

# 左線形かつ $K$ -開発閉包な項書換えシステム の合流性に関する考察\*

島根大学 総合理工学部 岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)

Faculty of Science and Engineering, Shimane University

Matsue, Shimane, Japan, 690-8504

e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

## 1 はじめに

項書換えシステム (TRS) は等式による柔軟な計算と効率的な推論を与えることができる [14]. TRS は関数・論理型プログラミング言語の計算モデルや定理自動証明, 記号処理, 代数的仕様記述, 検証等に広く応用されている. TRS の合流性は与えられた項の最も単純な形 (正規形) が一意であることを保証する. しかしながら, 合流性は一般に決定不能であることが知られており, 合流性を示すために多くの十分条件が与えられている.

Rosen は左線形かつ重なりがない TRS は合流性を持つことを示した [13]. Huet は左線形かつ並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [5]. Toyama は並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [15]. Oostrom は Huet と Toyama の結果を, 開発閉包の概念を導入し, 高階項書換えシステム (HRS) へ拡張した [8], すなわち, 左線形かつ開発閉包な HRS は合流性を持つことを示した. Oyamaguchi らは上側並行閉包の概念を与え, 左線形かつ上側並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [11]. Gramlich は並行危険対の概念を与え, 左線形かつ並行危険対条件を満たす TRS は合流性を持つことを示した [3]. Okui は同時危険対の概念を与え, 左線形かつ強閉包な TRS は合流性を持つことを示した [7]. Oyamaguchi らは Toyama の結果を一般化した  $K$ -閉包の概念を導入し, 左線形かつ  $K$ -閉包な TRS は合流性を持つことを示した [12]. 最近, 新しい合流条件に関する研究や合流性自動証明システムの設計に関する研究が多く行われている [1, 2, 4, 9, 10, 17].

本稿では Oyamaguchi ら [12] と同様の手法により, 開発閉包を一般化した  $K$ -開発閉包の条件を与える. 次に, 左線形かつ  $K$ -開発閉包な TRS は合流性を持つことを示し, 本結果の有用性を示すために例を与える. さらに, Oostrom[10] と Aoto ら [1] の研究を本研究で与える例に適用した結果について述べる.

---

\*This paper is revised version of IEICE Transactions on Information and Systems, J90-D, 10, pp.2932-2935, 2007, (in Japanese) [6].

## 2 準備

本節では、本稿で使用する定義と概念を述べる。定義と概念は文献 [12], [14] を参照して頂きたい。

記号  $\epsilon$  は空列を表し,  $\emptyset$  は空集合を表す.  $V$  は変数の集合,  $F$  は関数記号の集合とする.  $T$  は  $V$  と  $F$  から生成される項の集合とする. 項  $M$  に対して,  $P(M)$  は  $M$  の出現の集合を表す.  $P_F(M)$  は項  $M$  における関数記号の出現の集合を表し,  $M/u$  は出現  $u$  の  $M$  の部分項を表し,  $M[u \leftarrow N]$  は部分項  $M/u$  を項  $N$  により置き換えることにより得られる項を表す. 項  $M$  における任意の変数の出現が 1 より大きくないとき線形であるという. 書換え規則  $l \rightarrow r$  は項上の方向付けられた等式であり, 次の条件を満たす:  $l \notin V$  かつ  $V(r) \subseteq V(l)$ . 書換え規則  $l \rightarrow r$  に対して,  $l$  が線形であるとき, 左線形であるという. 項書換えシステム (TRS) は書換え規則の有限集合である. 任意の書換え規則が左線形であるとき, TRS  $R$  が左線形であるという. TRS  $R$  により, 項  $M$  が出現  $u$  において  $N$  に書換えられるとはある代入  $\sigma$  と書換え規則  $l \rightarrow r \in R$  が存在し,  $M = M[u \leftarrow \sigma(l)]$  かつ  $N = M[u \leftarrow \sigma(r)]$  を満たすときをいい,  $M \rightarrow_R N$  により表す.  $\rightarrow_R$  は  $\rightarrow_R$  の反射的閉包を表し,  $\rightarrow_R^*$  は  $\rightarrow_R$  の反射推移的閉包を表す. 文脈から明らかな場合は  $\rightarrow_R$  の添字  $R$  を省略し単に  $\rightarrow$  と書く. TRS  $R$  が合流性を持つとは,  $\leftarrow_R^* \cdot \rightarrow_R^* \subseteq \rightarrow_R^* \cdot \leftarrow_R^*$  が成り立つときをいう.

