数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 212-216

A certain estimate appearing in the Atkinson-type formula for cusp L-functions

名古屋大学・多元数理科学研究科 青木 光博 (AOKI Mitsuhiro)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

筆者は保型形式に属する保型 L 関数の挙動に興味があり研究している。今回、最も基本的な設定で保型 L 関数の評価について計算結果を得たのでそれを報告する。

1 設定

k は偶なる正の整数とし $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (フルモジュラー)、$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}|\operatorname{Im}(z)>0\}$ を複素上半平面とする。この時、

$$f(z)=\frac{1}{(cz+d)^k}f(\gamma z),\qquad \gamma=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma,\ z\in\mathbb{H}$$

をみたし、無限遠点で零点を持つ関数 $f(z)$ を重さ k、群 Γ に属するカスプ形式という。また $f(z)$ はヘッケ作用素の同時固有関数とする。次にカスプ形式 $f(z)$ の無限遠点でのフーリエ展開を用いて次の保型 L 関数を定義する:

$$L(s;f)=L(s):=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s},\quad \operatorname{Re}(s)>\frac{k}{2}+1. \tag{1.1}$$

さてこの L 関数は次の性質を持つことが知られている ([5] など) 。(i) 全 $\mathbb{C}$ 平面に解析接続を持ち整関数となること、(ii)2 次のオイラー積を持つこと、(iii) ヘッケの関数等式:即ち $\Lambda(s):=(2\pi)^{2s-k}\Gamma(k-s)/\Gamma(s)$ に対して、

$$L(s;f)=(-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda(s)L(k-s;f) \tag{1.2}$$

をもつこと、である。またその係数評価に関してはいわゆる Ramanujan-Petersson 予想 $a(n)\ll n^{(k-1)/2+\epsilon}$ が成立する。

この L 関数と関数 $\Lambda(s)$ を用いて $t\in\mathbb{R}$ に対し次の関数を定義する:

$$Z(t):=i^{\frac{k}{2}}\Lambda\left(\frac{k}{2}+it\right)^{-\frac{1}{2}}L\left(\frac{k}{2}+it\right).$$

このように定義すると $Z(t)$ は複素共役で不変であることから実関数であり、リーマンゼータ関数に対するハーディー関数の類似となる。実際、今回はフルモジュラー群に属するカスプ形式に対して L 関数を考えて

いるので、いわゆる nebencharacter が自明な (1.2) なる関数等式を持ち、これを用いて、

$$Z(t)=\begin{cases}\{\pm1\}_t\left|L\left(\frac{k}{2}+it\right)\right| & L\left(\frac{k}{2}+it\right)\neq 0 \text{ のとき}\\ 0 & L\left(\frac{k}{2}+it\right)=0 \text{ のとき}\end{cases} \tag{1.3}$$

($\{\pm1\}_t$ は各 t に対して $Z(t)$ が連続となるように定まる) であることがわかる。

つまり今回の設定においては、関数 $Z(t)$ を調べることで保型 L 関数の関数等式の中心線上での挙動が調べられる。

2 $Z(t)$ の一乗平均値

さて、$Z(t)$ に対して Jutila は 1998 年の論文で次のような公式を発表した。これはリーマンゼータ関数に対するいわゆる「アトキンソン公式」の保型 L 関数バージョンであり、ここでは保型 L 関数に対する「アトキンソン型公式」(Atkinson-type formula) と呼ぶ。(以降では簡単のため $L(s)$ の定義式 (1.1) において $\tilde{a}(n) := a(n)n^{-(k-1)/2}$ とおき、関数等式の中心線が $\mathrm{Re}(s)=1/2$ となるよう"正規化"したとして考える。)

定理 1 (Jutila,1998).

$$\int_0^T Z(t)\,dt = E_L(T) := \Sigma_1(T)+\Sigma_2(T)+O(\log^2 T)$$

ただし $N \asymp T, N' = N'(T,N) \asymp T$ に対し、

$$\Sigma_1(T) = 2^{-1/2}\sum_{n\le N}(-1)^n\tilde{a}(n)n^{-1/2}\left(\frac{T}{2\pi n}+\frac{1}{4}\right)^{-1/4}\left(\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2T}}\right)\right)^{-1} \times \sin\left(2T\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2T}}\right)+\sqrt{2\pi nT+\pi^2n^2}+\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.1}$$

$$\Sigma_2(T) = -2\sum_{n\le N'}\tilde{a}(n)n^{-1/2}\left(\log\left(\frac{T}{2\pi n}\right)\right)^{-1}\sin\left(T\log\left(\frac{T}{2\pi n}\right)-T-\frac{\pi}{4}\right). \tag{2.2}$$

