

数学者からみた「算数教育」について

岡山大学 大学院教育学研究科 平井 安久 (Yasuhisa HIRAI)
Graduate School of Education, Okayama University

岡山大学 大学院教育学研究科 曾布川 拓也 (Takuya SOBUKAWA)
Graduate School of Education, Okayama University

1 はじめに

小学校教員の養成に関わっている大学数学教員にとって最も大きな問題の 1 つは

「こんな難しい数学を勉強しても意味がない」 「算数の教え方だけを知りたい」

という学生たちの見方であろう。筆者たちの勤務する学部においては、小学校教員を目指すコースでも「ピーク制」の名の下、1 年次から数学教育講座に多くの学生が配属され、またそれを選択する入学時には意外に人気が高い。しかしながらその学生たちは、必修科目である「微積分」「線形代数」の講義である程度きっちりした形式の議論に触れると途端に拒絶反応を起こす。そこで「数学嫌い」となってしまう者も多い。このことは、学校現場に出るとさらに顕著である。各都道府県ごと、学校種ごとに教育研究会が組織されており、それらには教科ごとの分科会もある。中学校や高等学校では教科がはっきりしているため各教員は自分の担当する教科の分科会に所属するが、所属部会を自由に選ぶことが出来る小学校教育研究会においては、どこでも算数部会の参加・登録人数が減少しているという話を聞く。理科とともに教科指導で苦勞するはずの算数科の指導について教師自身が研究しようとしなないという状況があるとすれば、それは大きな問題である。

2009 年 11 月の本年度第 2 回研究会において我々は、教科専門科目の内容が算数教育に対してどのような意味を持つかについて考えるとき、数学の議論の中でとどまってしまうのではなく、実際に教えられている算数科の内容および教育方法について直接当たってみることも必要であるという見解に達した。それは我々数学者たちの考えている世界と、小学校教師の考えとの間に隔たりはあるのか、どのような乖離が起きているのかなどを知らない限り、我々がどのような提案を行っても教育現場とはすれ違ってしまふからである。そしてその作業を始めようとするとき、もちろん数学者として独自の視点で算数科の教科書を読んでみることにその第一であるが、同時に小学校教員がどのような目で算数科の教材をとらえているかについても検討した方が良いのではないかと思う。

本稿では算数科の指導において最も難しいとされる、小数・分数の乗法・除法の指導法の研究、特に数直線を用いた指導法との関連について検討し、その中で数学者の考える算数教育と現場の感覚の違いが起きる理由について考える。

2 小学校における小数・分数の乗除の指導法について

小数や分数のかけ算・割り算の指導では、問題文→式→答え という流れでの説明（いわゆる問題解決型の説明）が普通である。一般に、

- 問題文から式までの間の活動を「立式」活動

- 式から答えまでの間の活動を「計算」活動

とよぶ。ここで、「立式」の説明の仕方には大別すると次の2通りがある。

(ア) 「単位あたり」の考え方に基づく指導法

(イ) 「割合の見方」に基づく指導法

の2通りである。それぞれの方法は明確な特徴があり、数直線（または線分図）の用法にも明らかに連動してくるので、長所や短所を含めて指導法を議論することが重要である。ただし、学校現場では数直線の使用をおっくうがる傾向もあり、さらに上記の(ア)(イ)の違いを大して気にしていないような指導場面も見られるのが現状である。

本章ではこの2通りの方法についてそれぞれ検討し、これらと数直線の用法の関連を述べる。また立式を経由せずに答えを出すような考え方についても言及する。

2.1 「単位あたり」の考え方に基づく指導法

学校現場で使用されているいわゆる「検定教科書」はこちらの方式を採用している。ただし、教科書会社によって温度差が感じられるのも事実である。

2.1.1 「単位あたり」の考え方での指導の流れ

小数の乗除と分数の乗除の指導の流れはそのスタンスはまったく同じであると言えるので、それぞれの指導順に左右に対比させて概略をかくと表1,2のようになる（啓林館の教科書 [2] の場合）。

