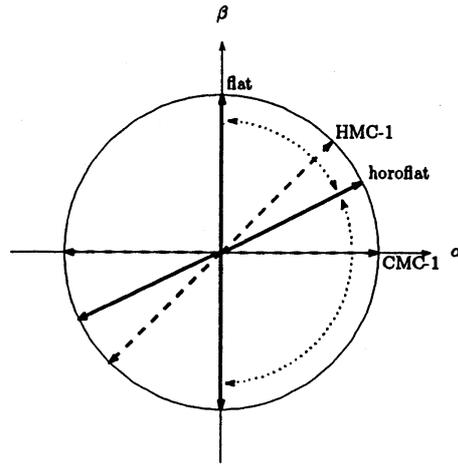


図 3: 比  $[\alpha : \beta]$

ここで,  $\mathcal{W}^0$  は平坦曲面のクラスであり,  $\mathcal{W}^1$  は CMC-1 曲面を含むクラスであることに注意したい. ( $\mathcal{W}^1$  に属する曲面は, 適当な CMC-1 曲面の平行曲面として得られるから)  $\mathcal{W}^0, \mathcal{W}^1$  に属する曲面は, これまでによく研究されている対象である.

この節の最後として, 以降使用する用語をいくつか紹介しておく.

$[\alpha : \beta] = [0 : 1]$  の HLW 曲面が平坦曲面と呼ばれるのに対し,  $[\alpha : \beta] = [2 : 1]$  の HLW 曲面はホロ平坦曲面と呼ばれる. (cf. [IST]). 上記 (2) は「ホロ平坦でない HLW 曲面は正則関数による表現公式をもつ」と言い換えることができるが, このような性質は元々  $[\alpha : \beta] = [0 : 1]$  の場合, すなわち, CMC-1 曲面 (Bryant 曲面) や平坦曲面に対してはよく知られていた. (cf. [Br], [UY], [GMM1], [KUY]). そのようなわけで, ホロ平坦でない HLW 曲面は (Bryant 型の表現公式をもつので) Bryant 型の線形 W 曲面 (BLW 曲面) とも呼ばれる.

#### 4 波面, 余向き付け可能性

**Definition 4.1.** Legendre はめ込み  $L: M^2 \rightarrow P(T^*\tilde{M}^3)$  の射影  $\pi \circ L: M^2 \rightarrow \tilde{M}^3$  (もしくはその像  $\pi \circ L(M^2)$ ) は波面 (wave front) と呼ばれる. 更に  $L$  が  $T_1^*\tilde{M}^3$  への写像に持ち上がるとき, 波面  $\pi \circ L$  は余向き付け可能であるという.

ここで  $T^*\tilde{M}^3$  は余接バンドル,  $P(T^*\tilde{M}^3)$  は  $T^*\tilde{M}^3$  の各ファイバーを射影化したバンドル,  $T_1^*\tilde{M}^3$  は単位余接バンドルである. また,  $P(T^*\tilde{M}^3)$

には自然な接触構造を与えている。

空間形  $\tilde{M}^3$  の Riemann 計量により,  $T^*\tilde{M}^3$  と  $T\tilde{M}^3$  を同一視することにより, 余向き付け可能性は‘単位法ベクトル場’が大域的に存在することと同値であると言える. 空間形  $\tilde{M}^3$  にはめ込まれた曲面では, 向き付け可能性と余向き付け可能性は同等の概念となるが, 波面の場合にはそうではないことに注意されたい.