リーマンゼータ関数の場合（アトキンソン公式）は主要項として $T\log(T/2\pi)-(2\gamma-1)T$（ただし $\gamma=0.577\cdots$ はオイラー定数）が現れるのに対し、今回の保型 L 関数の場合には主要項が現れない（すなわち 0 である)、という点が大きく異なる。しかし誤差項を書き下した式については、(2.1) と式 (2.2) のすべての $\tilde{a}(n)$ を約数関数 $d(n)$ に書き換えることでリーマンゼータ関数の場合と一致することを注意しておく。

3 計算結果

筆者は前節の定理 1 を用いて以下の計算結果を得た。

結果 1 (A).

$$\int_0^T E_L(t)^2\,dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}(n)^2n^{-\frac{3}{2}}\right)T^{\frac{3}{2}}+O\left(T^{\frac{5}{4}+\epsilon}\right)$$

この計算結果は Heath-Brown の論文 [2] を追うことで得られる。

さて、この結果から $E_L(T)$ はだいたい $T^{1/4}$ のオーダーを持つことが予想される。ここで得た結果は以下のものである。

結果 2 (A).

$$E_L(T) = \Omega(T^{\frac{1}{4}})$$

特に、任意の十分大きい T に対してある正の定数 c と c' と少なくとも 2 つの点 $t_1, t_2 \in [T, T + c'\sqrt{T}]$ が存在して、

$$E_L(t_1) \geq ct_1^{\frac{1}{4}}, \quad E_L(t_2) \leq -ct_2^{\frac{1}{4}}$$

となる。

この証明は以下の補題を証明することから得られる。先ず $f(t) \ll t^{1/4}$ となる任意の関数 $f(t)$ を取り、簡単のために $E^*(t) := (2t)^{-\frac{1}{2}}\{E_L(2\pi t^2) + f(2\pi t^2)\}$ とする。次に $\tau \in \{-1, 1\}$ と定数 α に対して $|u| \leq 1$ において定義されるテスト関数 $K_\tau(u)$ を

$$K_\tau(u) = (1 - |u|)(1 + \tau \sin(4\pi\alpha u))$$

で定義する。

補題 1. 十分大きな実数 $t \in \mathbb{R}$ をとると、

$$\int_{-1}^{1} E^*(t + \alpha u)K_\tau(u)\,du = \frac{\tau}{2}\sin\left(4\pi t - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(t^{-\frac{1}{2}} \sup_{|u|\leq 1}|f(2\pi(t + \alpha u)^2)| + \alpha^{-2} + \alpha t^{-\frac{1}{4}}\right) \tag{3.1}$$

実際、十分大きい t に対しては式 (3.1) の誤差項は主要項より小さくなり、その符号変化は τ の符号に依存する。しかし τ の符号にかかわらず $K_\tau(u) \geq 0$ であるから結果を得る。なおこの方法は Heath-Brown and Tsang [3] の方法のアナロジーである。

また、以上の結果 2 と二節における Jutila の定理 1 の後の注意よりフルモジュラー群のカスプ形式に付随する保型 L 関数の中心線上の零点の個数 $N_0(T) := \#\{\rho = k/2 + it \mid 0 \leq t \leq T, L(\rho; f) = 0\}$ を数えることができる。実際、ある定数 T_0 に対し $T \geq T_0$ において $N_0(T) \gg T^{1/2}$ となるが、これはもちろん Hafner[1] による $N_0(T) \gg T \log T$ に比べても、相当弱いものである。

以上の結果の計算の概要は以下に述べるが、これらの結果やより詳細な計算は他のものと合わせ執筆中の論文により公表する予定であることを書き添えておく。

4 計算の概要

■結果 2 の計算の概略 前節の説明により補題 1 を示せば良い。t が大きい時、$E^*(t)$ は次のように書き直すことが出来る：

$$E^*(t) = E_A(t) + E_B(t) + (2t)^{-\frac{1}{2}}f(2\pi t^2) + O(t^{-\frac{1}{2}}\log^2 t).$$

ここで、

$$E_A(t) = \sum_{n \le t^2} (-1)^n \tilde{a}(n) n^{-\frac{3}{4}} e_A(t,n) \cos(f_A(t,n))$$

$$E_B(t) = -(2t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \le \eta t^2} \tilde{a}(n) n^{-\frac{1}{2}} \left(\log \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \cos(g_B(t,n))$$

かつ

$$\eta = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 0.38\ldots$$

$$e_A(t,n) = \left(1 + \frac{n}{4t^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{2t}{\sqrt{n}} \sinh^{-1} \frac{\sqrt{n}}{2t} \right)^{-1} = 1 + O(nt^{-2})$$

$$f_A(t,n) = 2\pi\sqrt{n}t \left(\frac{2t}{\sqrt{n}} \sinh^{-1} \frac{\sqrt{n}}{2t} + \left(1 + \frac{n}{4t^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$g_B(t,n) = 4\pi t^2 \log\left(\frac{t}{\sqrt{ne}} \right) + \frac{\pi}{4}$$