5年生 小数×整数, 小数÷整数, 小数×小数, 小数÷小数の内容的特徴	6年生 分数×整数, 分数÷整数, 分数×分数, 分数÷分数の内容的特徴
<p>【小数×整数】 文章題：「1本0.2リットル入りの紙パック4本分は何リットルになるのかな。」 立式の根拠：整数のかけ算 『1本2リットル入りのペットボトル4本分は何リットルになるのかな。』 式：0.2×4 計算の根拠：0.1の何個分 答え：0.8</p>	<p>【分数×整数】 文章題：「1まい$\frac{3}{5}m^2$の板を4まいならべると、何m^2になるのかな。」 立式の根拠：整数のかけ算 『1まい$2m^2$の板を4まいならべると、何m^2になるのかな。』 式：$\frac{3}{5} \times 4$ 計算の根拠：「面積図」 答え：$\frac{12}{5}$</p>
<p>【小数÷整数】 文章題：「0.6リットルのジュースを3人で同じように分けます。1人分は何リットルになりますか。」 立式の根拠：整数のわり算（等分除） 式：$0.6 \div 3$ 計算の根拠：0.1の何個分 答え：0.2</p>	<p>【分数÷整数】 文章題：「花だんにある植物の名ふだをつくらうと思います。$\frac{4}{5}m^2$の板を同じ面積になるように3まいに切ります。1まいの名ふだは何m^2になりますか。」 立式の根拠：整数のわり算式：$\frac{4}{5} \div 3$ 計算の根拠：「面積図」 答え：$\frac{4}{15}$</p>

表1: 5年生の小数のかけ算とわり算, 6年生の分数のかけ算とわり算の内容的特徴 (1)

5年生 小数×整数, 小数÷整数, 小数×小数, 小数÷小数の内容的特徴	6年生 分数×整数, 分数÷整数, 分数×分数, 分数÷分数の内容的特徴
<p>【小数×小数】</p> <p>文章題：「1 m 80 円のリボンを買います。2 m 買ったときの代金は何円になるのかな。」</p> <p>立式の根拠：整数のかけ算 式：80×2</p> <p>ことばの式※： 「1 m のねだん」×「長さ」＝「代金」</p> <p>文章題：「1 m 80 円のリボンを買います。2.3 m 買ったときの代金は何円になるのかな。」</p> <p>立式の根拠：ことばの式※ 式：80×2.3</p> <p>計算の根拠：「0.3 m の代金は 3 m の代金の 10 分の 1」という発想。 答え：184</p>	<p>【分数×分数】</p> <p>文章題：「1 dl で $\frac{4}{5}m^2$ ぬれるペンキがあります。3 dl のペンキでは何 m^2 ぬれるかな。」</p> <p>立式の根拠：分数×整数 式：$\frac{4}{5} \times 3$</p> <p>ことばの式※：「1 dl でぬれる面積」×「ペンキの量」＝「ぬれる面積」</p> <p>文章題：「1 dl で $\frac{4}{5}m^2$ ぬれるペンキがあります。$\frac{1}{3}$ dl のペンキでは何 m^2 ぬれるかな。」</p> <p>立式の根拠：ことばの式※ 式：$\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$</p> <p>計算の根拠：は「面積図」 答え：$\frac{4}{15}m^2$</p>
<p>【小数÷小数】</p> <p>文章題：「2 m のひものねだんは 96 円です。1 m の値段は何円ですか。」</p> <p>立式の根拠は整数のわり算</p> <p>式：$96 \div 2$</p> <p>ことばの式※：「代金」÷「長さ」＝「1 m のねだん」</p> <p>文章題：「2.4 m で 96 円のひも 1 m のねだんを求める式をかきましょう。」</p> <p>立式の根拠：ことばの式※ 式：$96 \div 2.4$</p> <p>計算の根拠：「2.4 m の代金は 2.4 m の代金の 10 倍」という発想。</p> <p>答え：$96 \div 2.4 = (96 \times 10) \div (2.4 \times 10)$</p>	<p>【分数÷分数】</p> <p>文章題：「$\frac{7}{8}m^2$ のかべを 2 dl でぬれるペンキがあります。1 dl では何 m^2 ぬれますか。」</p> <p>立式の根拠：分数×整数 式：$\frac{7}{8} \div 2$</p> <p>ことばの式※：「ぬれる面積」÷「ペンキの量」＝「1 dl でぬれる面積」</p> <p>文章題：「$\frac{3}{5}m^2$ のかべを $\frac{1}{3}$ dl でぬれるペンキがあります。1 dl では何 m^2 ぬれますか。」</p> <p>立式の根拠：ことばの式※ 式：$\frac{3}{5} \div \frac{1}{3}$</p> <p>計算の根拠：「面積図」または「式変形」</p> <p>答え：$\frac{9}{5}m^2$</p>