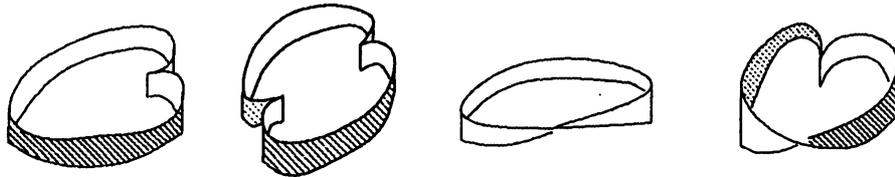


図 4: 向き付け可能性と余向き付け可能性

波面  $f: M^2 \rightarrow \tilde{M}^3$  に対し,  $f$  自身の  $p \in M^2$  における微分写像  $(df)_p$  が単射ならば (すなわち,  $p$  の近傍では  $f$  がはめ込みならば)  $p$  は  $f$  の正則点であるという. そうではない点を特異点と呼ぶ. 正則点全体を  $R_f$  で表し, 特異点全体を  $S_f$  で表す.

通常, 曲面 (部分多様体) の微分幾何は はめ込み・埋め込みを対象とするが, ある種の特異点を許容したほうが自然な場合もある. 我々の研究でもそうであり, 具体的理由として

- (1) 既に指摘しているように, 一般に, はめ込まれた曲面でもその平行曲面には特異点が生じ, それは波面である.
- (2) HLW 曲面の大域的性質を調べようとするとき, はめ込まれた (もしくは埋め込まれた) 曲面に限ると実例自体が少ない. (例えば,  $\mathbb{H}^3$  にはめ込まれた完備な平坦曲面は, ホロ球面・双曲的円柱に限る.)

などが挙げられる.

大切な Remark として, 波面に対しては (元の 2 次元多様体  $M^2$  が向き付け可能であろうとなかろうと) 余向き付け可能ならば, その平行曲面 (平行波面) が定義されることが挙げられる.

$\mathbb{H}^3$  の波面に戻ることにする. 上で述べた余向き付け可能性や Proposition 3.3 を鑑み, 次の定義を与える.

**Definition 4.2** ([KU]). 波面  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  がホロ球面型の線形 Weingarten 波面 (HLW 波面) であるとは, 任意の点  $p \in M^2$  に対して, あ

る近傍  $U$  と実数  $\delta_0 \in \mathbb{R}$  が存在して, 平行波面  $f_{U, \delta_0}$  が (正則な) HLW 曲面となることを意味する.

事実として, 1 点  $p$  を固定したとき,  $p$  が  $f_t$  の特異点となるような  $t$  の値は高々 2 つしかないことが示される. このことから, Definition 4.2 にある実数  $\delta_0$  の値は一つ存在すれば豊富に存在することとなる.

HLW 波面の例外的な例として, その像が双曲直線や一点になってしまうものが挙げられる. 前者は双曲的円柱の平行曲面, 後者は測地的球面の平行曲面として現れる. 逆に, 正則点を全く含まないような  $W$  波面はこれらに限ることを示すこともできる. しかしこれらは例外的であるから, 以降, HLW 波面と言ったら, 正則点を必ずもつことを仮定する.

**Proposition 4.3** ([KU]).  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を HLW 波面とする.  $M^2$  のある開集合上で Gauss 曲率 0 ならば,  $M^2$  のすべての正則点で Gauss 曲率 0 である.

*Proof.* ある開集合  $U \subset M^2$  の上で Gauss 曲率  $K$  が 0 であるとせよ.  $q \in M^2$  を  $U$  に十分近いところにとって,  $q$  の近傍  $U_q$  が  $U_q \cap U \neq \emptyset$  かつ  $f_{U_q, \delta_0}$  が  $\alpha_q(H-1) = \beta_q K$  を満たすはめ込みであるようにしておく. すると  $f_{U_q \cap U, \delta_0}$  に対しては,  $K=0$  かつ  $\alpha_q(H-1) = \beta_q K$  であるから, 定数  $\alpha_q$  は 0 でなければならない. ゆえに,  $U_q \cap R_f$  上でも  $f$  に関する Gauss 曲率は 0 である. したがって,  $U \cup (U_q \cap R_f) = (U \cup U_q) \cap R_f$  上 Gauss 曲率は 0 である. この手順を次々と進めることにより,  $R_f$  全体で Gauss 曲率は 0 であると言える.  $\square$

**Theorem 4.4** ([KU]).  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を平坦波面ではない HLW 波面とする. このとき,  $f$  は余向き付け可能であり, 正則点集合上成り立つ式  $\alpha(H-1) = \beta K$  に現れる比  $[\alpha: \beta]$  は  $M^2$  上大域的に決まる.

