

調和写像と超剛性・固定点性質
SUPERRIGIDITY AND FIXED-POINT PROPERTY
VIA HARMONIC MAPS

名古屋大学・多元数理科学研究科 納谷 信 (SHIN NAYATANI)
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS,
NAGOYA UNIVERSITY

序

本稿では、離散群の超剛性や固定点性質とよばれる性質を、調和写像を用いて研究する手法について解説する。主題は、定義域が単体複体である場合 – 組合せ調和写像 – であるが、まず、その背景をなす連続の場合、とくにリーマン多様体の中の調和写像の場合を概観してから、離散の場合に進むことにする。

いずれの場合も、まず調和写像の存在を示し、次にそれが特殊な写像になることを示すのであるが、調和写像の存在については、連続の場合は存在定理がすでに確立しており (cf. [36, §2]), 離散の場合も考え方において新しい点はない (解析的にはむしろ容易である)。そこで、本稿では、離散の場合にまだ本質的な問題が残されている後者の問題、すなわち、調和写像が特殊な写像になることをどのようにして示すかという問題について詳しく述べることにする。そのようにするもう一つの理由として、離散の場合には、必ずしも調和写像の存在がアプリアリには保証されない状況で、直接「特殊な写像」が捉えられることがあるということを述べておく。

本稿の執筆において以下のことに留意した。まず、本稿は RIMS 研究集会での講演内容に加筆したものであるが、それを行うにあたっては、本稿のテーマにあまり親しみがない読者にも概要をつかんでもらうことを念頭におき、とくに読者の理解の助けとなることを期待して、具体例をいくつか丁寧に扱うことにした。次に、同じ主題について井関裕靖氏と筆者が [17, 36, 22] を執筆していることに鑑みて、これらの文献にすでに記述されている内容

については、なるべく重複して記述することは避けた。そのような内容のうち本稿と密接に関連するものについては、文中で言及するとともに文献中の該当箇所を明示するようにしたので、興味をもった読者は適宜参照していただきたい。とはいっても、理解に欠かせない事柄は重複を厭わずに記述してあるので、本稿の通読に支障はないはずである。

なお、補遺(第3節)において、単体複体およびCAT(0)空間に関する基本事項をまとめておいたので、参考にしていただきたい。

末筆になりましたが、今回のRIMS研究集会において基調講演をする機会を与えて下さり、講演内容について丁寧に相談にのって下さった研究代表者・入江博氏に心より感謝の意を表します。

1. 連続の場合

1.1. **超剛性とは?** そもそも「剛性」とは何だろうか? 離散群の研究においてこの言葉が意味するところの説明から始めることにする。

手始めに、閉曲面上の双曲計量(定ガウス曲率 -1 のリーマン計量)を考えよう。 M を種数2以上の向き付け可能な閉曲面とする。そのような M は双曲計量を許容することが古典的に知られており、したがって、その普遍リーマン被覆は双曲平面 \mathbb{H}^2 に等長的である。言い換えれば、 M の基本群 $\pi_1(M)$ から \mathbb{H}^2 の向きを保つ等長変換の群 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \text{SO}^+(2, 1)$ への単射準同型 $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ が存在し、 $\rho(\pi_1(M))$ の \mathbb{H}^2 への作用は固有不連続、自由かつコンパクトである。 ρ' をいま一つのそのような準同型とすると、対応する双曲的曲面が元の(すなわち ρ に対応する)双曲的曲面に向きを保って等長的であるための必要十分条件は、 ρ' が ρ に共役、すなわちある $\varphi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ が存在して $\rho'(\gamma) = \varphi \circ \rho(\gamma) \circ \varphi^{-1}$ ($\gamma \in \pi_1(M)$) が成立することである。このとき、 ρ' は ρ の自明な変形であると考え、またそのようによぶことにする。

さて、 M 上には等長的でない双曲計量が存在し、その等長類の全体はリーマン面のモジュライ空間と同一視される。言い換えれば、準同型 ρ は非自明な連続変形を許容する。一般に、局所コンパクト位相群 G の部分群 Γ が G の**格子**(lattice)であるとは、 Γ が G の部分集合として離散的であって、かつ $\Gamma \backslash G$ のハール測度が有限であることをいい、とくに $\Gamma \backslash G$ がコンパクト

な場合にコンパクト格子 (あるいは一様格子) とよぶ. 上述したことは, $SO^+(2, 1)$ 内に $\pi_1(M)$ に同型なコンパクト格子 $\rho(\pi_1(M))$ が存在し, それが格子という性質を保ったままで非自明かつ連続的に変形できることを主張している.

ところが, 3次元以上の双曲的閉多様体, あるいは対応する $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n) \cong SO^+(n, 1)$ ($n \geq 3$) のコンパクト格子を考えると状況は一変する. 1960年代初頭に Calabi [7], Weil [41] によって証明された局所剛性定理によれば, そのような格子は非自明な連続変形を持ち得ないのである. 1967年に Mostow [34] はこの結果の大域版というべき結果—強剛性定理—を証明した. すなわち, $SO^+(n, 1)$ ($n \geq 3$) のコンパクト格子に群として同型なコンパクト格子はもとの格子に共役なものしか存在し得ない. この Mostow の定理は, $SL(2, \mathbb{R})$ に局所同型でないすべての非コンパクト単純リー群¹ およびそれらの直積に局所同型なりリー群 (半単純リー群) の場合に, Mostow 自身によって一般化された [35].

さて, 1970年代半ばになって Margulis [30] は, 階数 2 以上の半単純リー群² の格子³ に対して, Mostow 強剛性定理を著しく一般化した剛性定理を証明した. そしてこの定理は Mostow によって超剛性定理と名付けられた. Mostow の定理がもとの格子と同型な格子を限定するものであるのに比して, Margulis の定理は格子から単純リー群への準同型を限定するものである. 具体的な場合を例として述べておこう (定理の一般的な主張については, [42] を参照されたい).

例 1 (Margulis 超剛性 [30] の特別な場合). $G = SL(n, \mathbb{R})$ ($n \geq 3$), $H = SL(m, \mathbb{R})$ とし, Γ を G の格子とする. $\rho: \Gamma \rightarrow H$ を準同型とし, 像が H^4 においてザリスキ稠密であると仮定する. このとき, ρ は連続準同型 $\bar{\rho}: G \rightarrow H$ に拡張する.

1.2. **なぜ調和写像か?** $SO(n, 1)$, $SU(n, 1)$ の階数は 1 であり, それらの格子に対しては Margulis 超剛性定理の主張は成立しない. ところが, 1992年に

¹ $SO^+(2, 1)$ は $SL(2, \mathbb{R})$ に局所同型である.

² $SO^+(n, 1)$ の階数は 1 である.

³正確には既約格子.

⁴正確には H を \mathbb{R} 点とする代数群.

Corlette [8] は、同じく階数 1 である $\mathrm{Sp}(n, 1)$ ($n \geq 2$), F_4^{-20} の格子に対して超剛性定理の主張が成り立つことを証明した. 証明には調和写像が用いられており, その手法はエルゴード理論に基づく Margulis の手法とは全く異なるものである. Corlette の仕事に引き続き, Mok-Siu-Yeung [33], Jost-Yau [25] が Margulis 超剛性定理を調和写像を用いて証明することを試み, コンパクト格子の場合に Margulis 超剛性定理より一般的な定理—幾何学的超剛性定理—の証明に成功した. 上述の例 1 の場合について, 調和写像の手法の基本的な考え方をみておこう. なお, リーマン多様体の中の調和写像の定義については, 今回の RIMS 研究集会の報告の多くに述べられるはずであるので, 本稿では省略させていただく.

例 1 のリー群をその極大コンパクト部分群によってわると, 非コンパクト型対称空間

$$X = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n), \quad Y = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(m)$$

が得られる. 調和写像 $f: X \rightarrow Y$ で ρ 同変なもの, すなわち $f(\gamma x) = \rho(\gamma)f(x)$ ($\gamma \in \Gamma, x \in X$) をみたすものが存在すると仮定する. このとき, もし f が全測地的であることが示されれば, X の既約性から f は相似的 (homothetic) 埋め込みになることが分かる. 実際, f の全測地性により, Y の計量の f による引き戻しは平行であり, X の既約性により, これは X の計量の定数倍になる. すなわち, f は相似的是はめ込みになるが, Y の測地線が自己交差を持たないことから f の単射性が従う.