表 2: 5年生の小数のかけ算とわり算, 6年生の分数のかけ算とわり算の内容的特徴 (2)

2.1.2 「単位あたり」の考え方に基づく指導法の特徴

小数の乗除の指導の流れと分数の乗除の指導の流れはたいへん類似している。以下、5年の小数と6年の分数の単元について共通な点をあげると、

- 単元が前半と後半の2つに分かれている。小数の場合は、前半の単元では×整数, ÷整数を扱い、後半の単元では×小数, ÷小数を扱う。これは分数の場合でも同じ。
- 前半の単元では、①立式の説明と②計算の説明に分かれているが、立式は既習内容から容易に導かれるので、立式の根拠と計算方法の根拠の違いが目立たない。
- 後半の単元でも、①立式の説明と②計算の説明に分かれているが、立式には「ことばの式」を準備する必要がある。このため、立式の根拠と計算方法の根拠の違いが目立つ。
- ※後半の単元での「ことばの式」の使い方には少々トリックがあることに注意。
- 式表現に意味を持たせるには文章題が必要である。

- 指導場面では ①立式理由と ②計算方法の両者に気遣いが必要。

さらに重要なのは、前半の単元での文章題と後半の単元での文章題では、場面に違いがあることである。以下のように、「単位」の付き方が違う。

前半の単元【分数×整数】

文章題：「1まい $\frac{3}{5}m^2$ の板を4まいならべると、何 m^2 になるのかな。」

$$\text{式：} \frac{3}{5}m^2 \times 4 = \frac{12}{5}m^2$$

後半の単元【分数×分数】

文章題：「1dl で $\frac{4}{5}m^2$ ぬれるペンキがあります。 $\frac{1}{3}dl$ のペンキでは何 m^2 ぬれるかな。」

式：単位の付き方は、 $\frac{4}{5}m^2 \times \frac{1}{3}dl = \frac{4}{15}m^2$ であることに注意。（ことばの式にあてはめた結果）

2.1.3 教科書会社による説明の違い

教科書会社（計6社）による共通点や違いについては、

- 5年生で、小数×整数、小数÷整数、小数×小数、小数÷小数 の順に扱うこと。
- 6年生で、分数×整数、分数÷整数、分数×分数、分数÷分数 の順に扱うこと。

については各社とも違いは見られないので、以下、「分数×分数」の小単元に限って、「数直線」の扱われ方等を含めて各社のやり方を比較してみたい。「分数×分数」の小単元ではおおざっぱに言うと、

- 立式の根拠は「ことばの式」による。
- 計算方法の根拠は「面積図」による。

という点が共通している。ただし、その他の説明手段については、数直線を含めていろいろなパターンが見られる。表3は、各社の違いをキーワード的に表したものであるが、問題文の状況説明の場面、立式説明の場面、計算説明の場面に分けて見ると、各社の違いが見えてくる。