*Proof.* 正則点  $p \in M^2$  をひとつ固定しておく.  $p$  の近傍  $U$  では,  $\alpha(H-1) = \beta K$  が成り立っているとする.  $f|_U$  の単位法ベクトル場は  $n^{(p)}$  であるとする. このとき,  $f|_U$  の平行曲面  $f_{U, \delta}$  に対しては

$$\alpha(H_\delta - 1) = \beta_\delta K_\delta, \quad \beta_\delta = \beta e^{2\delta} - \frac{\alpha(e^{2\delta} - 1)}{2}$$

が正則点集合  $U \cap R_{f_\delta}$  上成り立つことが知られている (cf. [K]). ここで,  $H_\delta, K_\delta$  はそれぞれ  $f_{U, \delta}$  の平均曲率, Gauss 曲率.

一方, 別の点  $q \in M^2$  を  $p$  の近くにとって,  $q$  の近傍  $U_q$  が  $U_q \cap U \neq \emptyset$  かつ  $f_{U_q, \delta_0}$  が HLW はめ込みであるようにしておく. このときの  $f_{U_q, \delta_0}$  の単位法ベクトル場を  $n^{(q)}$  と書く. すると,  $f_{U_q \cap U, \delta_0}$  は  $n^{(p)}$  に関しても  $n^{(q)}$  に関しても HLW はめ込みということになる. したがって, Lemma

3.2 の証明中の議論と同様の理由により,  $n^{(p)}$  と  $n^{(q)}$  は  $U_q \cap U$  上一致しなければならない.

この手順を次々に行っていくことにより族  $\{n^{(q)}; q \in M^2\}$  が得られ, これは大域的な単位法ベクトル場を定める. したがって,  $f$  は余向き付け可能である.  $\square$

**Remark 4.5.** 平坦波面については, 余向き付け不可能な例が知られている. (cf. [KRUY])

## 5 表現公式

この節では, BLW 波面, すなわち  $[\alpha : \beta] = [2 : 1]$  以外の HLW 波面を扱う.

**Theorem 5.1** ([GMM2], [K]).  $M^2$  を Riemann 面とする.  $M^2$  上の有理型関数  $G$  と, 定曲率  $\epsilon$  の共形的計量  $ds_\epsilon^2$  に対して, BLW 波面  $f: M'(\subset M^2) \rightarrow \mathbb{H}^3$  で,

$$(i) \alpha(H - 1) = \beta K, \text{ ここで } [\alpha : \beta] = [2\epsilon : (\epsilon - 1)]$$

(ii)  $G$  は双曲型 Gauss 写像

であるようなものが構成できる. 実際の手順は以下のとおりである:

まず,  $M^2$  の普遍被覆  $\tilde{M}^2$  をとる. 定曲率共形計量  $ds_\epsilon^2$  の存在より, 正則写像  $h: \tilde{M}^2 \rightarrow N(\epsilon)$  で

$$ds_\epsilon^2 = \frac{4|dh|^2}{(1 + \epsilon|h|^2)^2}$$

を満たすものが存在する. ここで,  $N(\epsilon)$  は,  $\epsilon$  の正, 0, 負に応じて  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  or  $\mathbb{C}$  or  $D(1/\sqrt{-\epsilon}) = \{|z| < 1/\sqrt{-\epsilon}\}$  である.