では, 調和写像 $f: X \rightarrow Y$ が全測地的であることを示すにはどうすればよいだろうか? $f^{-1}TY$ 値 1 形式に作用する外微分作用素とその形式的随伴作用素をそれぞれ d, δ で表し, ベクトル束 $T^*X \otimes f^{-1}TY$ に自然に定まる接続を ∇ で表す. すると, (f が任意の写像の場合に) ∇df は対称であり, ddf は ∇df の反対称化であるから, $ddf = 0$ が成り立つ. また, 調和写像の方程式 $\Delta f := \mathrm{tr}_g \nabla df = 0$ は $\delta df = 0$ と同値である. したがって, f が調和ならば, $\Delta df \stackrel{\mathrm{def}}{=} (d\delta + \delta d)df = 0$ となり, df は $f^{-1}TY$ 値 1 形式として調和になる. 一方, f が全測地的という条件は $\nabla df = 0$ と表されるが, これは df が $T^*X \otimes f^{-1}TY$ の切断として平行であることを意味している. すなわち, 調和写像 f が (適切な条件下で) 全測地的になることを示す問題は, $f^{-1}TY$

に値を持つ調和1形式 df が平行になることを示す問題に帰着される。そして、この後者の問題を上述の設定において解くことにより、次の結果が得られる。

定理 1 (幾何学的超剛性定理 [33], [25] の特別な場合). G, X を例 1 のとおりとし, Γ を G のコンパクト格子, Y をアダマール多様体とする. $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(Y)$ を準同型とし, $\rho(\Gamma)$ は $Y(\infty)$ に大域的固定点を持たないと仮定する. このとき, ρ 同変調和写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在し, さらに f は全測地的な相似的埋め込み, あるいは定値写像になる.

定理の主張において, **アダマール多様体**とは, 完備かつ単連結で断面曲率がいたるところ非正なリーマン多様体のことであり, $Y(\infty)$ は Y の幾何学的無限遠境界, すなわち測地半直線の漸近同値類全体の集合である. $Y(\infty)$ には自然に位相が定まり, Y がアダマール多様体ならば $n-1$ 次元球面に同相になる (cf. [38]). また, $\rho(\Gamma)$ の**大域的固定点**とは, $\rho(\Gamma)$ のすべての元によって固定される点のことである.

1.3. Bochner 型公式. 調和写像の存在を既知としたとき, 剛性問題における調和写像の手法の鍵は, 与えられた設定において $f^{-1}TY$ に値を持つ調和1形式 df が平行になることを示す点にあると見てよい. そして, この種の主張を正当化する一般的な手法として, 我々は Bochner 技法というものを知っている. これは適切な積分公式 (Bochner 型公式) を確立し, その帰結として上述のような主張を導く⁵というものであり, 定理 1 の証明もこの枠組みにおいてなされる. Bochner 技法の原型は, 有名な Bochner の定理 [3] 「非負のリッチ曲率をもつコンパクトリーマン多様体上の任意の調和1形式は平行である」の証明にあり, そこでは通常の1形式に対する Bochner の公式を用いて主張が導かれる. この公式および帰結を写像の微分の場合に一般化した形で述べておこう.

命題 2 (Bochner-Eells-Sampson の公式, Eells-Sampson [12]). M, N をリーマン多様体とし, M はコンパクトであると仮定する. $f: M \rightarrow N$ を滑らか

⁵最大値原理によって同じ結論が得られる場合もある.

な写像とする. このとき, 次の公式が成り立つ:

$$\int_M \langle -\Delta df, df \rangle dv = \int_M (|\nabla df|^2 + \sum_i \langle df(\text{Ric}^M(e_i)), df(e_i) \rangle - \sum_{i,j} \langle R^N(df(e_i), df(e_j))df(e_j), df(e_i) \rangle) dv.$$

系 3. $\text{Ric}^M \geq 0$, $K^N \leq 0$ ならば, 任意の調和写像 $f: M \rightarrow N$ は全測地的である.

改良・一般化・離散的類似 Bochner-Eells-Sampson の公式から調和写像の全測地性を導くには, 定義空間のリッチ曲率が非負であることおよび像空間の断面曲率が非正であることが必要である. 後者の条件は, 幾何学的超剛性定理の設定においてもみたされるが, 前者の条件はそうではない. 実際, 定義空間は非コンパクト型対称空間であり, そのリッチテンソルは計量の負の定数倍に等しい. したがって, 幾何学的超剛性定理の証明のためには, Bochner-Eells-Sampson の公式を何らかの意味で改良することが必要になる. 松島 [31] は, 非コンパクト型対称空間のコンパクト商上の 1 形式に対して Bochner の公式の改良形 (以下, 松島の公式とよぶ) を提示し, 階数 2 以上の既約エルミート対称空間の場合に, そのコンパクト商上に非自明な調和 1 形式が存在しない (したがって, 第 1 ベッチ数が零になる) ことを証明した. (任意の階数 2 以上の既約対称空間の場合に同じ結論が成り立つことは金行-長野 [26, 27] によって確認された.) Mok-Siu-Yeung [33], Jost-Yau [25] は, 松島の公式を写像の微分に対する公式に一般化し, それを用いて幾何学的超剛性定理を証明したのである. 一般化の状況は, Bochner の公式から Bochner-Eells-Sampson の公式へのそれと全く同様であり, その意味で, 幾何学的超剛性定理の証明で使われる Bochner 技法の本質は, 松島の公式によって尽くされているといっても過言ではない. なお, 定理 1 の証明は本稿では扱わないが, [17, 36, いずれも §3] に比較的詳しい解説があるので, そちらを参照していただきたい.

さて, 離散の場合にも以上の公式の類似が必要になる. 詳細は後述することにし, ここでは以下のことだけ述べておく. Garland [14] がユークリッ

ト的ビルディング (後述) に対して松島の公式の類似を確立し, Ballmann-Świątkowski [1], Żuk [43] は Garland の公式を任意の単体複体へと一般化した. そして, Wang [39, 40], Gromov [15], 井関氏と筆者 [21] がその写像版を与えたのである.

以上述べたことを表にしてまとめておこう.

	$\text{Ric} \geq 0$	非コンパクト型局所対称空間 ↓ 単体複体
1形式	Bochner → ↓	松島 [31], 金行-長野 [26, 27] ↓ Garland [14], Ballmann-Świątkowski [1], Żuk [43]
写像	Eells-Sampson	Mok-Siu-Yeung [33], Jost-Yau [25] ↓ Wang [39, 40], Gromov [15], 井関-N. [21]

2. 離散の場合

超剛性定理の具体的な場合を例1として述べたが, それはリー群 $SL(n, \mathbb{R})$ の格子に関する主張であった. 一方, Margulis 超剛性定理は, その一般形においては局所体上の半単純代数群の格子に対して述べられており, 格子からの準同型の行き先としても局所体上の単純代数群をとることができる. 再び具体的な場合を例として述べておく.

例 2. $G = SL(n, \mathbb{Q}_p)^6$ ($n \geq 3$), $H = SL(m, \mathbb{Q}_r)$ とし, Γ を G の格子とする. $\rho: \Gamma \rightarrow H$ を準同型とし, 像が H においてザリスキ稠密であると仮定する. このとき, $p = r$ で ρ は連続準同型 $\bar{\rho}: G \rightarrow H$ に拡張するか, あるいは $\rho(\Gamma)$ は H において相対コンパクトになる.

