

交通流の時間遅れモデルについて

東京大学大学院数理科学研究科 金井 政宏 (Masahiro KANAI)

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo

1 はじめに

交通流とは目的を持ったモノの流れを総称する用語で、車や人の交通に限らず生体内で物質輸送を担う微小な分子モーターからネットワーク上のパケットのような無形のものまでと極めて幅広い。そして、これら『モノ』の『目的』には単に方向だけではなく移動時間や輸送効率などの最適化、さらには衝突の回避まで含まれる。このように伝統的な物理の世界観を超えた、すなわちニュートンの運動法則から外れた行動をする粒子を『自己駆動粒子』と称し、自己駆動粒子の多体系についての新たな法則を探求することが現代の交通流研究の主流となっている [1]。交通流研究は、現象の特徴を再現するモデルの開発と得られたモデルの解析によって再帰的に進められる。すなわち、モデルは観測データの再現性によりその妥当性が検証され、モデルの解析により渋滞発生メカニズムなどシステムの特徴が抽出される。そして、得られた知見から再びモデルの改良が行われる。特に車の渋滞現象に関しては大規模な実験が困難であるためにシミュレーションによる研究が主要な役割を果たす [2, 3, 4]。

しかし一方で、相互作用の非対称性のために保存則は見出されずエントロピーによる平衡統計力学の適用範囲外となる。このような状況では、厳密解がマクロな現象の解明のために非常に有効である。通常、厳密解は極めて特殊な状況でのみ実現されるものであって、ほとんど有効性を示さないが、交通流モデルにおいては、シミュレーションにより厳密解が系の定常状態を与えていると予想される。このため交通流モデルにおいては厳密解を得ることに大きな意義がある。

2 交通流モデルとソリトン方程式

まず、厳密解を持つ交通流モデルとそれに関連の深い可積分系の方程式について述べる。

2.1 Newell-Whitham モデル

時刻 t での、 n 番目の車の位置を $x_n(t)$ 、先行する車 ($n+1$ 番) との車間距離を $h_n(t)$ とする。そして、車間距離 h に対して最適な速度を返す函数 $V(h)$ (最適速度 (OV) 函数) を考えて、時間遅れ追従型モデル (delay Car-following model) を

$$\dot{x}_n(t + \tau) = V(h_n(t)), \quad h_n := x_{n+1} - x_n \quad (2.1)$$

により導入する。ここで特に

$$V(h) = V_0 [1 - \exp(-(\gamma/V_0)(h - L))] \quad (2.2)$$

と置いたものを *Newell-Whitham* (NW) モデルと呼ぶことにする。

2.1.1 $\tau = 0$ の場合 [5]

まず、 $\tau = 0$ の場合を考える。この場合は従属変数の変換により線形方程式に帰着される：

$$x_n(t) = nL - (V_0/\gamma) \log z_n(t) \quad (2.3)$$

と置くことにより (2.1) は

$$-(1/\gamma)\dot{z}_n = z_n - z_{n+1} \quad (2.4)$$

である。線形化された NW モデル (2.4) は基本解

$$z_n = a^n e^{-(1-a)\gamma t} \quad (2.5)$$

を持ち (a はパラメータ)、重ね合わせにより無数の解を構成出来る。特に2つの基本解の重ね合わせは (2.3) より衝撃波

$$\frac{\dot{x}_n}{V_0} = 1 - \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{b-a}{2}\gamma t - \frac{n}{2} \log \frac{b}{a}\right) \quad (2.6)$$

を与える。

2.1.2 $\tau \neq 0$ の場合 [6]

NW モデルを車間距離のみの形にすると

$$\dot{h}_n(t + \tau) = V(h_{n+1}(t)) - V(h_n(t)) \quad (2.7)$$

である。ここで、

$$s_n(t) = (\gamma/V_0)(h_n(t) - L) \quad (2.8)$$

と変数変換すると、

$$-(1/\gamma)\dot{s}_n(t + \tau) = e^{-s_{n+1}} - e^{-s_n} \quad (2.9)$$

となる。以降この式で NW モデルを考察する。

NW モデルについては、交通流と類似した系である格子系で、なおかつ可積分である *Kac-van Moerbeke* (KvM) 系 [7]

$$\dot{R}_j = e^{-R_{j-1}} - e^{-R_{j+1}} \quad (2.10)$$

と対比することにより厳密解を求めることが出来る。(2.9) と (2.10) はそれぞれ進行波

$$\begin{aligned} s(\phi) &= s_j(t), & \phi &= \gamma(t/\tau + 2n) \\ R(\Phi) &= R_j(t), & \Phi &= t + \beta j \quad (\beta = \gamma\tau) \end{aligned} \quad (2.11)$$