	問題文 状況説明	問題文→式 立式	式→答え 計算
啓林館	図的な表現なし	ことばの式	面積図
東京書籍	対応数直線*	ことばの式	面積図 式変形
学校図書	面積図	ことばの式	対応数直線(上下÷3×2) 面積図 式変形
教育出版	対応数直線*	ことばの式	対応数直線(上下÷3) 面積図
大日本	メッシュ状の絵	対応数直線 *	対応数直線(上下÷3) 面積図
日本文教	対応数直線*	ことばの式 対応数直線 *	式変形 面積図 式変形

表3: 6年生の分数×分数の説明の小単元での各社の違い

対応数直線は3つの場面のいずれにも見られるが、用法は同じではなく、

- 問題文の状況説明の場面での「対応数直線(*印)」にはいわゆる「見方」の説明はない。
- 立式説明の場面での「対応数直線(*印)」にも「見方」の説明はない。
- 計算説明の場面での「対応数直線」には矢印で「見方」が記入されている。

ことに着目すべきである。例えば教育出版では次のようになっている。

問題文：1dlで $\frac{4}{5}m^2$ のかべをぬれるペンキがあります。このペンキ $\frac{1}{3}dl$ では、何 m^2 のかべをぬれるでしょうか。

この問題に対して問題場面の状況説明および計算説明には次のような対応数直線が用いられる。

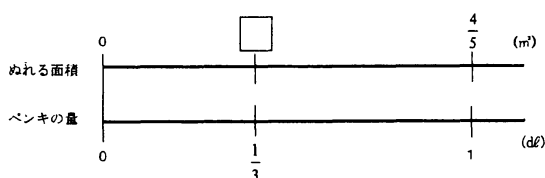


図 1: 問題場面の状況説明

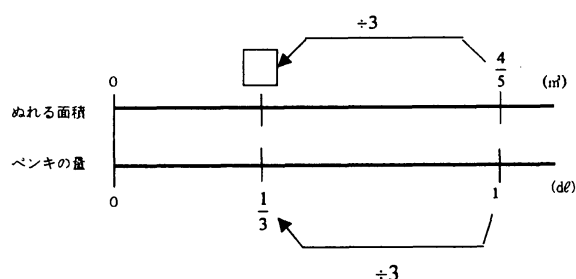


図 2: 計算方法の説明

「ペンキの量を $\frac{1}{3}$ 倍すると1dlが $\frac{1}{3}dl$ になるので、ぬれる面積 $\frac{4}{5}m^2$ を $\frac{1}{3}$ 倍すると答えが求まる。」というスタイルの立式説明が出てこない点に注意すべきである。さらにこの点は次に述べる「割合の見方」方式での数直線の用法との違いでもある。

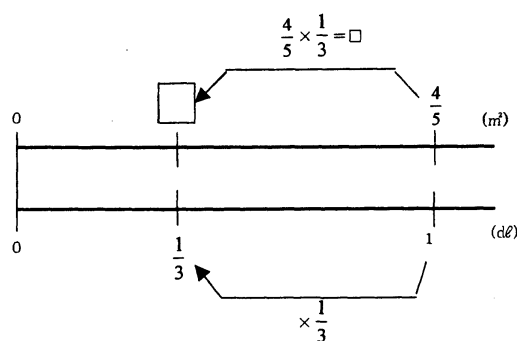
2.2 「割合の見方」に基づく指導法

「割合の見方」に基づく指導法は上記6社のような文科省関連の算数教科書には見られないが、最近刊行された「生かす算数」(杉山吉茂氏のグループ, [1])のような提案型教科書に見られる。

「割合の見方」に基づく指導法で具体的には、以下のような流れになる(教育出版と同じ問題文を用いたと仮定した場合の話である)：

問題文：1dlで $\frac{4}{5}m^2$ のかべをぬれるペンキがあります。このペンキ $\frac{1}{3}dl$ では、何 m^2 のかべをぬれるでしょうか。