TRS  $R_1$  と  $R_2$  の書換え規則から得られる危険対の集合  $CP(R_1, R_2)$  を次のように定義する:  $CP(R_1, R_2) = \{ \langle \theta(l_1)[u \leftarrow \theta(r_2)], \theta(r_1) \rangle_u \mid l_1 \rightarrow r_1 \in R_1, l_2 \rightarrow r_2 \in R_2, u \in P_F(l_1), l_1 \rightarrow r_1 \neq l_2 \rightarrow r_2, \theta(l_1/u) = \theta(l_2) \}$ . ここで,  $V(l_1) \cap V(l_2) = \emptyset$  かつ  $\theta$  は  $l_1/u$  と  $l_2$  の最汎単一子である.  $CP(R)$  は  $CP(R, R)$  で定義される TRS  $R$  の危険対の集合である.  $CP(R) = \emptyset$  のとき, TRS  $R$  は重なりがないという. TRS  $R$  に対して, 同時書換え  $\rightarrow_R$  を次のように帰納的に定義する. 1.  $x$  を変数とする.  $x \rightarrow_R x$ . 2.  $f$  を項数  $n$  の関数記号とする.  $s_i \rightarrow_R t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ならば  $f(s_1, \dots, s_n) \rightarrow_R f(t_1, \dots, t_n)$ . 3.  $l \rightarrow r \in R$  とする.  $\sigma \rightarrow_R \tau$  を満たす代入  $\sigma, \tau$ , すなわち, 任意の変数  $x$  に対して  $\sigma(x) \rightarrow_R \tau(x)$  に対して  $\sigma(l) \rightarrow_R \tau(r)$ .

## 3 $K$ -開発閉包な左線形項書換えシステムの合流性

本節では  $K$ -開発閉包の定義を与える. 次に左線形かつ  $K$ -開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す.

$K$ -開発閉包は Oostrom による大方開発閉包 (almost development closed) ([8]) を一般化した条件であり,  $\emptyset$ -開発閉包 ( $K = \emptyset$ ) は大方開発閉包と一致する.

**定義 3.1** 次の条件を満たすとき, 左線形 TRS  $R$  は  $K$ -開発閉包 ( $K$ -development closed) であるという.

1.  $K \subseteq R$  かつ  $K$  は合流性を持つ.
2.  $\forall \langle P, Q \rangle_u \in CP(K, R - K)$  ( $u \neq \epsilon$ ) に対して,  $P \rightarrow_K Q$ .
3.  $\forall \langle P, Q \rangle_u \in CP(R - K, R)$  ( $u \neq \epsilon$ ) に対して,  $P \rightarrow_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* Q$ .

4.  $\forall \langle P, Q \rangle_\epsilon \in CP(K, R - K)$  に対して,  $P \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow_{R-K} Q$ .
5.  $\forall \langle P, Q \rangle_\epsilon \in CP(R - K, R - K)$  に対して,  $P \rightarrow_K^* \cdot \rightarrow_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_R Q$ .

**定理 3.2** 任意の左線形かつ  $K$ -開発閉包な TRS  $R$  は合流性を持つ.

**定理 3.3** TRS  $R$  が  $K$ -閉包ならば  $K$ -開発閉包である.

## 4 例と考察

本節では定理 3.2 の有用性を示すために例を与える. さらに, Oostrom による減少図式法 (decreasing diagram) ([10]) を適用する.

