数理解析研究所講究録
第1707巻 2010年 153-155

$\mathbb{C}^m$ の複素部分多様体における テイラー展開と超越性

近畿大学・理工学部　　泉　脩藏

$X \subset \mathbb{C}^m$ を複素部分多様体とする。我々は X の内在的な幾何ではなく，$\mathbb{C}^m$ への埋めこみの性質を問題とする。

我々の問題の第一歩は，代数的超曲面の場合に，Bos-Calvi [1] によって開始された。多項式の X への制限を X 上の多項式函数と呼ぶ。多項式函数の定義に用いた多項式の最小次数を多項式函数の次数と定義する。彼らは，補間理論の de Boor-Rond [3], [4] の方法を用いて，X の一点 $\boldsymbol{a}$ において d 次多項式函数がなす空間 $P_d(X)$ の双対として，高階接空間 $D^{\varphi}_{X,\boldsymbol{a},d}$ を導入した。これはその点における d 次ジェットの空間の双対と言ってもよい。X のパラメトリゼイション (局所座標の逆) に用いる変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ の双対変数の多項式の環 $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$ の部分集合として定義される。我々はこれを双対 d 次の **Bos-Calvi(高階) 接空間**と呼ぶ。函数には「それを総シンボルとする微分を行い，その点における値をとる」こととして作用する。一般に双対 d 次の Bos-Calvi 接空間の元であっても，それを表す多項式の次数は d を超えることがある。Bos-Calvi は，$\boldsymbol{a} \in X$ において，正則函数芽 $f \in \mathcal{O}_{X,\boldsymbol{a}}$ に d 次多項式函数 $T^{\varphi}_{\boldsymbol{a},d}f$ を対応させるという意味でテイラー展開を拡張した。この展開は，$D^{\varphi}_{X,\boldsymbol{a},d}$ のすべての元に対して f と同じ値をとるように定義されている。ここで

$$\varphi : \mathcal{O}^m_{\boldsymbol{a}} \longrightarrow \mathcal{O}^n_{\boldsymbol{b}}$$

は X のパラメトリゼイション (局所座標の逆) による引き戻しである。写像

$$T^{\varphi}_{\boldsymbol{a},d} : \mathcal{O}_{X,\boldsymbol{a}} \longrightarrow P_d(X), \quad f \longmapsto T^{\varphi}_{\boldsymbol{a},d}f$$

をテイラー射影子ということにする。$P_d(X)$ は，X の任意の点の解析的局所環 $\mathcal{O}_{X,\boldsymbol{a}}$ の部分環と見なすことができる。するとこのテイラー射影子は，ベクトル空間としての $P_d(X)$ へのリトラクトとなっている。

一般にテイラー射影子はパラメトリゼイション φ に依存している。しかし Bos-Calvi [2] は，代数的超曲面では，しばしばテイラー射影子はパラメトリゼイションに依存しないとことを発見した。そのような良い点を彼らは d 次テイラー点と名付けた。彼らの第一の主要定理は次のように述べられる。

定理 A [Bos-Calvi [2] Theorem 3.2, 3.4] 平面代数曲線 X の場合，$\boldsymbol{a} \in X$ は，$P_d(X)$ が自然に $\mathcal{O}_{X,\boldsymbol{a}}$ の剰余環としての構造を持つとき，またそのときに限ってテイラー的となる。

この場合，$P_d(X)$ は有限次元ベクトル空間の環であるから，0 次元局所環，すなわち Artin 環となる。剰余環云々のところは，彼らは「高階接空間 $D^{\varphi}_{X,\boldsymbol{a},d} \subset \mathbb{C}[\tau]$ に現れる冪に隙間がない」こととして表している。第二主要定理は次のものである。

定理 B [Bos-Calvi [2] Theorem 4.5] X を平面代数曲線とする。すると任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して，有限個を除いて X の点はテイラー点である。

我々の目標は，この二つの定理を任意のアファイン空間$\mathbb{C}^m$に埋め込まれた複素多様体Xへの拡張と，その埋め込みの各点における超越性への応用である。定理Aの拡張は次のように述べられる。

定理 I $\mathbb{C}^m$の開集合の部分複素多様体Xの点$\boldsymbol{a}$に対して，次の条件は同値である。

(1) $\boldsymbol{a}$はd次テイラー点である。

(2) $P_d(X)$は自然に$\mathcal{O}_{X,\boldsymbol{a}}$の剰余環としての構造を持つ。(したがってArtin環となる。)