立式の根拠は、「ペンキの量が $\frac{1}{3}$ 倍になるとぬれる面積も $\frac{1}{3}$ 倍になる(はずだ)」という見方であり、



式： $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$ が得られ，計算方法の説明は，かけ算のきまりを使って，

$$\begin{array}{c} \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \square \\ \times 3 \quad \left(\quad \right) \quad \div 3 \\ \frac{4}{5} \times 1 = \frac{4}{5} \end{array}$$

として求める． 答え： $\frac{4}{15}m^2$

提案型教科書「生かす算数」を見る限り，計算方法は6社の検定教科書と同様に様々な種類の計算方法を扱っている．ただし基本は式変形的方式であり，“場面から答えを直接求めるスタイルのもの” (§2.4 参照) は使用されていない．なお，式の単位の付き方は， $\frac{4}{5}m^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}m^2$ であることに注意しておく．

さらに，文章題の数値が少し変わった場合の両方法の違いを考える．問題文：「 $2dl$ で $\frac{4}{5}m^2$ ぬれるペンキがあります． $\frac{1}{3}dl$ のペンキでは何 m^2 ぬれるかな．」

・「割合の見方」に基づく指導法では，

立式の根拠は，「ペンキの量が $\frac{1}{6}$ 倍になるとぬれる面積も $\frac{1}{6}$ 倍になる（はずだ）．」

$$\text{式：} \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} \quad \text{答え：} \frac{2}{15}m^2$$

ここでの単位の付き方は， $\frac{4}{5}m^2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{15}m^2$ であることに注意しておく．

・「単位あたり」の考え方に基づく指導法では，

式： $1dl$ でぬれる面積は， $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}$ ． $\frac{1}{3}dl$ のペンキでは， $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ だから，答え： $\frac{2}{15}m^2$

この手の問題は，計算が2回必要となるので，現行の教科書内では通常は扱われないことになる．

	問題文 状況説明	問題文→式 立式	式→答え 計算
生かす算数		対応数直線	式変形ほか

表 4: 「生かす算数」5年生での分数×分数の説明

2.3 乗除の指導における数直線の用法について

「単位量あたりの大きさ」式と「割合の見方」方式での数直線の用法の違いについては、明らかに外見上の違いがある。「1dlで $\frac{4}{5}m^2$ のかべをぬれるペンキがあります。このペンキ $\frac{1}{3}dl$ では、何 m^2 のかべをぬれるでしょうか。」という上記と同じ問題を「単位あたり」方式と「割合の見方」方式でそれぞれ立式の説明をした場合、用いる数直線自体は最初は両者同じであるが、その使い方や書き加える内容は異なってくる。

前者では、

- ① 1あたりの量(単位量)を考える、
- ② 単位量を基準として比較量に視点を移す、
- ③ 単位量と比較量を結びつけることで求める量□を考える、

という流れになる(図3左)。

これに対して後者では、

- ① 既知の同種の2量から基準量と比較量の間係をつかむ、
- ② 一方が未知の2量へ視点を移す、
- ③ ①の関係(今回の場合は $\times\frac{1}{3}$)を使い求める量□を考える、

という流れになる(図3右)。

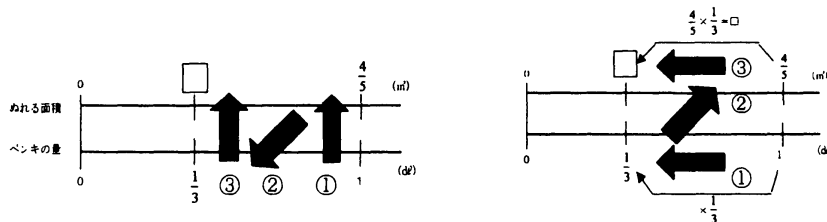


図3: 「単位あたり」方式(左)と「割合の見方」方式(右)