この  $h$  を用いて

$$\mathcal{G} = (-G_h)^{-3/2} \begin{bmatrix} -GG_h & GG_{hh}/2 - G_h^2 \\ -G_h & G_{hh}/2 \end{bmatrix} : \tilde{M}^2 \setminus \{\tilde{p}_i\} \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

と定める. ここで, 記号  $G_h, G_{hh}$  はそれぞれ  $dG/dh, d^2G/dh^2$  を意味し,  $\{\tilde{p}_i\} = \{\text{poles of } dh \text{ or } \{G; h\}dh\}$  である. ただし,  $\{G; h\}$  は  $h$  を変数と見て  $G$  を  $h$  で Schwarz 微分したものである. また,

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{1+\epsilon^2|h|^2}{1+\epsilon|h|^2} & -\epsilon\bar{h} \\ -\epsilon h & 1 + \epsilon|h|^2 \end{bmatrix}$$

と置いて  $f := GHG^*$  とする. すると,  $f$  は (普遍被覆ではなく)  $M' := M^2 \setminus \{p_i\}$  から  $\mathbb{H}^3 = PSL(2, \mathbb{C})/PSU(2)$  への写像を定めることとなる. ( $p_i$  は  $\tilde{p}_i \in \tilde{M}^2$  に対応する  $M^2$  の点である.) この  $f$  を  $(G, ds_\epsilon^2)$  に関連した BLW 写像と呼ぶことにする. このように構成された  $f$  は特異点を持つ可能性がある. 特異点をもたないためには,

$$\frac{(1 + \epsilon|h|^2)^2}{4} |\{G; h\}dh|^2 - \frac{(1 - \epsilon)^2|dh|^2}{(1 + \epsilon|h|^2)^2} \quad (\clubsuit)$$

が定値であることが必要十分で, この条件が満たされている場合, (もしくは定義域をそのような条件が満たされる範囲に制限すれば)  $f$  は BLW 曲面である.

ただし,  $(\clubsuit)$  が定値でなくとも,  $\frac{(1+\epsilon|h|^2)^2}{4} |\{G; h\}dh|^2, \frac{(1-\epsilon)^2|dh|^2}{(1+\epsilon|h|^2)^2}$  が同時に 0 となり得ないならば,  $f$  は波面である.

逆に, 任意の向き付け可能な BLW 波面はこのように表すことができる.

**Remark 5.2.** 後述する結果 (Theorem 7.1, Theorem 8.2) により, 実は Theorem 5.1 の最後の 1 文において「向き付け可能」の仮定は不要である.

## 6 特異点の型の判定

表現公式の応用として, BLW 波面のどこに特異点が現れるか, またその特異点の微分位相幾何学的形状は何かを判定する基準を与えることができる. 本節ではそれらを紹介する.

**Proposition 6.1** ([KU]).  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を BLW 波面とし, その表現公式のためのデータは  $(G, h)$  であるとする. このとき, 特異点集合  $S_f$  は

$$S_f = \{p \in M^2; (1 + \epsilon|h|^2)^2|\theta|^2 - (\epsilon - 1)^2 \frac{|dh|^2}{(1 + \epsilon|h|^2)^2} = 0\}$$

で与えられる. ここで  $\theta = -\frac{1}{2}\{G, h\}dh$  である.

**Proposition 6.2** ([KU]).  $f$  を Proposition 6.1 と同じものとする. このとき

1.  $f$  が CMC-1 波面ならば, 任意の特異点は孤立特異点である.
2.  $f$  が CMC-1 波面でないとすると, 特異点  $p \in M^2$  が非退化であるための必要十分条件は

$$4\epsilon h_z \bar{h} + (1 + \epsilon|h|^2)(\hat{\theta}_z/\hat{\theta} - h_{zz}/h_z) \neq 0 \text{ at } p, \text{ where } \theta = \hat{\theta}dz.$$

が成り立つことである.