$SL(n, \mathbb{Q}_p)$ の極大コンパクト部分群は $SL(n, \mathbb{Z}_p)$ である. そこで, 連続の場合にならって, 等質集合

$$X = SL(n, \mathbb{Q}_p)/SL(n, \mathbb{Z}_p), \quad Y = SL(m, \mathbb{Q}_r)/SL(m, \mathbb{Z}_r)$$

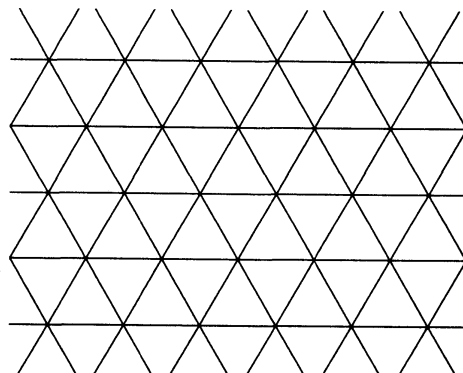
⁶ $\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p$ はそれぞれ p 進体, p 進整数環である.

を考える. これらはもはや多様体ではなく, 離散的な可算集合に過ぎない. しかし, 適当な仕方で単体複体の構造と距離を定義することができて, この距離に関して CAT(0) 空間になることが知られている. これらの距離単体複体はユークリッド的ビルディングの基本的な例であるので, 調和写像の定式化に進む前に, この例を少し詳しく見ておくことにしたい.

若干の一般論から始めよう. **ビルディング**とは, ある性質をもつ部分複体 (**アパートメント**とよばれる) の族が指定された単体複体であり, 各アパートメントはコクセター複体 (コクセター群に付随して定まる単体複体) に同型であることが要請される (cf. [5]). ビルディングは, 対応するコクセター複体がユークリッド空間の三角形分割である場合に, **ユークリッド的ビルディング**とよばれる. ユークリッド的ビルディングは, 対応するコクセター複体のユークリッド距離を各アパートメントに移植することにより距離を定めることができ, この距離によって CAT(0) 空間になる.

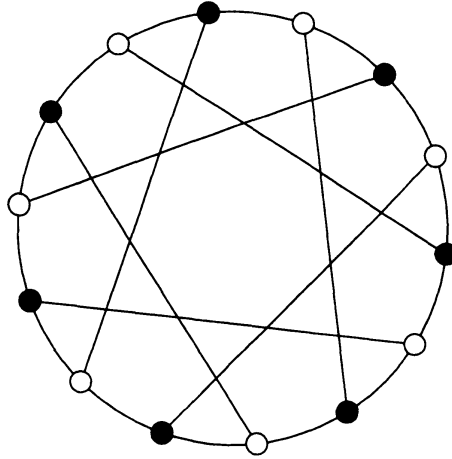
X は $n-1$ 次元のユークリッド的ビルディングの典型例であり, $n=2$ の場合は $p+1$ 正則樹木となる. その構造は簡明であるので, 次の例において $n=3$ の場合を詳しく見ることにする.

例 3 ($X = \mathrm{SL}(3, \mathbb{Q}_p) / \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}_p)$ の構造). このビルディングに対応するコクセター複体は下図のような平面の三角形分割であり, コクセター群は図の直線に関する鏡映によって生成されるユークリッド的鏡映群 (\widetilde{A}_2 型とよばれるもの) である.



すなわち, X はこの平面の (非可算無限個の) コピーをしかるべく張り合わせて得られるのであるが, $n=2$ の場合と異なり, その大域的な構造をイメージすることは困難である. しかし, X の局所的構造を記述することは

難しくなく、当面の話にはそれで十分である。単体複体の頂点のリンクは、その上の単体的錐が頂点の近傍を与えるので、単体複体の局所的情報をすべて含んでいるといえる。\$X\$ の各頂点のリンクはすべて同型であり、\$p = 2\$ の場合、次のような3正則2部グラフである：



グラフの中に様々な六角形が見えるが、これらはアパートメントによるリンクの切り口を表しており、コクセター複体における頂点のリンクである正六角形に対応する。

以上は、\$X\$ の単体複体としての構造に関する説明であるが、次に、\$X\$ の \$CAT(0)\$ 空間としての構造について述べる。やはり \$X\$ の局所構造に注目し、とくに頂点における接錐の構造をみることにする。頂点の近傍は、上図のグラフ上の単体的錐に各六角形(中身あり)が正六角形になるように距離を定義したものに他ならず、したがって、頂点における接錐は各正六角形を平面で置き換えたものである。この接錐において、錐点を中心とする半径1の距離球面を考えると、これは上図のグラフに各辺の長さを \$\pi/3\$ として距離を定めたものに等長的であり、各六角形は半径1の円にみえる。そして、接錐はこの距離グラフ上の距離錐に等長的になる。

なお、\$X\$ の頂点のリンクは有限グラフであるが、今後の展開において、その**離散的ラプラシアン**の固有値(とくに第2固有値)が少なからず重要な意味をもつ。\$x \in X(0)\$ とするとき、\$Lkx\$ の離散的ラプラシアンは、\$\varphi\$ を \$(Lkx)(0)\$ 上の関数として

$$(\Delta\varphi)(x') = \varphi(x') - \frac{1}{p+1} \sum_{x''; (x', x'') \in (Lkx)(1)} \varphi(x'') \quad (x' \in (Lkx)(0))$$

によって与えられる. Feit-Higman[13]により, Δ の固有値が

$$(1) \quad 1 \pm \frac{\sqrt{p}}{p+1} \text{ (重複度 } p^2 + p), \quad 0, 2 \text{ (ともに重複度 } 1)$$

と計算されている. この計算の明解な説明が [44, §5] にあるので参照されたい.

2.1. 組合せ調和写像. 距離単体複体間の調和写像の定式化に進もう. 我々のアプローチ [39, 40, 15, 21] においては, 定義空間の単体構造と像空間の距離構造だけに注目し, 定義空間の距離構造と像空間の単体構造は忘れることにする.⁷ ただし, 定義空間には許容ウェイトが与えられているものとするので, これが定義空間にいくらかの計量的概念を付与することになる. また, 像空間は CAT(0) 空間であると仮定する.

調和写像の概念が定式化されれば, 超剛性定理の証明のための手法は連続の場合と同様である. すなわち, 同変調和写像の存在を示し, Bochner 技法によってこの写像が特殊な写像になることを示そうというのである.

設定は以下のとおりである: X を単体複体とし, X 上には許容ウェイト m が与えられているとする. Γ を $\text{Aut}(X, m)$ の部分群とし, Γ は X に固有不連続, ココンパクトかつ自由⁸に作用すると仮定する. Y を CAT(0) 空間とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(Y)$ を準同型とする.

$f: X(0) \rightarrow Y$ を ρ 同変写像とする. ここで, f は頂点集合 $X(0)$ においてしか定義されていないが, Y における重心の概念を用いると, f は X の幾何学的実現 $|X|$ から Y への ρ 同変連続写像に自然に拡張できることに注意しておく. f の「微分」 $df_x: (\text{Lk}x)(0) \rightarrow TC_{f(x)}Y$ を

$$df_x(x') = \exp_{f(x)}^{-1} f(x') \quad (x' \in (\text{Lk}x)(0))$$

によって定義し, 「非線形ラプラシアン」 Δf を

$$x \in X(0) \mapsto \Delta f(x) = \text{bar} \left(\sum_{x' \in (\text{Lk}x)(0)} \frac{m(x, x')}{m(x)} \text{Dirac}_{df_x(x')} \right) \in TC_{f(x)}Y$$

⁷Daskalopoulos-Mese [9, 10] によって, 定義空間の距離構造をむしろ積極的に活用しようというアプローチも提案されている.

⁸作用が自由であるという仮定は不要 (cf. [21]) だが, 本稿では簡単のために仮定しておく.

によって定義する.

定義 1. すべての $x \in X(0)$ に対して $\Delta f(x) = o_{f(x)}$ がみたされるとき, f は調和 (harmonic) であるという.

調和性の定義には, X の 2 次元以上の情報は関係せず, X の 1 骨格 (すなわち, 1 次元以下の単体全体のなすグラフ) だけに関わることに注意する. グラフから CAT(0) 空間 Y への調和写像の概念は, Y が距離樹木の場合には Lebeau [29] によって, Y がアダマール多様体の場合には小谷-砂田 [28] によって定式化されており, 定義 1 はその一般化である. 我々の定式化において一般に単体複体を考える理由は, 次節以降の話において X の 2 単体に関する情報が重要な役割を果たすという点にある.