「単位あたり」方式と「割合の見方」方式での数直線の使われ方の違いは以下のようなになる。

	「単位あたり」方式	「割合の見方」方式
問題文の状況説明の場面では	対応数直線は必ずしも必要ではない。もし使用する際は、図1のような表現になる。	対応数直線は必ずしも必要ではない。もし使用する際は、図3左のような見方になる。
立式説明の場面では	対応数直線は必ずしも必要ではない。もし使用する際は、図2のような見方になる。	対応数直線は必須である。図3右のような見方になる。
計算説明の場面では	対応数直線は必ずしも必要ではない。もし使用する際は、図2のような見方になる。立式説明の方法とは別話である。	

表5: 数直線の使われ方の違い

2.4 問題文から直接に答えを出している(と見ることもできる) 場合

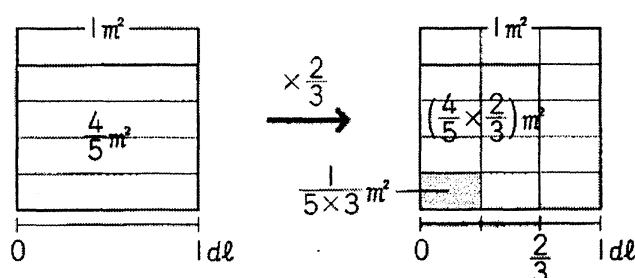
以下のような説明は、普通は式から答えを求める計算説明として用いられるが、立式内容がそれ以後に直接影響しないと見ることも可能である。

例1. ([2]) 問題文 $1dl$ で $\frac{4}{5}m^2$ ぬれるペンキがあります。 $\frac{2}{3}dl$ のペンキでは何 m^2 ぬれますか。

立式：既習事項より $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

計算説明：単位分数を使って考える。 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ は $\frac{1}{5 \times 3}$ が (4×2) 個分だから、 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$

面積図を用いて説明すると次のようになる。



教科書での記述はここまでである。最後の「面積図」は、 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ の計算方法を説明したものであるという扱いをされている。しかし、この面積図はあくまで問題場面から直接に答えを求めたものであって、立式の段階で $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ と考えようが $\frac{4}{5} \div \frac{3}{2}$ と考えようが、その後の面積図での切断の様子には影響しない。つまり、「面積図で全体を3つに縦割りして、そのうち2つ分を選び、高さ $\frac{4}{5}$ の長方形に対応する部分を考える」という手順は、 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ という式の計算方法を説明しているのではなく、「 $1dl$ で何 m^2 ぬれる～」という問題場面の答えの出し方のみを説明しているとも解釈できる。

例2. [学校図書] 問題文 $\frac{2}{5}m^2$ のへいをぬるのに、青いペンキを $\frac{3}{4}dl$ 使います。このペンキは、 $1dl$ 当たり何 m^2 ぬれるでしょうか。

立式： $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$

計算説明：まず $\frac{1}{4}dl$ でぬれる面積を求めてからそれを4倍する。

教科書での記述はここまでである。立式の段階で $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ と考えようが $\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$ と考えようが、その後の対応数直線での作業には影響しない。上段・下段ともに「3で割って4をかける」ことで答えが得られるからである。「 $\frac{3}{4}$ で割る」という認識がなくても正答が得られる可能性がある。つまり、 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ という式の計算方法を説明しているのではなく、「 $\frac{2}{5}m^2$ のへいをぬるのに～」という問題場面の答えの出し方のみを説明しているとも解釈できる。

例1, 例2ともに,

問題文 → 式 → 答え

という流れではなく, 実際には,

問題文 --- → 答え

という流れになっていると考えられる。「生かす算数」での計算説明の場面では, 意外にも上述の例1や例2のような計算説明が見られない点も“重要な”特徴であると言えよう。