**例 4.1** 次の 3 つの左線形 TRS  $R_1, R_2, R_3$  を考える.  $R_1, R_2, R_3$  は文献 [7] で与えられている.

$$R_1 = \{f(g(g(x))) \rightarrow a, f(g(h(x))) \rightarrow b, \\ f(h(g(x))) \rightarrow b, f(h(h(x))) \rightarrow c, \\ g(x) \rightarrow h(x), a \rightarrow b, b \rightarrow c\}.$$

$$R_2 = \{a \rightarrow c, b \rightarrow c, f(a, b) \rightarrow d, f(x, c) \rightarrow f(c, c), \\ f(c, x) \rightarrow f(c, c), d \rightarrow f(a, c), d \rightarrow f(c, b)\}.$$

$$R_3 = \{f(x) \rightarrow x, f(x) \rightarrow f(f(x))\}.$$

また, Okui により次のような表が与えられている [7].

	$R_1$	$R_2$	$R_3$
Toyama-Gramlich [16], [3]	○	×	×
Oyamaguchi-Ohta [11]	×	○	×
Okui [7]	×	×	○

(○ ... 満たす, × ... 満たさない)

本稿では新たに次のような左線形 TRS  $R_4$  を与える.

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{l} g(x) \rightarrow x \\ f(f(x)) \rightarrow g(x) \\ f(x) \rightarrow f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

TRS  $R_4$  は従来までに提案されている合流条件 (Oostrom による減少図式法 ([10]) を除く) を満たさないのので TRS  $R_1, R_2, R_3, R_4$  に対して次のような表が得られる.

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
<i>Toyama-Gramlich</i>	○	×	×	×
<i>Oyamaguchi-Ohta [11]</i>	×	○	×	×
<i>Huet-Toyama-Oostrom [8], [9]</i>	×	×	○	×
<i>Okui</i>	×	×	○	×
<i>Oyamaguchi-Ohta [12]</i>	○	○	○	×
<i>Aoto et al [1]</i>	○	○	○	×
<i>Oostrom [10]</i>	○	?	○	○
<b>本研究</b>	○	○	○	○

(? ... 未確認)

$CP(R_4) = \{ \langle g(x), f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))) \rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))) \rangle_1, \langle f(g(x)), g(f(x)) \rangle_1 \}$  である.

1. TRS  $R_4$  の合流性を定理 3.2 を適用し示す.

$$K = \{ g(x) \rightarrow x \}$$

$$R_4 - K = \left\{ \begin{array}{l} f(f(x)) \rightarrow g(x) \\ f(x) \rightarrow f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

定義 3.1 のすべての条件を満たすから, 左線形 TRS  $R_4$  は  $K$ -開発閉包である. 定理 3.2 から, TRS  $R_4$  は合流性を持つ. したがって, 従来までの合流条件 (*Oostrom* による減少図式法 ([10]) を除く) が適用できない TRS  $R_4$  の合流性を本結果を用いて示すことができる. さらに, TRS  $R_1, R_2, R_3$  の全ての合流性を本結果を用いて示すことができる. 従来の合流条件 (*Oostrom*[10] による条件を除く) は TRS  $R_1, R_2, R_3, R_4$  の全てには適用できない. しかしながら, 本研究の合流条件は TRS  $R_1, R_2, R_3, R_4$  の全てに適用可能であり合流性を示すことができる.

2. TRS  $R_4$  の合流性を減少図式法 ([10]) を適用し示す.

次のように TRS  $R_4$  の書換え規則, それぞれに対して (1), (2), (3) をラベル付けする.

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{ll} g(x) \rightarrow x & (1) \\ f(f(x)) \rightarrow g(x) & (2) \\ f(x) \rightarrow f(f(f(x))) & (3) \end{array} \right\}$$

規則ラベル付けを書換え規則の適用によるすべての書換えに適用すると, 任意の  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  と重なりがない書換えに対して  $\leftarrow_i \rightarrow_j \subseteq \rightarrow \cdot \leftarrow =$  が成立する.

