数理解析研究所講究録
第 1720 巻 2010 年 150-153

Existence of a fixed point of an affine isometric action on a strictly convex Banach space

東北大学・大学院理学研究科数学専攻　田中 守 (Mamoru Tanaka)
Mathematical Institute,
Tohoku University

概要

離散群が性質 (FH) を持つとは, 任意の Hilbert 空間への任意のアフィン等長作用が固定点を持つことである. 特に, 可算離散群のとき, 性質 (FH) は, Kazhdan の性質 (T) と呼ばれる群のユニタリー表現に関する性質と同値であることが知られている. Kazhdan の性質 (T) は, 無限群の構造, 組合せ論, 作用素環, エルゴード理論, ランダムウォークなど多くの分野で重要な役割を果たしている.

実数 $p\geq 1$ に対して, 性質 (FH) の拡張である性質 FL^p が次のようにして定義される: 離散群が性質 FL^p を持つとは, 任意の L^p 空間への任意のアフィン等長作用が固定点 ($p=1$ のときは有界軌道) を持つことである. 例えば, 見村 [Mim] は, 整数 $n\geq 4$ と $k\geq 0$ に対して, $SL_n(\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_k])$ が性質 FL^p $(1<p<\infty)$ を持つことを示している. また, Chatterji-Druţu-Haglund [CDH10] により, 可算離散群がある $p\in[1,2]$ で性質 FL^p を持つならば, 全ての $p\in[1,2]$ で性質 FL^p を持つことが示されている. 一方で, すべての無限双曲離散群は, 十分大きな $p>2$ に対して性質 FL^p を持たないことが, Yu [Yu05] により示されている. さらに, 性質 (FH) を持つ無限双曲離散群の存在が知られている. そのため, アフィン等長作用に関して, L^p 空間 $(1\leq p\leq 2)$ と L^p 空間 $(p>2)$ はそれぞれ異なった性質を持つといえる.

本研究の目的は, このような違いを”群の不変量”を用いて表すことである. 例えば, 離散でない位相群においても性質 FL^p が同様に定義されるが, De Cornulier-Tessera-Valette [CTV08] は, 次を示している: 局所体上のランクが 1 の単純代数群は, その理想境界の Hausdorff 次元より大きい $p>1$ に対して, 性質 FL^p を持たない. このことから, $\mathrm{Sp}_{n,1}(\mathbb{R})$ が, $p>4n+2$ のとき性質 FL^p を持たないことがわかる.

ここでは, 有限生成群の狭義凸実 Banach 空間へのアフィン等長作用に関する結果を紹介する. 特に, 線形部分が正則表現である任意のアフィン等長作用が固定点を持つかどうかを, 各アフィン等長作用には依らない”或るラプラシアンの非零スペクトルの絶対値の下限”の評価により表す. この結果は, 「有限生成群が性質 FL^p を持たないかどうか」を判定するために有用と思われる. 具体的な有限生成群に対するこの下限の評価は今後の課題である.

1 狭義凸実Banach空間へのアフィン等長作用

Γを有限生成群とし, Kをその有限生成元集合とする. ただし, Kは単位元を含まず, $\gamma \in K$ならば$\gamma^{-1} \in K$であると仮定する. また, $(B, \| \, \|)$を狭義凸実Banach空間, つまり, 任意の単位ベクトル$u, v \in B$が$\|u+v\| < 2$を満たす実Banach空間とする. 例えば, L^p空間$(1 < p < \infty)$は狭義凸Banach空間である. (以下の議論は複素Banach空間でも同様に成り立つが, 記号の煩雑さを避けるため実Banach空間に限った.)