3 「算数教育の研究」の論点

前章で見た指導法の研究は, 小学校の教育現場においては一般的な方向であり, 内容的にも良く検討されたものである。しかし数学の研究者にとっては奇異なものに見えるかもしれない。研究会で指摘されたものも含めていくつか挙げてみると

- 「ことばの式」なんていうのは当たり前のことであって, 意味がない。
- 図3のような言い方をするとかえって難しくなってしまう。こんな簡単なことなのになぜわざわざごちゃごちゃ言うのか。
- 問題文→式→答え という順に話が進んでいるのに, 「式を飛ばして答えを出している」などという考察を加えるのは無駄である (§2.4)
- そもそも「1dl で $\frac{4}{5}m^2$ ぬれるペンキ」などという表現は「算数用」の特別なものである。「100cc で $0.8m^2$ ぬれるペンキ」の方がまだ日常的である。

といった具合である。そして「算数教育の研究は意味のないことをごちゃごちゃやっているだけだ」という批判も良く聞く。

そこで我々数学者が忘れてしまいがちな要素について喚起したい。それは「教える相手が発達段階の中途にある子ども」ということである。そこで最も気をつけなくてはいけないのは「わかる」という言葉の意味である。およそ中学校以上の数学では演繹によって説明された事柄は「わかったとされる」のだが, 小学校段階ではそうではない。ここでは「わかる」とは直観的に(または直感的に)「わかる」ことなのである。

演繹で説明することは簡単であり, その結果「わかった」状態になるのなら, 教えることは容易である。しかし子どもたちが「直観的・直感的にわかったという状態」に持って行くことはなかなか難しい。なぜなら, わかった・わからないの基準は子どもたちの心の中にあるからである。ソクラテスの言を借りなくても, 外部からの働きかけにより子どもたちの心の中に「わかった」と思える状況を作ることは, 本来は出来ないのかもしれない。

数学の研究においても「証明はわかる(表面上わかる)のだが, その意味がわからない」という状況は多々起きる。この「意味がわからない」状況下では新しい研究成果を得ることはほとんど不可能である。また演繹として追うことが出来たとしても, 遡ればその源には公理があり, 公理そのものは感覚として認める以外に理解の方法はないのである。

数学者にとってのこの常識を子どもたちの状況と少し強引に対比させてみよう。

数学者	子どもたち
公理を認める	状況の直感的な把握 実体験との関連づけ
演繹の形式的な理解	公式の暗記
計算の技能	計算の技能
演繹の本質的な理解 (言葉などで)説明できる	直観的・直感的に「わかる」 「腑に落ちる」 図や式がかける

子どもたちに算数・数学の内容・技能を教え込むこと(これは往々にして公式の暗記という事態に陥りやすい)も必要ではあるが、同時に「わかる」「理解する」とはどういうことなのかを体験させ、さらに演繹だけでなく、帰納や類推などの考えも含めた「論理的な考え方」というものを身につけさせることも算数・数学教育の大切な役目である。

これを伝えることが算数・数学教育の大きな目的である。発達心理学的な立場に拘泥して数学の本質を忘れてしまうようでは問題外だが、常にその見方もどこかにおきながら考えていく必要がある。

参考文献

- [1] 「生かす算数・数学シリーズ」編集委員会(代表 杉山吉茂), 生かす算数小学5年, 日本教材文化研究財団・東京書籍株式会社(2007).
- [2] 清水静海・船越俊介ほか, わくわく算数6下, 新興出版啓林館(2004).
- [3] 清水静海ほか, 乗法・除法の意味(演算決定)の指導のあり方についての今後の研究に向けての提言, 日本数学教育学会誌, **87(10)**(2005), 12-31.
- [4] 中村享史, 小数の乗法の割合による意味づけ, 日本数学教育学会誌 **78(10)**(1996), 7-13.