定理Bの拡張は次のように述べられるが，研究会後に証明に誤りを発見した。したがってこの部分については，お詫びとともに,「予想」と修正いたします。

予想 II $\mathbb{C}^m$の開集合の部分複素多様体Xの点$\boldsymbol{a}$に対して，d次テイラー点でない点は，Xの疎な解析的部分集合に含まれる。したがってBaireの意味での第一類集合を除くXの点は，すべての$d\in\mathbb{N}$に対して，d次テイラー点となる。

さてここで述べたBos–Calviの高階接空間はテイラー点の判定以外にも応用を持っている。BosとCalvi[1]は，量$\max\{\deg p : p\in D^{\varphi}_{X,\boldsymbol{a},d}\}$に注意を払っている。これは$X_{\boldsymbol{a}}$におけるアファイン座標函数$x_1,\ldots,x_m$の多項式の，パラメーターへの引き戻しの零評価を与えている。つまり$x_1,\ldots,x_m$のd次の多項式の引き戻しは，0でないとすると，どれぐらい高位の零点をとるかという評価である。これは，かつて著者が与えた超越性指数α([6]，[7])を通して，$X_{\boldsymbol{a}}$の超越性に結びついている。

定理 III $\mathbb{C}^m$の開集合の部分複素多様体Xにおいて，すべての$d\in\mathbb{N}$に対してd次テイラー点となる点の超越性指数は，

$$\alpha(X_{\boldsymbol{a}})\le m+\dim\overline{X}\le m+n$$

の評価を持つ。つまりあまり超越性はあまり高くない。ここで$\overline{X}$はXを含む最小の代数的集合を表す。

Gabrielov–Khovanskii [5]は，KhovanskiiとTougeronによって導入されたネーター的カテゴリーにおいて，完全交差解析集合に対する重複度を評価する定理を証明した。これを適用して得られる不等式

$$\alpha(X_{\boldsymbol{a}})\le 2(m+n)$$

(cf. [9])と比べると次のようになる。

- Gabrielov–Khovanskii [5]から導かれる不等式のメリット:
  (ネーター的複素多様体であれば)すべての点で成立する。

- 定理IIIのメリット:
  一般の複素多様体(のジェネリックな点だけ)で成立。
  評価がシャープである。

いずれにせよ，全く違う方法によりながら似た評価が得られたことから，逆に両方の方法

がほぼ妥当であったと言えるであろう。

予想IIでテイラー点に除外があることを述べているが，Bos–Calviの挙げる簡単な例[2], Example 4.2によって，これが避けられないことであることがわかる。我々はさらに，$\alpha=\infty$となるもっとも超越性の高い点の存在[6]をも知っている。

以上の結果は，実の部分C^ω多様体に対しても成立する。また定理I，定理IIIは解析的局所環についてについて述べているとも考えられるが，これを形式的局所環，すなわち形式的べき級数の剰余環に対する定理に書き直すことも，自然であり可能である。

May 31, 2010

References

[1] L. Bos, J.-P. Calvi: Multipoint Taylor interpolation, Calcolo **45**, 35-51 (2008)

[2] L. Bos, J.-P. Calvi: Taylorian points of an algebraic curve and bivariate Hermitian interpolation. Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa Cl. Sci. (5), **XII**, 545-577 (2008)

[3] C. de Boor, A. Ron: On multivariate polynomial interpolation, Constructive Approximation **6**, 287-302 (1990)

[4] C. de Boor, A. Ron: The least solution for polynomial interpolation problem, Math. Z. **210**, 347-378 (1992)

[5] M. Gabrielov, A. Khovanskii: Multiplicity of a Noetherian intersection, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 186 (1998)

[6] S. Izumi: A criterion for algebraicity of analytic set germs. Proc. Japan Acad. **68** Ser.A 307-309 (1992)

[7] S. Izumi: Transcendence measures for subsets of local algebras, in: Real analytic and algebraic singularities (ed. T. Fukuda et al.) Pitman Res. Notes Math. 381, Longman, Edinburgh Gate 189-206 (1998)

[8] S. Izumi: Introduction to algebraic theory of multivariate interpolation: in Real and complex singularities (Proceedings of Australian-Japanese Workshop), 85-108 (2007)

[9] S. Izumi: Local zero estimate, in: Several topics in singularity theory, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku 1328, 159–164 (2003)