序においても述べたように調和写像の存在問題には深入りしないが, 結果だけ述べておく (cf. [39, 40, 21]): Y が局所コンパクトで ρ が (Jost [24] の意味で) 簡約的ならば, ρ 同変調和写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ が存在する.

2.2. Garland 型公式と Wang 不変量. 連続の場合, 幾何学的超剛性定理の証明において松島の公式の写像版が有効に機能した. 離散の場合には, 次の公式が同様の役割を担うものと期待される.

命題 4.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{F}(0)} m(x) d_{f(x)}(\Delta f(x), o_{f(x)})^2 \\ &= \sum_{x \in \mathcal{F}(0)} \left[\sum_{(x', x'') \in (\text{Lk}x)(1)} m(x, x', x'') d_{f(x)}(df_x(x'), df_x(x''))^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{x' \in (\text{Lk}x)(0)} m(x, x') d_{f(x)}(df_x(x'), \Delta f(x))^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{(x', x'') \in (\text{Lk}x)(1)} m(x, x', x'') \{d_Y(f(x'), f(x''))^2 - d_{f(x)}(df_x(x'), df_x(x''))^2\} \right]. \end{aligned}$$

ここで, $d_{f(x)}$ は $TC_{f(x)}Y$ の距離 (cf. 定義 7) であり, $\mathcal{F}(0)$ は $X(0)$ への Γ 作用の基本領域を表す.

前述したように, 松島の公式の離散的類似は Garland [14] によって与えられ, Ballmann-Świątkowski [1], Żuk [43] によって任意の単体複体へ一般化された. そして, その写像版が Wang [39, 40], Gromov [15], 井関氏と筆者 [21] によって与えられたのである. 命題 4 に与えたのは筆者等の公式であるが, Garland の公式あるいはその亜種をこのように一つの式として書き下したのは, Pansu [37] が Garland の公式を例 3 のユークリッド的ビルディングの場合に書き下しているのを除いては, 筆者等が初めてのようである. (Garland の公式を任意の単体複体の場合に一つの式として書き下したものが, [21] の Appendix にある.)

なお, 命題 4 の公式において, [] 内の第 3 項は Y の非線形性・曲率を反映する部分である. Y が CAT(0) 空間という設定においては, 写像 $\exp_y^{-1}: Y \rightarrow TC_y Y$ は距離を減少させる写像であるため, この項は非負になる. 一方, 第 1 項と第 2 項は 1 コサイクルに対する Garland の公式にも現れる部分であるので, これらを合わせて **Garland 部分** とよぶことにする.

Garland 部分の非負性の判定と関連して, M. T. Wang [40] は次の不変量を導入した.

定義 2 (Wang 不変量). 非定値写像 $\varphi: (\text{Lk}x)(0) \rightarrow TC_y Y$ に対して

$$\text{RQ}(\varphi) = \frac{\sum_{(x', x'') \in (\text{Lk}x)(1)} m(x, x', x'') d_y(\varphi(x'), \varphi(x''))^2}{\sum_{x' \in (\text{Lk}x)(0)} m(x, x') d_y(\varphi(x'), \bar{\varphi})^2}$$

と定義する. ここで, d_y は $TC_y Y$ の距離であり,

$$\bar{\varphi} = \text{bar} \left(\sum_{x' \in (\text{Lk}x)(0)} \frac{m(x, x')}{m(x)} \text{Dirac}_{\varphi(x')} \right)$$

(cf. 定義 8) である. そして,

$$\lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y) = \inf_{\varphi} \text{RQ}(\varphi)$$

と定義する.

Wang 不変量は $\text{Lk}x$ の 2 次元以上の情報 (すなわち, X の 3 次元以上の情報) には依存しないことに注意する. また, $TC_y Y$ がヒルベルト空間に等長的ならば, $\lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y) = \lambda_1(\text{Lk}x, \mathbb{R})$ が成り立つ. 右辺は $\text{Lk}x$ の 1 骨格

(これは有限グラフである)の離散的ラプラシアン⁹の第2固有値に他ならず, 原理的に計算可能な量である.

Wang 不変量を用いると,

$$(2) \quad \text{Garland 部分} \geq \left(\lambda_1(\text{Lk}x, TC_{f(x)}Y) - \frac{1}{2} \right) \\ \times \sum_{x' \in (\text{Lk}x)(0)} m(x, x') d_{f(x)}(df_x(x'), \Delta f(x))^2$$

となる. とくに, すべての $x \in X(0)$, $y \in Y$ に対して $\lambda_1(\text{Lk}x, TC_yY) \geq 1/2$ が成り立っていれば, Garland 部分は非負になる.

すべての $x \in X(0)$, $y \in Y$ に対して $\lambda_1(\text{Lk}x, TC_yY) > 1/2$ が成り立つことが確認できる場合があり, 興味深い帰結をもつ.

系 5. すべての $x \in X(0)$, $y \in Y$ に対して $\lambda_1(\text{Lk}x, TC_yY) > 1/2$ が成り立つならば, 任意の ρ 同変調和写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ は定値写像になる. したがって, ρ 同変調和写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ が存在するならば, $\rho(\Gamma)$ は Y に大域的固定点をもつ⁹.

系における Wang 不変量に関する仮定が準同型 ρ に依らないことを注意しておく.

定義 3. 群 Γ が距離空間 Y に対して**固定点性質** (fixed-point property) をもつとは, 任意の準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(Y)$ に対して $\rho(\Gamma)$ が Y に大域的固定点をもつことである.

例 4. ヒルベルト空間 \mathcal{H} に対する固定点性質は, Kazhdan の性質 (T) [2] に他ならない (Delorme [11], Guichardet [16]).

系 5 は, ρ 同変調和写像が存在するという仮定のもとで, $\rho(\Gamma)$ が大域的固定点をもつことを主張している. 次の定理は, Wang 不変量に関する仮定を若干強めることにより, ρ 同変定値写像の存在 (したがって $\rho(\Gamma)$ の大域的固定点の存在) が直接導かれることを主張する.

⁹ $\rho(\gamma)f(x) = f(\gamma x) = f(x)$ だから, $\rho(\Gamma)$ は f の像 (1 点) を固定する.

定理 6 (井関-N. [21], Gromov [15]). ある $\varepsilon > 0$ が存在して, すべての $x \in X(0)$, $y \in Y$ に対して $\lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y) \geq 1/2 + \varepsilon$ が成り立つならば, 任意の準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(Y)$ に対して ρ 同変な定値写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ が存在する. したがって, Γ は Y に対して固定点性質をもつ.

証明は, Jost-Mayer 勾配流 [23, 32] を用いることによってなされる. 本稿では詳細は述べないことにするが, 若干の説明を加えておこう. まず, ρ 同変写像に対してその**エネルギー** (energy) を定義することができ, これによってエネルギー汎関数が定まる. そして, ρ 同変調和写像はエネルギー汎関数を最小化する写像として特徴付けられる. Y がアダマール多様体である場合には, エネルギー汎関数の通常の勾配流が定義されるが, 一般の場合にも, Jost-Mayer 勾配流とよばれる流れが定義でき, 定理 6 の仮定の下で, 任意の ρ 同変写像がこの流れに沿って定値写像まで変形されることが示される. 詳細は原論文 [21] にあるが, [22] に Y がアダマール多様体である場合を中心に証明の概要が紹介されているので, 合わせて参照していただきたい.

なお, 近藤剛史氏は, RIMS 研究集会における講演で話されたように, Gromov [15] の議論の細部を補って別証明を与えている. これについては近藤氏の報告を参照されたい.

2.3. Margulis 超剛性定理の証明へのアプローチ. 命題 4 の公式を用いて Margulis 超剛性定理を証明することは, 現時点では最も基本的な例 2 の場合でも部分的にしか出来ていない. n あるいは m が 4 以上の場合には本質的に理解が不足しているが, $n = m = 3$ の場合には証明の青写真は描けているのでそれを述べておこう.