を仮定すればともに

$$\dot{s}(\phi) = e^{-s(\phi-\beta)} - e^{-s(\phi+\beta)} \quad (2.12)$$

という方程式に帰着される。(2.12) の解は、後述する戸田格子の楕円解から

$$e^{s(\phi)} = \frac{[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \beta \operatorname{sn}^2(\phi + \beta)][1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \beta \operatorname{sn}^2 \phi]}{2 \operatorname{sn} \beta \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta} \quad (2.13)$$

と得られる。ただし、各楕円関数の母数は k である。しかし、このように戸田格子の解から NW モデルの解を構成することは一般に容易でない。

2.2 戸田格子

ここで、戸田格子 [8] について簡単に触れる。戸田格子は非線形なバネによって繋がれた質点系であり、バネをポテンシャルの形で表すと

$$\phi(r) = (a/b)e^{-br} + ar \quad (ab > 0) \quad (2.14)$$

である。そして、質点 y_n の運動方程式は

$$\ddot{y}_n = a(e^{-br_{n-1}} - e^{-br_n}), \quad r_n = y_{n+1} - y_n \quad (2.15)$$

となる。以下では無次元化して、粒子間距離 r_n による表示

$$\ddot{r}_n = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}} \quad (2.16)$$

を用いる。

2.2.1 周期解

戸田は非線形格子で特解を持つものを構成するために楕円函数に着目した。そして、 sn^2 の公式

$$\text{sn}^2(u+v) - \text{sn}^2(u-v) = 2 \frac{d}{dv} \frac{\text{sn} u \text{cn} u \text{dn} u \text{sn}^2 v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v} \quad (2.17)$$

から

$$Z(u) = \int_0^u \text{dn}^2 u du - \frac{E}{K} u \quad (2.18)$$

(K, E は第1種および第2種の完全楕円積分) に対して

$$Z(u+v) + Z(u-v) - 2Z(u) = \frac{d}{du} \log \left(1 + \frac{dZ(u)/du}{1/\text{sn}^2 v - 1 + E/K} \right) \quad (2.19)$$

が成り立つことを見出し、さらに

$$\begin{aligned} u &= 2K(\nu \pm n/\lambda), \quad v = 2K/\lambda \\ e^{-br_n} &= 1 + \dot{s}_n/a, \quad s_n(t) = \frac{2K\nu}{b/m} Z(u) \end{aligned} \quad (2.20)$$

と置くことにより戸田格子 (2.16) を得た。ただし、 ν, λ はそれぞれ周期解の振動数と波長にあたるパラメータである。よって、戸田格子は必然的に

$$e^{-br_n} = 1 + \frac{(2K\nu)^2}{ab/m} (\text{dn}^2 u - E/K) \quad (2.21)$$

という楕円函数で表される周期解を持つ。

2.2.2 Kac-van Moerbeke 系

Kac-van Moerbeke 系 [7] は初め確率過程の研究の中で見出されたが、後に戸田格子の Bäcklund 変換を与えることが指摘された。Bäcklund 変換とは微分方程式の異なる解の間の変換、あるいはこれらを結びつける低次の微分方程式を指す。