**Remark 6.3.** 特異点  $p$  が非退化であることの意味は,  $p \in M^2$  の近傍  $U$  で, 特異点集合が  $U$  内の  $p$  を通る正則曲線となることである.

**Theorem 6.4** ([KU]).  $f$  を Proposition 6.1 と同じものとする. 非退化特異点  $p$  に対し,  $p$  における  $f$  の写像芽が

1. カスパ辺 (cuspidal edge) に局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\Delta(p) \neq 0$  が成り立つこと,
2. ツバメの尾 (swallowtail) に局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\Delta(p) = 0$  かつ  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Delta \circ \gamma \neq 0$ , が成り立つこと

である. ここで,  $\Delta := \text{Im} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \left\{ \frac{4\epsilon h_z \bar{h}}{1+\epsilon|h|^2} + \frac{\theta_z}{\theta} - \frac{h_{zz}}{h_z} \right\} \frac{1}{\sqrt{h_z \bar{\theta}}} \right]$  であり,  $\gamma$  は  $S_f$  の  $\gamma(0) = p$  なるパラメータ付けである.

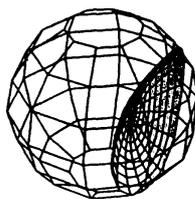
Proposition 6.1, Proposition 6.2, Theorem 6.4 は [KRSUY] にある結果の簡単な帰結として証明できる.

ひとつ例を紹介しよう:

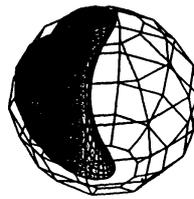
**Example 6.5.**  $G(z) = \exp(kz)$  ( $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ),  $h(z) = z$  on  $M = \{|z| < 1\}$ ,  $\epsilon = -1$  により決まる BLW 波面  $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$  に対して

$$\theta = \frac{k^2}{4} dz, \quad (1 - |h|^2)^2 |\theta|^2 = \frac{|k|^4}{16} (1 - |z|^2)^2 |dz|^2$$

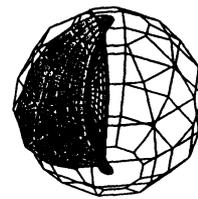
と計算される.



$$(G, h) = (\exp z, z)$$



$$(G, h) = (\exp 2\sqrt{2}z, z)$$



$$(G, h) = (\exp 4z, z)$$

図 5:

特異点集合  $S_f$  は

$$C: |z| = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}}{|k|}}$$

である。つまり、 $|k| < 2\sqrt{2}$  ならば特異点なし、 $|k| = 2\sqrt{2}$  ならば特異点は一点  $z = 0$  のみ、 $|k| > 2\sqrt{2}$  ならば円周のぶん現れる。

特異点がたくさんある場合、すなわち、 $|k| > 2\sqrt{2}$  の場合の考察を続ける。非退化性を測る関数  $4\epsilon h_z \bar{h} + (1 + \epsilon|h|^2)(\hat{\theta}_z/\hat{\theta} - h_{zz}/h_z)$  はこの場合  $-4\bar{z}$  と計算される。これは  $C$  上すべての点で零でない。更に、 $\Delta$  は実定数倍を除いて  $\text{Im}\bar{z}/(1 - |z|^2)$  と計算される。今、 $C$  は  $\gamma(t) = ce^{it}$  where  $c = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}}{|k|}}$  とパラメータ表示できるから、 $\Delta \circ \gamma(t) = -c \sin t / (1 - c^2)$ 。ゆえに、 $\Delta \circ \gamma(t) = 0 \iff t = 0, \pi$  であり、 $\{\Delta \circ \gamma(t)\}' = -c \cos t / (1 - c^2) \neq 0$  at  $t = 0, \pi$ 。以上より、 $C$  の形状は、 $C \setminus \{t = 0, \pi\}$  で cuspidal edge であり、 $t = 0, \pi$  で swallowtail であると結論される。