$G = \text{SL}(3, \mathbb{Q}_p)$, $H = \text{SL}(3, \mathbb{Q}_r)$ とし, Γ を G のココンパクト格子, $\rho: \Gamma \rightarrow H$ を像がザリスキ稠密であるような準同型とする. X, Y をそれぞれ G, H に付随するユークリッド的ビルディングとすると, 2.1 小節の最後に述べた結果により ρ 同変写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ が存在する. 目標はこの f が定値写像あるいは単体的等長写像となることを示すことである. そしてこれを命題 4 の公式の帰結として導くことが出来るだろうというのが我々の期待である.

命題4の公式を写像 f に適用してみよう. まず, f は調和であるから公式の左辺は0になる. 今, $x \in X(0)$ として,

$$(3) \quad \lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y) \begin{cases} > \frac{1}{2} & (p \neq r \text{ または } y \text{ が頂点でないとき}) \\ = \frac{1}{2} & (p = r \text{ かつ } y \text{ が頂点のとき}) \end{cases}$$

が証明できたとしよう.¹⁰ すると, $p \neq r$ のとき, ある $x \in X(0)$ に対して $df_x: (\text{Lk}x)(0) \rightarrow TC_{f(x)}Y$ が非定値であると仮定すると, (2)により公式の右辺は正になってしまう. したがって, すべての $x \in X(0)$ に対して df_x は定値写像でなければならないが, $\Delta f(x) = 0$ であるから, これはすべての $(x, x') \in X(1)$ に対して $f(x) = f(x') \Leftrightarrow df_x(x') = 0$ が成り立つことを意味する. すなわち, f は定値写像であり, したがって $\rho(\Gamma)$ は Y に大域的固定点を持つ. Y の1点の固定化部分群は H のコンパクト部分群であることが知られているので, 結局 $\rho(\Gamma)$ が H において相対コンパクトであることが従う.

$p = r$ のときも同様に考えると, すべての $x \in X(0)$ に対して次のいずれかが成り立つことが分かる:

(i) すべての $x' \in (\text{Lk}x)(0)$ に対して $f(x) = f(x')$.

(ii) $\text{RQ}(df_x) = \lambda_1(\text{Lk}x, TC_{f(x)}Y) = 1/2$ であり, とくに $f(x)$ は Y の頂点である.

(i) は実際には起こらず, 必ず (ii) が成り立つと期待される. これが正しいとすると, すべての $x \in X(0)$ に対して df_x はレーリー商 RQ の最小値を実現する写像であり, しかもその最小値が $1/2$ という限界値をとることになる. このことは, df_x が極めて特殊な写像であることを示唆しており, 連続な場合の全測地性に対応する性質をもつことが期待される. そして, この性質から f が単体的等長写像であることを導くのはおそらく難しくないだろう.¹¹ 最後に, f が単体的等長写像であることから, ρ が連続準同型 $\bar{\rho}: G \rightarrow H$ に拡張することが導かれるはずであるが, 筆者はこの点はつめていない.

¹⁰ y が頂点でなければ $\lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y) > 1/2$ となることは分かっている (cf. 注1).

¹¹ここで述べた流れで証明できるのであれば, その過程で命題4の公式の右辺 [] 内の第3項が0になることも従う. このことも f が単体的等長写像であることの証明に必要なかもしれない.

今のところ, y が Y の頂点である場合には, (3) は部分的にしか確認できていない. p が r に比べて十分大きい場合に証明されているのみで, とくに $p = r$ の場合は分かっていない. したがって, $p = r$ の場合に df_x がどのような意味で特殊な写像になるかも明らかでないが, とりあえず期待される証明の流れは以上のとおりである. なお, p が r に比べて十分大きい場合は, 定理 6 が適用できる状況になるので, ρ は (像が H においてザリスキ稠密とは限らない) 任意の準同型でよく, この点で我々の手法によって得られる主張は Margulis 超剛性定理のそれより一般的である.

2.4. 不変量 δ とランダム群に対する固定点性質. 前述したように, $TC_y Y$ がヒルベルト空間に等長的ならば, Wang 不変量 $\lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y)$ はグラフ ($\text{Lk}x$ の 1 骨格) の離散的ラプラシアン の第 2 固有値として計算される. 一般の場合を扱うために, 次の不変量を導入する.

定義 4 ([21]). $TC_y Y$ 上の有限台をもつ確率測度 $\mu = \sum_{i=1}^m t_i \text{Dirac}_{v_i}$ に対して,

$$\delta(\mu) = \inf_{\iota} \left[\left\| \int_{TC_y Y} \iota(v) d\mu(v) \right\|^2 / \int_{TC_y Y} \|\iota(v)\|^2 d\mu(v) \right] \in [0, 1]$$

と定義する. ここで, $\iota: \text{supp}\mu \rightarrow \mathbb{R}^m$ は

$$\|\iota(v)\| = d_y(v, \text{bar}(\mu)) \quad (v \in \text{supp}\mu)$$

をみたく 1 Lipschitz 写像である. そして,

$$\delta(TC_y Y) = \sup_{\mu} \delta(\mu) \in [0, 1]$$

と定義する.

定義の仕方から分かるように, 接錐とは限らない任意の CAT(0) 空間 Y に対して不変量 $\delta(Y)$ が定義される.

$\delta(\mu)$ の定義は単純であるが, その幾何学的意味は一見分かりづらいようである. そこで, 傘という日常的な例を用いて, その意味を説明してみよう.

傘は, 柄の部分をとりにあえず忘れると, 通常 8 本の同じ長さの金属棒を一方の先端において束ねたものに, ビニールあるいは布でできた面を貼った

ものである。これにより傘に内在的距離が定まり、CAT(0)性は持たないものの、金属棒の(束ねられていない方の)先端の重心は意味をもって頂点に一致する。そして、このことは、傘が閉じているか開いているかには無関係である。次に、傘を空間内で閉じたり開いたりしてみる。このとき、金属棒の先端の3次元空間への埋め込みが変形することになるが、それぞれの埋め込みは1リプシッツであり、また、先端から頂点までの空間における距離は、傘における内在的距離に一致する(いずれも金属棒の長さである)。そして、金属棒の先端の空間における重心は、柄の部分のどこかにくる。通常の傘ではこの重心は頂点には一致せず、傘を一番広げたときに頂点に最も近付くことになる。

以上の説明をふまえて、 $\delta(\mu)$ の定義に戻ると、 $\iota: \text{supp}\mu \rightarrow \mathbb{R}^m$ を考えることは傘の開閉の状態を指定することに対応し、 ι に関してinfをとることは傘を開ききることに対応することが理解されると思う。 $TC_y Y$ の内在的幾何の制約のため、一般には、 $\text{supp}\mu$ の像の \mathbb{R}^m における(重み付き)重心を、 \mathbb{R}^m の原点($\text{bar}(\mu)$ の像とみなしている)に一致させることはできないが、最も近付けた状況で近さを定量的に測ったものが $\delta(\mu)$ に他ならない。

なお、 $\delta(\mu)$ の定義において、[]内の分母は ι に依存せず、純粋に正規化のためのものであることに注意しておく。

不変量 δ を用いると、Wang不変量が次のように評価される。

命題 7.

$$(1 - \delta(TC_y Y)) \lambda_1(\text{Lk}x, \mathbb{R}) \leq \lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y) \leq \lambda_1(\text{Lk}x, \mathbb{R}).$$

この命題は、Wang不変量を、単体複体 $\text{Lk}x$ (の1骨格)に由来する部分とCAT(0)錐 $TC_y Y$ に由来する部分に分けて理解している点で重要である。例えば、CAT(0)空間 Y を固定し、 y について一様な評価 $\delta(TC_y Y) \leq \delta_0$ が分かっているとす。そして、どのような単体複体 X であれば、そこに「うまく」作用する離散群 Γ が、 Y に対しては必ず固定点性質をもつ(「うまく」作用できない)といえるか、という問題を考えたとしよう。このとき、命題7によれば、 Y は忘れて、 $\lambda_1(\text{Lk}x, \mathbb{R})$ がすべての頂点 x に対して十分大きくなる X を探せばよいということになる。今述べたことを少し一般的

に定式化して、主張として述べておこう。そのために、一つ記法を導入しておく。 $\delta_0 \in [0, 1]$ に対して、CAT(0) 空間 Y で、すべての $y \in Y$ に対して $\delta(TC_y Y) \leq \delta_0$ という条件をみたすもの全体の集まりを $\mathcal{Y}_{\leq \delta_0}$ で表す。