戸田格子の場合、KvM 系 (2.10) の解に対して $w_j = R_j + R_{j+1}$ と置くと、

$$\ddot{w}_j = 2e^{-w_j} - e^{-w_{j-2}} - e^{-w_{j+2}} \quad (2.22)$$

を得る。よって、 $r_n = w_{2j}$, $r'_n = w_{2j+1}$ とすれば、 $\{r_n\}$, $\{r'_n\}$ はそれぞれ戸田格子の解となる。そして、 $r_n = y_{n+1} - y_n$, $r'_n = y'_{n+1} - y'_n$ とすれば

$$\begin{cases} \dot{y}_n = e^{-(y'_n - y_n)} + e^{-(y_n - y'_{n-1})} \\ \dot{y}'_n = e^{-(y'_n - y_n)} + e^{-(y_{n+1} - y'_n)} \end{cases} \quad (2.23)$$

を得る。(2.23) を戸田格子の Bäcklund 変換という。

以上の関係から、戸田格子の周期解 (2.21) から KvM 系の解を経て NW モデルの厳密解 (2.13) が得られる。

2.3 delay Optimal-Velocity model

時間遅れ追従型モデル (2.1) において

$$V(h) = \tanh(h - c) + \tanh c \quad (2.24)$$

($c > 0$ は定数) と置いたものを時間遅れ最適速度 (dOV) モデルと呼ぶことにする。dOV モデルの車間距離 h_n による表示

$$\dot{h}_n(t + \tau) = \tanh(h_{n+1} - c) - \tanh(h_n - c) \quad (2.25)$$

において、進行波を仮定して $G(\phi) = \tanh(h_n(t) - c)$, $\phi = t + 2n\tau$ とすれば、

$$G'(\phi) = (1 - G(\phi)^2)(G(\phi + \tau) - G(\phi - \tau)) \quad (2.26)$$

を得る。また、(2.10) において $F(\phi) = e^{-R_j(t)}$, $\phi = t + j\tau$ と置くことにより

$$F'(\phi) = F(\phi)(F(\phi + \tau) - F(\phi - \tau)) \quad (2.27)$$

を得る。これは Lotka-Volterra 方程式において進行波を仮定したものとなっている。そして、(2.27) と (2.26) の間には変数変換

$$F(\phi) = (1 + G(\phi))(1 - G(\phi - \tau)) \quad (2.28)$$

が存在する*¹。しかし、(2.28) を使って KvM 系の解から dOV モデルの解を構成するのはやはり容易ではない。

2.4 広田の方法による解法

ここで、広田の方法 [9] による dOV モデルの解法を示す [10]。まず、(2.26) において

$$G(\phi) = f(\phi)/g(\phi) \quad (2.29)$$

と置き、 $f^\pm = f(\phi \pm \tau)$ と書くことにすると、

$$\frac{f'g - fg'}{g^2 - f^2} = \frac{f^+g^- - f^-g^+}{g^+g^-} \quad (2.30)$$

となる。よって、分離パラメータを λ として双線形形式

$$\begin{cases} f'g - fg' = \lambda(f^+g^- - f^-g^+) \\ g^2 - f^2 = \lambda g^+g^- \end{cases} \quad (2.31)$$

を得る。双線形形式では特解の推定が著しく簡単になっている。例えば、ソリトン方程式の場合には双線形形式で

$$\begin{aligned} f_{1\text{-soliton}} &= 1 + A_1 e^{\xi_1} \\ f_{2\text{-soliton}} &= 1 + A_1 e^{\xi_1} + A_2 e^{\xi_2} + A_{12} e^{\xi_1 + \xi_2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.32)$$

などと置くことにより N -ソリトン解が求められる。

2.4.1 楕円解

第 1 の解 [11] は、(2.31) の第 2 式と ϑ 函数の加法公式

$$\begin{aligned} [\vartheta_0(0)]^2 \vartheta_0(u+v) \vartheta_0(u-v) \\ = [\vartheta_0(u) \vartheta_0(v)]^2 - [\vartheta_1(u) \vartheta_1(v)]^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

*¹ 変換 (2.28) は KdV 方程式と modified KdV 方程式の間の変数変換 (Miura 変換) と実質的に同一である。また、mKdV 方程式は KdV 方程式の Bäcklund 変換を与えている。

と見比べて

$$f = \vartheta_1(\tau)\vartheta_1(\phi), \quad g = \vartheta_0(\tau)\vartheta_0(\phi), \quad \lambda = [\vartheta_0(0)]^2 \quad (2.34)$$

と置くことにより (実は第1式も満たされるので)

$$G(\phi) = \frac{\vartheta_1(\tau)\vartheta_1(\phi)}{\vartheta_0(\tau)\vartheta_0(\phi)} = k \operatorname{sn}(2K\tau) \operatorname{sn}(2K\phi) \quad (2.35)$$

と得られる. ここで, $\sqrt{k} \operatorname{sn}(2Ku) = \vartheta_1(u)/\vartheta_0(u)$ を用いた.