$\pi : \Gamma \times B \to B$を$\Gamma$の$B$への線形等長作用とする. 写像$c : \Gamma \to B$が$\pi$-コサイクルであるとは, 任意の$\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$に対して$c(\gamma_1 \gamma_2) = \pi(\gamma_1, c(\gamma_2)) + c(\gamma_1)$を満たすことである. ΓのBへの等長作用$\alpha : \Gamma \times B \to B$がアフィンであることは, ΓのBへのある線形等長作用ρとあるρ-コサイクルcにより, 任意の$v \in B$と$\gamma \in \Gamma$に対してαが$\alpha(\gamma, v) = \rho(\gamma, v) + c(\gamma)$と書けることと同値である. この$\rho$を$\alpha$の線形部分と, cをコサイクル部分と呼ぶ. 実は, 実Banach空間の等長作用はいつでもアフィンであることが知られている. 線形等長作用πを線形部分に持つΓのBへの全てのアフィン等長作用からなる集合を$\mathcal{A}(\pi)$とする.

rを1以上の実数とする. ΓのBへのアフィン等長作用αと, $v \in B$に対して

$$F_{\alpha,r}(v) := \left(\sum_{\gamma \in K} \frac{\|v - \alpha(\gamma, v)\|^r}{|K|} \right)^{1/r}$$

と定義する. このときvがαの固定点であることと, $F_{\alpha,r}(v) = 0$は同値である. また,

$$|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) := \max \left\{ \limsup_{u \to v, u \in B} \frac{F_{\alpha,r}(v) - F_{\alpha,r}(u)}{\|v - u\|}, 0 \right\}$$

と定義する. 関数$|\nabla_- F_{\alpha,r}|$は, $F_{\alpha,r}$が最も減る方向への勾配の大きさとみなせる.

定理 1.1. πをΓのBへの線形等長作用とし, rを1以上の実数とする. 線形等長作用πは非自明な固定ベクトルを持たないと仮定する. このとき以下は同値:

(i) 任意の$\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$が固定点を持つ.

(ii) 正定数Cが存在し, 任意の$\alpha \in \mathcal{A}(\pi)$に対して, $F_{\alpha,r}(v) > 0$である任意の$v \in B$が$|\nabla_- F_{\alpha,r}|(v) \geq C$を満たす.

この定理の(i)から(ii)の証明は, Guichardet [Gui72]の方法に基づくものである. 一方, (ii)から(i)を示すには, 関数$F_{\alpha,r}$の凸性が重要である. この$F_{\alpha,r}$の凸性を導くために, Banach空間Bが狭義凸であることを仮定した.

次の章では, この定理のBanach空間Bとして有限生成群Γ上のℓ^p空間をとり, πとしてΓのその空間への正則表現を考える. すると,「Γが性質FL^pを持たないかどうか」を判定するために有用と思われる系が導かれる.

2 定理の ℓ^p 空間への適用

前の節と同様に, Γ を有限生成群とし, K をその有限生成元集合とする. さらに, $p>1$ とし, K は単位元を含まず, $\gamma \in K$ ならば $\gamma^{-1} \in K$ であると仮定する. Lebesgue 空間 $\ell^p(\Gamma)$ とは, 空間が $\{f:\Gamma \to \mathbb{R} \mid \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty\}$ であり, ノルムが $\|f\|_{\ell^p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^p)^{1/p}$ の Banach 空間である.

群 Γ 上の実数値関数からなる空間を $\mathcal{F}(\Gamma)$ と表す. 群 Γ の $\mathcal{F}(\Gamma)$ 上の左正則表現 λ_Γ を, $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ と $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して $\lambda_\Gamma(\gamma)f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ と定義する. この表現 λ_Γ の $\ell^p(\Gamma) \subset \mathcal{F}(\Gamma)$ への制限を $\lambda_{\Gamma,p}$ と表す. 表現 $\lambda_{\Gamma,p}$ は, 非自明な固定ベクトルを持たない Γ の $\ell^p(\Gamma)$ への線形等長作用とみなせる.