系 8. X, Γ は設定 (§4) のとおりとし、

$$\lambda_1(\text{Lk}x, \mathbb{R}) > \frac{1}{2(1 - \delta_0)} \quad (x \in X(0))$$

をみたすとする。このとき、 Γ はすべての $Y \in \mathcal{Y}_{\leq \delta_0}$ に対して固定点性質をもつ。

ランダム群に対する固定点定理 以上の考え方(およびその発展形)の応用として、ランダム群に関する種々の固定点定理が得られる [19, 20, 18]. 我々の得た結果は、いずれも

「ランダム群は $\mathcal{Y}_{\leq \delta_0}$ に対して固定点性質をもつ」

という形式で述べられるが、ランダム群の意味(どのモデルを考えるか?)や δ_0 のとりうる範囲 ($\delta_0 < 1/2$ か $\delta_0 < 1$ か?) は、それぞれの場合で異なっている。ここでは、系 8(をより一般的な設定¹²において定式化したもの)を適用できる場合として、**三角モデルのランダム群**を例にとり、上述の主張を正確に述べることにする。

三角モデルのランダム群は Zuk [44] によって定義された。定数 $c > 1$ を固定しておき、 $d \in (0, 1)$ に対して、次の条件をみたす表示 $\langle S | R \rangle$ 全体の集合を $\mathcal{P}(m, d)$ で表す:

- (i) 生成元集合 S は対称 ($s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$) で、その元の個数は $2m$ である。
- (ii) 関係式集合 R はすべて長さ 3 の巡回既約語からなり、その元の個数は $c^{-1}(2m - 1)^{3d} \leq \#R \leq c(2m - 1)^{3d}$ をみたす。

ここで、語が**巡回既約**(cyclically reduced)であるとは、それ自身既約(すなわち、 ss^{-1} という形の部分語を含まない)であり、さらに巡回置換を施してもやはり既約であることをいう。長さ 3 の巡回既約語の個数は $2m(4m^2 - 6m + 3) \approx (2m - 1)^3$ であり、(ii) の後半の条件は、 R の元の個数がこの個数

¹²単体複体の代わりに重み付き可算集合(近藤剛史氏の報告を参照)を考える。

のおおよそ d 乗, あるいは対数をとれば d 倍であるということを意味している. d は密度 (density) とよばれる. さて, 三角モデルのランダム群が密度 d において性質 P をもつとは,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\#\{\langle S|R \rangle \in \mathcal{P}(m, d) \mid \text{表示 } \langle S|R \rangle \text{ をもつ群が性質 } P \text{ をもつ}\}}{\#\mathcal{P}(m, d)} = 1$$

が成り立つこととして定義される. すなわち, 生成元の個数が十分大きいとき, 密度 d の関係式集合は, ほぼ 1 に近い確率で性質 P をもつ群を与えることになる. 以上の準備により, 我々の結果を正確に述べることができる.

定理 9 (井関-近藤-N. [19]). $\delta_0 \in [0, 1/2)$, $d \in (1/3, 1)$ とする. このとき, 三角モデルのランダム群は, 密度 d において, すべての $Y \in \mathcal{Y}_{\leq \delta_0}$ に対して固定点性質をもつ.

不変量 δ の計算・評価 いくつか例をあげておこう.

例 5. Y がアダマール多様体あるいは距離樹木ならば, $\delta(TC_y Y) = 0$ である.

実際, アダマール多様体の場合は, 接錐が通常の接空間に他ならず, ユークリッド空間に等長的であるので, 主張は明らかである. アダマール多様体として, 基底多様体がヒルベルト多様体であるものを考えることができる. これも CAT(0) 空間であり, 接錐はヒルベルト空間に等長的になるので, 同じ結果が成り立つ.

距離樹木の場合はいくらか非自明であるが, 以下のようにして示される. まず, 距離樹木というときは, とりあえずグラフとして局所有限なものを考えていることにしよう. すると, 辺の内点における接錐は直線に等長的 (したがって主張は明らか) であり, 頂点における接錐は有限本の半直線を端点で接着して得られる距離空間に等長的である. 簡単のために, 半直線の本数が 3 の場合 (つまり, 三叉) を考える. その上の任意の有限台確率測度 μ に対して $\delta(\mu) = 0$ を示す必要があるが, 再び簡単のために, 3 本の半直線から一つずつ点をとって v_1, v_2, v_3 とし, $\mu = \sum_{i=1}^3 t_i \text{Dirac}_{v_i}$ とする. 以下, μ の重心 $\text{bar}(\mu)$ が三叉の錐点 (つまり, 3 半直線の接着点) o に一致する場合に

$\delta(\mu) = 0$ を確かめることにしよう ($\text{bar}(\mu) \neq o$ の場合は容易である). e を v_1 と同じ半直線上の, o からの距離が1の点とすると, $s \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} F(se) &= \sum_{i=1}^3 t_i d(v_i, se)^2 \\ &= t_1(|v_1| - s)^2 + t_2(|v_2| + s)^2 + t_3(|v_3| + s)^2 \\ &= F(o) + 2s(-t_1|v_1| + t_2|v_2| + t_3|v_3|) + s^2 \end{aligned}$$

となる. ここで, d は三叉の距離, $|v_i| = d(v_i, o)$ である. $\text{bar}(\mu) = o$ という仮定により, $F(se)$ は $s = 0$ のときに最小になるので, $t_1|v_1| \leq t_2|v_2| + t_3|v_3|$ が成り立たなければならない. 同様にしてさらに二つの不等式が得られ, 結局

$$t_1|v_1| \leq t_2|v_2| + t_3|v_3|, \quad t_2|v_2| \leq t_3|v_3| + t_1|v_1|, \quad t_3|v_3| \leq t_1|v_1| + t_2|v_2|$$

が成り立つことになる. これらの不等式は, \mathbb{R}^2 上に3辺の長さが $t_1|v_1|, t_2|v_2|, t_3|v_3|$ の三角形が描けることを意味している. 言い換えれば, v_1, v_2, v_3 と同じ長さをもつ \mathbb{R}^2 上のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ で, $\sum_{i=1}^3 t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ をみたすものが存在する. そして, このことは $\delta(\mu) = 0$ を意味している.

なお, 有限台の測度しか考えていないため, \mathbb{R} 樹木でも同じ結果が成り立つことに注意しておく.

例 6. Y を $SL(3, \mathbb{Q}_r)$ に付随するユークリッド的ビルディングとし, $y \in Y$ を頂点とする. このとき,

$$(c(r) :=) 1 - \frac{r+1}{2(r+1-\sqrt{r})} \leq \delta(TC_y Y) \leq 1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

が成り立つ.

すべての r に対して得られている評価としては今のところこれが最良であるが, 実際には左側の不等号が等号になるだろうと予想している. $r = 2$ のときにこの評価は $0.054 \dots \leq \delta(TC_y Y) \leq 0.36 \dots$ となること, ならびに $r \rightarrow \infty$ のとき下界, 上界はそれぞれ $1/2, 3/4$ に収束することを指摘してお

く. 右側の不等号は $TC_y Y$ の距離空間としての歪み (distortion)¹³ を評価することによって得られるが, 詳細は [20] を参照していただきたい.

以下, $r = 2$ の場合に左側の不等号を確かめることにする (r が一般の素数の場合も同様である [21]). $TC_y Y$ において, 錐点 o を中心とする半径 1 の距離球面は一つの距離グラフであるが, グラフとしては Lky に同型であった (cf. 例 3). その頂点を v_1, \dots, v_{14} とし, $\mu_0 = \sum_{i=1}^{14} \frac{1}{14} \text{Dirac}_{v_i}$ とする. このとき $\delta(\mu_0) \geq c(2)$ が成立し, これにより左側の不等号が確認される. 実際, $\varphi_0: (Lky)(0) \rightarrow TC_y Y$ を包含写像とすると, $RQ(\varphi_0) = 21/(3 \times 14) = 1/2$ となる. 一方, 命題 7 の証明 [21] を見直すと $RQ(\varphi_0) \geq (1 - \delta(\mu_0))\lambda_1(Lky, \mathbb{R})$ が分かるので, これらと (1) により $\lambda_1(Lky, \mathbb{R}) = 1 - \sqrt{2}/3$ となることを合わせて $\delta(\mu_0) \geq c(2)$ を得る.