2.4.2 衝撃波解

前節までは dOV モデルとして (2.26) を考えていたが, ここでは (2.25) に戻って, ソリトンの場合 (2.32) を参考に

$$\begin{aligned} \tanh(h_n - c) &= f/g, \\ f &= A_1 + A_2 e^{bt+an}, \quad g = B_1 + B_2 e^{bt+an} \end{aligned} \quad (2.36)$$

と置き, 得られた双線形形式から (2.36) の各定数を決定すると

$$f = 1 + e^{bt+an}, \quad g = \frac{1 - b - e^{-2b\tau}}{1 - e^{-2b\tau}} \left[1 + e^{b(t-\tau)+an} \right] \quad (2.37)$$

および分散関係式

$$e^{-a} = (b + 1 - e^{2b\tau}) / (b - 1 + e^{2b\tau}) \quad (2.38)$$

を得る. よって, a または b を自由パラメータとすることが出来る. 同様にして, NW モデルに対しても自由パラメータを含む解を構成出来る.

2.5 最適速度モデル

Newell-Whitham モデル (2.9) に戻って,

$$\dot{x}_n(t + \tau) \sim \dot{x}_n(t) + \ddot{x}_n(t)\tau + O(\tau^2) \quad (2.39)$$

と展開し, $\tau \sim 0$ として2次以上を切り捨てることによって OV model

$$\ddot{x}_n = a[V(h_n) - \dot{x}_n] \quad (a = 1/\tau) \quad (2.40)$$

を得る. これを最適速度モデル (Optimal Velocity Model) と呼ぶ [12]. ここで, 時刻 t での, n 番目の車の位置を $x_n(t)$, 先行する車 ($n+1$ 番) との車間距離を $h_n(t)$ としてい

る。また、 $V(h)$ は車間距離 h に対して最適な速度を返す函数（最適速度 (OV) 函数）であり、実測データに基づいて決められる。

最適速度モデルは、

$$\text{加速度} = \text{反応率} \times (\text{車間距離から決まる最適な速度} - \text{速度})$$

という形をしていて、反応率を性にとっていけば、

- (車間距離から決まる最適な速度 > 速度) ならば (加速度 > 0) すなわち加速
- (車間距離から決まる最適な速度 < 速度) ならば (加速度 < 0) すなわち減速

という（もっともらしい）状況をモデル化したものである。以下では、経済動学において最適速度モデルを適用したモデルを紹介する。特に、「車間距離」や「最適速度」にあたる経済の変数の取り方が肝要である。

3 最適景況指数モデル

最適速度モデルを提案した共著者の中の二人、坂東と中山は、谷口とともに最適景況指数モデル (Optimal Diffusion Index Model) を提案した [13]。ここでは、彼ら自身により改良されたモデルを紹介する [14]。

彼らは、国内総生産 (GDP) の変動から長期的な成長を除いた短期的な変動に着目した。すなわち、各年 i の国内総生産 $GDP(i)$ の年差分

$$\Delta G(i) = GDP(i) - GDP(i - 1) \quad (3.41)$$

を基本的な考察の対象とした。 $\Delta G(i)$ は “Business Cycle” と呼ばれる周期的な振動を示す。これに加え、動的に変化する量として景況指数 DI をとる。景況指数は、いわゆる『日銀短観』に発表される最も代表的な統計量で、景気の判断を「良い」「さほど良くない」「悪い」の3段階で尋ね、「良い」の回答比率から「悪い」の比率を差し引いたものである。すなわち、「良い」の回答数を Y 、「悪い」の回答数を N として、

$$DI = 100 \frac{Y - N}{Y + N} \quad (3.42)$$

により与えられる。各年 i における GDP と DI の関係を、

$$\begin{cases} DI(i+1) - DI(i) = a[ODI(\Delta G(i)) - DI(i)] \\ \Delta G(i+1) = 2bDI(i+1) + 2c \end{cases} \quad (3.43)$$