である。

まず定義の代入などの簡単な計算で、

$$\int_{-1}^{1} E^\star(t+\alpha u) K_\tau(u)\, du = I_A + I_B + O(t^{-\frac{1}{2}} \sup |f(2\pi(t+\alpha u)^2)| + t^{-\frac{1}{2}} \log^2 t)$$

(ただし $j = A, B$ に対して $I_j := \int_{-1}^{1} E_j(t+\alpha u) K_\tau(u)\, du$) となることがわかる。

さて積分 I_j たちを評価しなければならないが、I_B の評価は I_A の評価と同様にできるので、ここでは I_A の場合だけを考えたいと思う。最初に行うべきことは積分変数 u を減らすことである。

$$I_A = \int_{-1}^{1} E_A(t+\alpha u) K_\tau(u)\, du$$

ただし

$$E_A(t+\alpha u) = \sum_{n \le (t+\alpha u)^2} (-1)^n \tilde{a}(n) n^{-\frac{3}{4}} e_A(t+\alpha u, n) \cos(f_A(t+\alpha u, n))$$

について、まず $u=0$ の近くで $e_A(t+\alpha u, n)$ を Taylor 展開して一次近似することで関数 $e_A(t+\alpha u)$ から u を減らす。この作業で発生する誤差は αt^{-1} である。次に和の幅を $(t+\alpha u)^2$ から t^2 に減らす。この作業で前述の評価 $\tilde{a}(n) \ll n^\epsilon$ を用いれば、誤差は $\alpha t^{-1/2+\epsilon}$ となる。以上により積分記号は右へとずれて、

$$I_A = \sum_{n \le t^2} (-1)^n \tilde{a}(n) n^{-\frac{3}{4}} e_A(t,n)\ J_A + O(\alpha t^{-\frac{1}{2}+\epsilon})$$

ただし

$$J_A = \int_{-1}^{1} \cos(f_A(t+\alpha u, n)) K_\tau(u)\, du$$

となる。それでは次に J_A の積分評価を行う。簡単のため $f_A(t+\alpha u, n) =: \psi(u)$ とおいて部分積分すると、

$$J_A = \frac{\sin(\psi(u))}{\psi'(u)} K_\tau(u) \Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \sin(\psi(u)) \left\{ \frac{K_\tau'(u)}{\psi'(u)} - \frac{K_\tau(u)\psi''(u)}{(\psi'(u))^2} \right\} du$$

となるが、初項は $K_\tau(u)$ の定義から 0 である。第二項は直接計算から

$$\psi'(u) \gg \alpha n^{\frac{1}{2}} \quad \text{および} \quad \psi''(u) \ll \alpha^2 n^{\frac{3}{2}} t^{-3}$$

が分かるので、まず $t^{3/2} < n \leq t^2$ においては

$$J_A \ll n^{-\frac{1}{2}}$$

となる。一方、$1 \leq n \leq t^{3/2}$ においては $u = 0$ の周りで $f_A(t + \alpha u)$ を Taylor 展開することで、

$$J_A = \int_{-1}^{1} \cos\left(f_A(t,n) + f'(t,n)\alpha u\right) K_\tau(u)\, du + O(\alpha^2 n^{\frac{3}{2}} t^{-3}).$$

となるが、最後に初等的計算を繰り返すことにより、

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(f_A(t,n) + f_A'(t,n)\alpha u\right) K_\tau\, du = \begin{cases} -\frac{\tau}{2}\sin\left(f_A(t,1)\right) + O(\alpha^{-2} + \alpha^2 t^{-4}) & n = 1 \text{ のとき} \\ O(\alpha^{-2} n^{-1}) & \text{それ以外} \end{cases}$$

がわかる。この $n = 1$ の場合が主要項である。

I_B については同様の計算を繰り返すことにより、$I_B \ll \alpha t^{-1/2+\epsilon}$ が得られる。

以上より補題 1 が得られ、結果 2 を得ることが出来る。

参考文献

[1] J. L. Hafner, "Zeros on the critical line for Dirichlet series attached to certain cusp forms", *Math. Ann.*, **264**, (1983), 21-37

[2] D. R. Heath-Brown, "The mean value theorem for the Riemann-zeta function", *J. Number Theory*, **25**, (1978), 164-177

[3] D. R. Heath-Brown and K. Tsang, "Sign changes of $E(T)$, $\Delta(x)$, and$P(x)$", *J. Number Theory*, **49**, (1994), 73-83

[4] M. Jutila, Atkinson's formula revisited, in *"Voronoï's Impact on Modern Science, Book 1"*, P. Engel and H. Syta (eds.), National Academy of Sciences of Ukraine, Inst. Math., Kyiv (1998), pp.137-154

[5] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer, (1989)