以上で左側の不等号は確認されたわけだが, 上述したように我々は左側の不等号は等号になると予想している. そして予想が正しいとすると, $TC_y Y$ 上のすべての有限台確率測度 μ に対して $\delta(\mu) \leq c(2)$ が成立しなければならない. このことはとくに $\delta(\mu_0) \leq c(2)$, したがって $\delta(\mu_0) = c(2)$ を示唆するが, 実際にこれが正しいことを以下で示す. 結局, 我々の予想は, 関数 $\mu \mapsto \delta(\mu)$ が μ_0 において最大になることを主張している.

さて, $\delta(\mu_0) \leq c(2)$ を示すことにしよう. $\{v_1, \dots, v_{14}\}$ を形式的な基底とするベクトル空間 $V = \bigoplus_{i=1}^{14} \mathbb{R}v_i$ を考え, その上の対称双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,b}$ を

$$\langle v_i, v_j \rangle_{a,b} = \begin{cases} 1, & d_c(v_i, v_j) = 0, \\ 1/2, & d_c(v_i, v_j) = 1, \\ a, & d_c(v_i, v_j) = 2, \\ b, & d_c(v_i, v_j) = 3 \end{cases}$$

によって定義する. ここで, d_c は上述の距離グラフ上の組合せ距離を表す. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,b}$ が半正值のとき, V の部分空間 $(V_0)_{a,b}$ を

$$(V_0)_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \text{すべての } w \in V \text{ に対して } \langle v, w \rangle_{a,b} = 0\}$$

¹³正確にいうと, 通常歪みとは少し異なる不変量を評価する.

によって定義し, $W_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} V/(V_0)_{a,b}$ とおく. すると, $W_{a,b}$ 上には $\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,b}$ から対称双線形形式が誘導されるが, これは正定値なので $W_{a,b}$ にユークリッド構造が定まる. $\pi: V \rightarrow W_{a,b}$ を自然な射影とし, $\iota_{a,b}: \text{supp } \mu_0 \rightarrow W_{a,b}$ を $\iota_{a,b}: v_i \mapsto v_i \in V \mapsto \pi(v_i) \in W_{a,b}$ によって定義すると, $\iota_{a,b}$ は

$$\|\iota_{a,b}(v_i)\| = d(v_i, \text{bar}(\mu_0)) \quad (i = 1, \dots, 14)$$

をみだし ($\text{bar}(\mu_0) = o$ に注意), 1 リプシッツ写像であることも容易に分かる. そこで, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,b}$ が半正値という条件下で

$$\left\| \int \iota_{a,b}(v) d\mu_0(v) \right\|^2 = \frac{1}{14^2} \sum_{i,j=1}^{14} \langle v_i, v_j \rangle_{a,b} = \frac{1}{28} (5 + 12a + 8b)$$

を最小化してみる. すると, この量は $a = (1 - \sqrt{2})/4$, $b = (2 - 3\sqrt{2})/8$ のときに最小になり, そのときの値がちょうど $c(2)$ に等しいことが分かる.¹⁴ 以上で $\delta(\mu_0) \leq c(2)$ が示された.

上述の予想を記録しておこう.

予想 1. Y を $\text{SL}(3, \mathbb{Q}_r)$ に付随するユークリッド的ビルディングとし, $y \in Y$ を頂点とする. このとき,

$$\delta(\text{TC}_y Y) = 1 - \frac{r+1}{2(r - \sqrt{r} + 1)}$$

が成立する.

注 1. 予想 1 と (3) との関係述べておこう. X を $\text{SL}(3, \mathbb{Q}_p)$ に付随するユークリッド的ビルディングとし, $x \in X(0)$ とする. 予想 1 が正しければ, y が頂点かつ $p \geq r$ の場合に (3) が従う: 命題 7 と (1) により

$$\begin{aligned} \lambda_1(\text{Lk}x, \text{TC}_y Y) &\geq (1 - \delta(\text{TC}_y Y)) \lambda_1(\text{Lk}x, \mathbb{R}) \\ &= (1 - c(r))(1 - \sqrt{p}/(p+1)) \\ &= \frac{1 - \sqrt{p}/(p+1)}{2(1 - \sqrt{r}/(r+1))} \begin{cases} > \frac{1}{2} & (p > r) \\ = \frac{1}{2} & (p = r) \end{cases} \end{aligned}$$

¹⁴ グラム行列 $(\langle v_i, v_j \rangle_{a,b})$ の固有値は $(1-a) \pm \sqrt{2}(1/2-b)$ (重複度 6), $7(a \pm b) + (1-a) \pm 3(1/2-b)$ (重複度 1) で与えられる (cf. [21, §6]). これから, ここで求めた a, b の値に対して $\dim W = 7$ となることも分かる.

一方, $y \in Y$ が頂点でなければ, $\delta(TC_y Y) = 0$ が確かめられるので,

$$\lambda_1(\text{Lk}x, TC_y Y) = \lambda_1(\text{Lk}x, \mathbb{R}) = 1 - \sqrt{p}/(p+1) > 1/2$$

となる.

3. 補遺

この節では, 単体複体および CAT(0) 空間に関する基本事項を, 本稿の理解に必要な範囲でまとめておく.

単体複体

定義 5. 単体複体 (simplicial complex) とは, 集合 X とその部分集合族 \mathcal{S} の組 (X, \mathcal{S}) で,

(i) 各 $x \in X$ に対して $\{x\} \in \mathcal{S}$

(ii) $s \in \mathcal{S}, t \subset s \Rightarrow t \in \mathcal{S}$

をみたすもののことである. 単体複体 X の k 単体全体の集合を $X(k)$ で表す.

単体複体 X 上の許容ウェイト (admissible weight) とは, 正值関数

$$m: \bigcup_{k \geq 0} X(k) \rightarrow \mathbb{R}$$

で

$$m(s) = \sum_{t \in X(k+1), t \supset s} m(t) \quad (s \in X(k))$$

をみたすもののことである. X 上に許容ウェイト m が与えられたとき, X の自己同型写像で m を保つもの全体のなす群を $\text{Aut}(X, m)$ で表す.

頂点 $x \in X(0)$ に対して,

$$\{x' \in X \mid \{x, x'\} \in X(1)\}, \quad \{s \in \mathcal{S} \mid \{x\} \cup s \in \mathcal{S}, \{x\} \cap s = \emptyset\}$$

をそれぞれ頂点集合, 単体集合とする X の部分複体を x のリンク (link) とよび, $\text{Lk}x$ で表す. X 上に許容ウェイト m が与えられたとき, $m_x(s) = m(\{x\} \cup s)$ (s は $\text{Lk}x$ の単体) とおくことによって, $\text{Lk}x$ 上に許容ウェイト m_x が誘導される.

CAT(0) 空間

定義 6 (cf. [4]). 距離空間 (Y, d) が **CAT(0) 空間** (CAT(0) space) であるとは, 次の二つの条件がみたされることをいう:

- (i) Y は測地的空間 (geodesic space) である. すなわち, Y の任意の 2 点 x, y に対して, 曲線 $c: [0, 1] \rightarrow Y$ で $c(0) = x, c(1) = y$ および

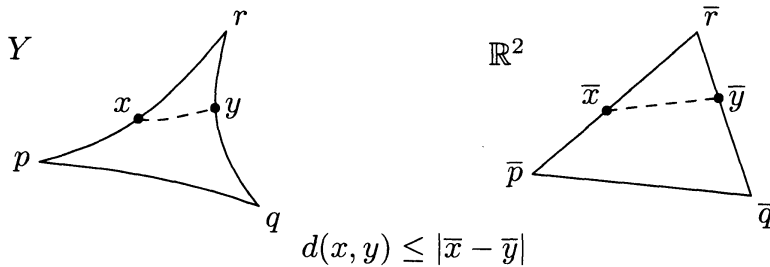
$$d(c(t), c(t')) = d(x, y)|t - t'| \quad (t, t' \in [0, 1])$$

をみたすものが存在する. (このような曲線 c を測地線分とよぶ.)