により定め、モデル化する。ただし、『最適景況指数関数』 ODI は実際のデータから

$$\begin{aligned} ODI(\Delta G(i)) &= A + B \tanh(C(\Delta G - D)) \\ (A = -5.00, \quad B = 55.3, \quad C = 6.28 \times 10^{-4}, \quad D = 880) \end{aligned} \quad (3.44)$$

とする。また、パラメータ b, c は

$$b = 23.6, \quad c = 969 \quad (3.45)$$

と得られる。この時点では a は不定のまま残る。

ここで、(3.43) から $DI(i)$ を消去することが出来て

$$\Delta G(i+1) + a\Delta G(i) + (a-1)\Delta G(i-1) = 2a[bODI(\Delta G(i)) + c] \quad (3.46)$$

となる。(3.47) の挙動は a の値によって異なり、

- $a < 2$: $\Delta G(i)$ は年の経過とともに一点に収束していく。
- $a = 2$: $\Delta G(i)$ は年の経過に対して周期的に振動する。
- $a > 2$: $\Delta G(i)$ は年の経過により無限大に発散する。

となることが簡単な解析により分かる。よって、 $a = 2$ と取るべきで、(3.47) は

$$\Delta G(i+1) - 2\Delta G(i) + \Delta G(i-1) = 4[bODI(\Delta G(i)) - \Delta G(i) + c] \quad (3.47)$$

と書き直せる。そして、左辺が 2 階差分の形であることから、年 i を連続的な量 t と見なし、連続極限を考えて

$$\frac{d^2 \Delta G(t)}{dt^2} = 4[bODI(\Delta G(t)) - \Delta G(t) + c] \quad (3.48)$$

を得る。これは最適速度モデルと同じ形の方程式であり

- 車間距離 \iff GDP の年変動
- 最適な速度 \iff 最適な景況指数

という対応関係がある。すなわち、最適景況指数モデルは、「交通流で車間距離が小さくなるとドライバーは速度を落とす」ことと、「GDP の年変動が小さくなると、経営者は景況指数を下げる回答をする」こととは同じメカニズムであると主張している。

4 まとめ

本研究では、時間遅れ追従型モデルの解法および厳密解についてまとめ、さらに、交通流の標準的なモデルである最適速度モデルを経済動学に応用した最適景況指数モデルを紹介した。このように、遠く離れた研究分野であっても、数理モデルを通して内在する機構の類似性などが見出されることは極めて興味深く、また相互に大きな刺激を与えるものであろう。特に、交通流に現れるモデルは既存の物理学のものと本質的に異なるものであり、生命活動など非物質的な運動の解析に大きく貢献するものと期待される。

参考文献

- [1] 西成活裕, 渋滞学, 新潮選書 (2006).
- [2] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider, *Phys. Rep.* **329**, 199 (2000).
- [3] D. Helbing, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 1067 (2001).
- [4] T. Nagatani, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 1331 (2002).
- [5] G. F. Newell, *Oper. Res.* **9** (1961) 209.
- [6] G. B. Whitham, *Proc. R. Soc. Lond.* **A428** (1990) 49.
- [7] M. Kac and P. van Moerbeke, *Adv. Math.* **16** (1975) 160.
- [8] 戸田盛和, 『非線形格子力学』, 岩波書店 (1978).
- [9] 広田良吾, 『ソリトンの数理』, 岩波書店 (1992).
- [10] Y. Tutiya and M. Kanai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 083002.
- [11] 長谷部勝也, 中山章宏, 杉山雄規, 『第11回交通流シンポジウム講演集』 (2005), 61, およびその参考文献
- [12] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *Phys. Rev.* **E51** (1995) 1035.
- [13] M. Taniguchi, M. Bando, and A. Nakayama¹, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2008) 124003.
- [14] M. Taniguchi, M. Bando, and A. Nakayama¹, *J. Phys. Soc. Jpn.* **77** (2008) 114001.