唯一の危険対はピーク  $f(f(f(f(x)))) \leftarrow_3 f(f(x)) \rightarrow_2 g(x)$  で生じる. 危険対  $\langle f(f(f(f(x)))) \rangle, g(x) \rangle$  は次の書換えにより収束する.  $f(f(f(f(x)))) \rightarrow_2 g(f(f(x))) \rightarrow_2 g(g(x)) \rightarrow_1 g(x)$ . 順序  $3 \succ 1, 2$  から書換えは減少する. したがって, 文献 [10] の結果から TRS  $R_4$  の合流性を示すことができる.

## 5 むすび

本稿では, Oyamaguchi らと同様の手法により, 開発閉包を一般化した  $K$ -開発閉包の条件を与えた. 次に, 左線形かつ  $K$ -開発閉包な項書換えシステムは合流性を持つことを示し, 本結果の有用性を示すために例を与えた. さらに, 本研究で与えた例の合流性が Oostrom の減少図式法を用いることでも証明できることを新たに確認した. 今後の課題は本結果と Aoto[2] により新たに提案された規則ラベル付けに基づく減少図式による合流性自動証明法を比較・検討し,  $K$ -開発閉包の条件を自動判定するシステムを設計することである.

## 謝辞

本研究の一部は科研費 21700017 の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] T. Aoto, J. Yoshida and Y. Toyama, “Proving confluence of term rewriting systems automatically,” Proc. on 20th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 5595, pp.93-102, 2009.
- [2] T. Aoto, “Automated confluence proofs by decreasing diagrams based on rule-labelling,” Proc. on 21st International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, 2010 (to appear).
- [3] B. Gramlich, “Confluence without termination via parallel critical pairs,” Proc. on 21st International Colloquium on Trees in Algebra and Programming, LNCS, 1059, pp.211–225, 1996.
- [4] B. Gramlich and S. Lucas, “Generalizing Newman’s Lemma for left-linear rewrite systems,” Proc. on 17th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 4098, pp. 66–80, 2006.
- [5] G. Huet, “Confluence reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems,” J. ACM, 27, 4, pp.797–821, 1980.
- [6] M. Iwami, “Confluence of left-linear and  $K$ -development closed term rewriting systems,” IEICE Transactions on Information and Systems, J90-D, 10, pp.2932–2935, 2007 (in Japanese).
- [7] S. Okui, “Simultaneous critical pairs and Church-Rosser property,” Proc. on 9th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 1379, pp.2-16, 1998.
- [8] V. van Oostrom, “Development closed critical pairs,” Proc. 2nd International Workshop on Higher-Order Algebra, Logic and Term Rewriting, LNCS, 1024, pp.185-200, 1995.

- [9] V. van Oostrom, “Developing developments,” *Theoretical Computer Science*, 175, 1, pp.185–200, 1997.
- [10] V. van Oostrom, “Confluence by decreasing diagrams converted,” *Proc. on 19th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications*, LNCS, 5117, pp. 306-320, 2008.
- [11] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, “A new parallel closed condition for Church-Rosser of left-linear term rewriting systems,” *Proc. on 8th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications*, LNCS, 1232, pp.187–201, 1997.
- [12] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, “On the Church-Rosser property of left-linear term rewriting systems,” *IEICE Transactions of Information and Systems*, E86-D, 1, pp.131–135, 2003.
- [13] B. K. Rosen, “Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems,” *J. ACM*, 20, 1, pp.160–187, 1973.
- [14] Terese, “Term rewriting systems,” Cambridge University Press, 2003.
- [15] Y. Toyama, “On commutativity of term rewriting systems,” *IEICE Transactions of Information and Systems*, J66-D, 12, pp.1370–1375, 1983 (in Japanese).
- [16] Y. Toyama, “On the Church-Rosser property of term rewriting systems,” *Technical Report*, 17672, NTT ECL, 1981 (in Japanese).
- [17] J. Yoshida, T. Aoto and Y. Toyama, “Automating confluence check of term rewriting systems,” *Computer Software*, 26, 2, pp.76–92, 2009 (in Japanese).