## 7 向き付け可能性

表現公式の応用として、もうひとつの双曲的 Gauss 写像  $G_*$  が

$$G_* = G - \frac{(G_h)^2(1 + \epsilon|h|^2)}{\epsilon \bar{h} G_h + (G_{hh}/2)(1 + \epsilon|h|^2)}.$$

であることが分かる。とくに  $G_*$  が正則写像であるための必要十分条件は、波面  $f$  が平坦なことである。

一方、平坦波面に対して、 $G, G_*$  の微分が同時に消えるような点はないことが分かっているので (cf. [KRUY] など) このことより、 $G, G_*$  が  $M^2$  に Riemann 面の構造を与える。したがってとくに次を得る。

**Theorem 7.1** ([KRUY]). 平坦波面  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  に対して、 $M^2$  は向き付け可能である。

補足：少々紛らわしいので補足説明を与えておく。元々、表現公式は向き付け可能な BLW 波面に対するものであったことに注意しておく。今、向き付け可能かどうかわからない平坦波面  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  があつたとする。このとき、 $f$  は局所的には表現公式で記述できる。例えば  $M^2$  の被覆  $\{U_\alpha\}$  の各  $U_\alpha$  で表現公式で記述されるところ。このとき、 $G$  か  $G_*$  の  $U_\alpha$  へ制限は Riemann 球への微分の消えない正則写像であるから、それらのうちの一方は  $U_\alpha$  の正則座標系を与えることとなる。したがって、これらを集めて  $M^2$  は Riemann 面となる。

その他の HLW 波面の向き付け可能性については次節で述べる。

## 8 Zig-zag 数

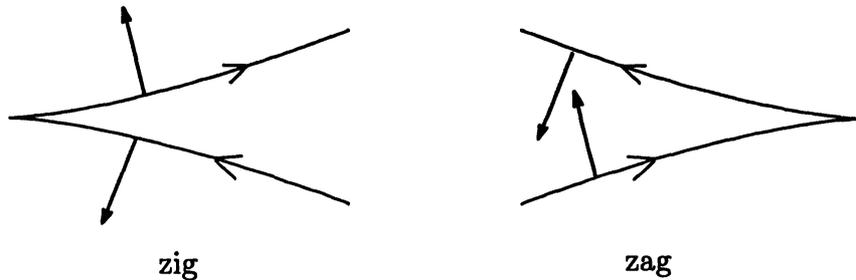
以下、手短かに zig-zag 数について説明する。詳細は [SUY] などを参照されたい。

$\sigma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を generic な front とする. (1次元多様体に対する front の定義は 2次元多様体に対する定義 (Definition 4.1) と同様.) ここで generic であるとは, 自己交差点は二重点に限りかつ特異点は (3/2) カスプに限ることを意味する.

接ベクトル  $\dot{\sigma}$  に対して常に左側にあるような単位法ベクトル場  $\nu$  が大域的にとれる.

一方, カスプ点の像を中心として十分小さな半径の円を描くと, その内部は front  $\sigma(S^1)$  で二分されるが, 面積の小さいほうをカスプの内部, 大きいほうをカスプの外部と呼ぶことにする.

$\sigma(S^1)$  上の動点がひとつのカスプを通過するとき, 単位法ベクトル場が外向きから外向きに移動するならば, そのカスプは zig と呼び, 内向きから内向きへ移動するとき zag と呼ぶこととする.

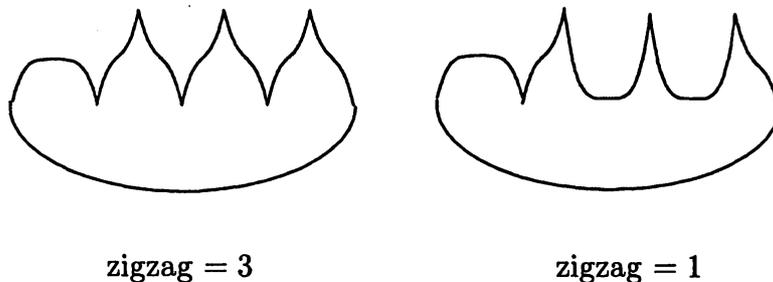


更に  $\sigma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が余向き付け可能であるとき, zig-zag 数と呼ばれるものが定義される. それは次のようなものである.