- (ii) Y の任意の測地三角形 Δ (3 点とそれらを結ぶ 3 本の測地線分を指定したもの) が, Δ と同じ辺長をもつ \mathbb{R}^2 の三角形 $\bar{\Delta}$ (Δ の比較三角形とよぶ) よりもやせている. すなわち, Δ の周上の任意の 2 点 x, y と対応する $\bar{\Delta}$ 上の 2 点 \bar{x}, \bar{y} に対して

$$d(x, y) \leq |\bar{x} - \bar{y}|$$

が成り立つ.



本稿では, CAT(0) 空間は完備であると仮定する. 定義から, CAT(0) 空間において, 任意の 2 点を結ぶ測地線分は一意的であることがしたがう. また, CAT(0) 空間は可縮である. CAT(0) 空間の最も基本的な例は, アダマール多様体 (完備かつ単連結で断面曲率がいたるところ非正なリーマン多様体) である. 多様体でない例としては, 距離樹木やユークリッド的ビルディング (cf. [5]) がある.

定義 7. Y を CAT(0) 空間とし, c, c' を, 点 $y \in Y$ を始点とする非自明な測地線とする. c, c' が y においてなす角度 $\angle_y(c, c')$ を, 比較三角形 $\overline{y c(t) c(t')}$ の頂点 \bar{y} における内角の $t, t' \rightarrow +0$ での極限として定義する. y を始点とする非自明な測地線全体の集合に, この角度が 0 のときに同値とする同値関係を定める. 同値類全体の集合を $\angle_y(\cdot, \cdot)$ から誘導される距離に関して完備

化したものを $S_y Y$ で表し, y における Y の方向空間 (space of directions) とよぶ. そして, $S_y Y$ 上の錘

$$TC_y Y = S_y Y \times [0, \infty) / S_y Y \times \{0\}$$

を y における Y の接錘 (tangent cone) とよぶ.

$TC_y Y$ 上には「内積擬き」 $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ および距離 d_y がそれぞれ

$$\langle ([c], t), ([c'], t') \rangle_y = tt' \cos \angle_y(c, c'),$$

$$d_y(\langle [c], t \rangle, \langle [c'], t' \rangle)^2 = t^2 + t'^2 - 2\langle [c], t \rangle, \langle [c'], t' \rangle_y$$

によって定義される. ここで $[c]$ は測地線 c の属する同値類を表す. (したがって, これらの表示は正確には $TC_y Y$ の稠密部分においてのみ意味を持つ.) $(TC_y Y, d_y)$ は再び CAT(0) 空間である.

写像 $\exp_y^{-1}: Y \rightarrow TC_y Y$ を $\exp_y^{-1}(z) = ([c_{y,z}], d_Y(y, z))$ によって定義する. ここで, $c_{y,z}$ は y と z を結ぶ測地線分を表す. \exp_y^{-1} は距離を減少させる写像である.

定義 7 について, 詳細は [4, 6] を参照されたい.

定義 8. Y を CAT(0) 空間とし, $\mu = \sum_{i=1}^m t_i \text{Dirac}_{y_i}$ を Y 上の有限な台をもつ確率測度とする. このとき, 関数 $F(z) = \sum_{i=1}^m t_i d(y_i, z)^2$ を最小にする Y の点が唯一つ存在する. この点のことを μ の重心 (barycenter) とよび $\text{bar}(\mu)$ で表す.

REFERENCES

- [1] W. Ballmann and J. Świątkowski, *On L^2 -cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), 615–645.
- [2] B. Bekka, P. de la Harpe and A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, *New Mathematical Monographs* **11**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, xiv+472 pp.
- [3] S. Bochner, *Vector fields and Ricci curvature*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 776–797.
- [4] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [5] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [6] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, *Graduate Studies in Mathematics* 33, American Mathematical Society, 2001.

- [7] E. Calabi, *On compact, Riemannian manifolds with constant curvature. I*, Proc. Sympos. Pure Math. **3** (1961), 155–180, Amer. Math. Soc, Providence, R.I.
- [8] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. of Math. **135** (1992), 165–182.
- [9] G. Daskalopoulos and C. Mese, *Harmonic maps from a simplicial complex and geometric rigidity*, J. Differential Geom. **78** (2008), 269–293.
- [10] G. Daskalopoulos and C. Mese, *Fixed point and rigidity theorems for harmonic maps into NPC spaces*, Geom. Dedicata **141** (2009), 33–57.
- [11] P. Delorme, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produit tensoriels continus et représentations*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 281–336.
- [12] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic maps of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [13] W. Feit and G. Higman, *The nonexistence of certain generalized polygons*, J. Alg. **1** (1964), 114–131.
- [14] H. Garland, *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups*, Ann. Math. **97** (1973), 375–423.
- [15] M. Gromov, *Random walk in random groups*, GAFA **13** (2003), 73–148.
- [16] A. Guichardet, *Étude de la 1-cohomologie et de la topologie du dual pour les groupes de Lie à radical abélien*, Math. Ann. **228** (1977), 215–232.
- [17] 井関裕靖, 調和写像と超剛性, 21 世紀の数学—幾何学の未踏峰—(宮岡礼子, 小谷元子編), 日本評論社, 2004, 168–182.
- [18] H. Izeki, in preparation.
- [19] H. Izeki, T. Kondo and S. Nayatani, *Fixed-point property of random groups*, Ann. Global Anal. Geom. **35** (2009), 363–379.
- [20] H. Izeki, T. Kondo and S. Nayatani, *N-step energy of maps and fixed-point property of random groups*, preprint.
- [21] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces*, Geom. Dedicata **114** (2005), 147–188.
- [22] 井関裕靖-納谷信, 調和写像による超剛性定理および固定点定理へのアプローチ, 数学 **158** (2006), 239 - 262, 岩波書店.
- [23] J. Jost, *Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 659–673.
- [24] J. Jost, *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [25] J. Jost and S.-T. Yau, *Harmonic maps and superrigidity*, Differential geometry: partial differential equations on manifolds, Proc. Symp. Pure Math. **54-I** (1993), 245–280.
- [26] S. Kaneyuki and T. Nagano, *On the first Betti numbers of compact quotient spaces of complex semi-simple Lie groups by discrete subgroups*, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo **12** (1962), 1–11.
- [27] S. Kaneyuki and T. Nagano, *On certain quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces*, Osaka Math. J. **14** (1962), 241–252.
- [28] M. Kotani and T. Sunada, *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2000), 1–20.
- [29] É. Lebeau, *Applications harmoniques entre graphes finis et un théorème de superrigidité*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1183–1203.

- [30] G. Margulis, *Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature*, Amer. math.Soc. Transl. **190** (1977), 33–45.
- [31] Y. Matsushima, *On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces*, Ann. of Math. **75** (1962), 312–330.
- [32] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. and Geom. **6** (1998), 199–253.
- [33] N. Mok, Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, *Geometric superrigidity*, Invent. Math. **113** (1993), 57–83.
- [34] G. D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968), 53–104.
- [35] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. of Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1973, v+195 pp.
- [36] 納谷信, 調和写像と剛性, 微分幾何学の最先端 — Surveys in Geometry, special edition (中島啓編), 培風館, 2005, 188–221.
- [37] P. Pansu, *Formules de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), 107–139.
- [38] 酒井隆, リーマン幾何学, 裳華房, 1992.
- [39] M.-T. Wang, *A fixed point theorem of discrete group actions on Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **50** (1998), 249–267.
- [40] M.-T. Wang, *Generalized harmonic maps and representations of discrete groups*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 545–563.
- [41] A. Weil, *On discrete subgroups of Lie groups. II*, Ann. of Math. **75** (1962), 578–602.
- [42] R. Zimmer, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Monographs in Mathematics **81**, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1984.
- [43] A. Žuk, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyédres*, C. R. Acad. Sci. Paris **323** (1996), 453–458.
- [44] A. Žuk, *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups*, GAFA **13** (2003), 643–670.