関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ に対して, $df(\gamma) := \lambda_\Gamma(\gamma)f - f$ と定義する. 関数 $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ が p-Dirichlet 有限であるとは, すべての $\gamma \in K$ で $df(\gamma) \in \ell^p(\Gamma)$ が成り立つことである. すべての p-Dirichlet 有限関数からなる空間を $D_p(\Gamma)$ と表す. ここで, 空間 $\ell^p(\Gamma)$ は $D_p(\Gamma)$ の線形部分空間である. 空間 $D_p(\Gamma)$ には, $\|f\|_{D_p(\Gamma)} := (\sum_{\gamma\in K} \|df(\gamma)\|^p_{\ell^p(\Gamma)}/|K|)^{1/p}$ でセミノルムを定めることができる.

関数 $f \in D_p(\Gamma)$ の p-ラプラシアン $\Delta_p f$ を,

$$\Delta_p f(x) := \sum_{\gamma\in K} \frac{|df(\gamma)(x)|^{p-2}(df(\gamma)(x))}{|K|}$$

と定義する. 但し, $p \le 2$ のとき, $df(\gamma)(x) = 0$ ならば $|df(\gamma)(x)|^{p-2} = 0$ とする.

Puls [Pul06] による結果から, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ に対して, df_α が α のコサイクル部分となるような $f_\alpha \in D_p(\Gamma)$ が, 定数和を除いて一意に存在することが分かる. この事実を用いて, $|\nabla_- F_{\alpha,p}|$ を計算すると, $F_{\alpha,p}(f) > 0$ を満たす任意の $f \in \ell^p(\Gamma)$ に対して,

$$|\nabla_- F_{\alpha,p}|(f) = \frac{2\|\Delta_p(f-f_\alpha)\|_{\ell^q(\Gamma)}}{\|f-f_\alpha\|^{p-1}_{D_p(\Gamma)}}$$

が成り立つことが分かる. 但し, q は p の共役指数, つまり $q = p/(p-1)$ である. 定理に, この結果と任意の $f \in D_p(\Gamma)$ に対して, df は $\lambda_{\Gamma,p}$-コサイクルであることを用いると, 次の系が導かれる.

系 2.1. 以下は同値:

(i) 任意の $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ が固定点を持つ.

(ii) 正定数 C が存在して, 任意の $f \in D_p(\Gamma)$ が $\|\Delta_p f\|_{\ell^q(\Gamma)} \ge C\|f\|^{p-1}_{D_p(\Gamma)}$ を満たす. 但し, q は p の共役指数である.

ここで, (ii) の条件は, 各アフィン等長作用 $\alpha \in \mathcal{A}(\lambda_{\Gamma,p})$ に依らないものであり, 関数空間 $D_p(\Gamma)$ の性質として言い換えられていることを強調したい. 特に $p=2$ のとき, この系の (ii) は, 線形 2-ラプラス作用素 Δ_2 の $D_2(\Gamma)$ の"内積"に関する非零スペクトルの絶対値の下限の評価を表している. この系から, (ii) の定数 C の下からの評価ができれば, 「Γ が性質 FL^p を持たないかどうか」について判定できる.

参考文献

[CDH10] I. Chatterji, C. Druţu, and F. Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint*, Adv. of Math. **225** (2010), 882 - 921.

[CTV08] Y. de Cornulier, R. Tessera, and A. Valette, *Isometric group actions on Banach spaces and representations vanishing at infinity*, Transform. Groups **13** (2008), no. 1, 125–147.

[Gui72] A. Guichardet, *Sur la cohomologie des groupes topologiques. II*, Bull. Sci. Math. (2) **96** (1972), 305–332.

[Mim] M. Mimura, *Fixed point properties and second bounded cohomology of universal lattices on Banach spaces*, J. reine angew. Math., to appear.

[Pul06] M.J. Puls, *The first L^p-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions*, J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 2, 391–401.

[Yu05] G. Yu, *Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on ℓ^p-spaces*, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), 1144–1151.