動点が  $\sigma(S^1)$  を一周するとき, カスプを通過するごとに zig か zag が現れるわけだが, zig = a, zag = b として, その通過ごとに a または b を横一列に並べ単語を作る. 更にこの単語を  $aa = 1, bb = 1$  なる規則で縮約する. すると, 出来上がるものは

$$(ab)^k \text{ または } (ba)^k$$

である. このときの整数  $k$  を front  $\sigma$  の zig-zag 数と呼ぶ.



**Fact** zig-zag 数はホモトピー不変量である. (詳しくは, front であることを保ったままの連続変形で不変.)

一方, 余向き付け可能な波面  $f: M^2 \rightarrow \bar{M}^3$  があつたときに, null loop と呼ばれる良い性質をもつた loop  $\sigma: S^1 \rightarrow M^2$  が定義できる. (大雑把に言えば, null loop  $\sigma$  は,  $f \circ \sigma$  が  $S_f$  と交わるのは横断的にカスプ辺と交わるような場合しか起こらないことを意味する.) null loop に対しては, generic planar front 同様 zig-zag 数が定義できる. 更に loop の進行方向を区別することにして, 符号付きの zig-zag 数が決められる. また, 各  $[\gamma] \in \pi_1(M^2)$  の代表元  $\gamma$  として, 向きづけられた null loop をとることができる.

以上のことから, 基本群  $\pi_1(M^2)$  の表現

$$\lambda_f: \pi_1(M^2) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を得ることができる. これを zig-zag 表現と呼ぶ.

**Theorem 8.1** ([KU]). BLW 波面 (ただし, 平坦の場合は余向き付け可能であることを仮定する) の zig-zag 表現は自明である.

Theorem 7.1, Theorem 8.1 の系として次の結果が得られる.

**Theorem 8.2** ([KU]). HLW 波面  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  が, ホロ平坦でないならば (すなわち, BLW ならば)  $M^2$  は向き付け可能である.

これらに関する証明は [KU] を参照していただきたい.

**Remark 8.3.** (i) 平坦な HLW 波面 (すなわち, 平坦波面) は向き付け可能だが, 余向き付け可能性についてはどちらの場合も存在する.

(ii) はめ込まれたホロ平坦曲面は向き付け可能であるが, ホロ平坦波面は向き付け可能かどうか (向き付け不可能なホロ平坦波面が存在するか) は分かっていない.

### Summary

HLW 波面  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  に対して, その向き付け可能性, 余向き付け可能性は次の通りである:

	orientability	co-orientability
flat	○	□
horo-flat	?	○
other	○	○

○ = must

□ = may or may not

? = 未解決

## 参考文献

- [Br] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, in *Théorie des variétés minimales et applications*, Astérisque, **154–155** (1988), 321–347.
- [C] B. Y. Chen, *Minimal surfaces with constant Gauss curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972) 504–508.
- [GMM1] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Math. Ann., **316** (2000), 419–435.
- [GMM2] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A Plateau problem at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc., **356** (2004), no. 9, 3405–3428.
- [IST] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space*, preprint.
- [K] M. Kokubu, *Surfaces and fronts with harmonic-mean curvature one in hyperbolic three-space*, Tokyo J. Math., **32** (2009), 177–200
- [KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005) 303–351.
- [KRUY] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007) 265–299.
- [KU] M. Kokubu and M. Umehara, *Orientability of linear Weingarten surfaces, spacelike CMC-1 surfaces and maximal surfaces*, preprint, arXiv:0907.2284v1.
- [KUY] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., **216** (2004), no.1, 149–175.
- [SUY] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009) 491–529.
- [UY] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no.3, 611–638.