

乱流 2 点測度和の統計的特徴¹

気象研究所 毛利英明 (Hideaki Mouri)
Meteorological Research Institute

1. はじめに

乱流の速度成分 $u(x, t)$ を或る時刻 t に或る測線 x 上で測定したとする. 簡単のため平均 $\langle u \rangle$ は差し引いておく. 各スケール r において 2 点測度差 u_- と速度和 u_+ を以下のように定義する:

$$u_-(r, x, t) = u(x+r, t) - u(x, t), \quad (1a)$$

$$u_+(r, x, t) = \frac{u(x+r, t) + u(x, t)}{2}. \quad (1b)$$

巽と吉村 [1] は一様等方乱流における各スケールでの速度和 u_+ の確率密度分布を, 完結仮説を用い理論的に計算した. また細川 [2] は厳密な統計的關係式を得た. 乱流が測線 x の方向に一様な場合, 慣性領域にある小スケールの縦速度が満足する Kolmogorov [3] の 4/5 則

$$\langle u_-^3(r) \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle r \quad (2a)$$

は変換されて

$$\langle u_+^2(r) u_-(r) \rangle = \frac{1}{15} \langle \varepsilon \rangle r. \quad (2b)$$

但し $\langle \cdot \rangle$ は集団平均を示し ε はエネルギー散逸率である. 関係式 (2b) が大気乱流で成立することを Kholmiansky と Tsinober [4] が野外観測から確認している.

速度和 $u_+(r)$ は r の値に関係なくエネルギー保有領域の大スケール運動を代表すると, 一般には考えられている. この場合は関係式 (2b) から, 大スケール運動が慣性領域の小スケール運動に影響することになる. しかし巽と吉村 [1] は速度和 $u_+(r)$ が各スケール r の運動を反映することを示唆する結果を得た. 速度和 u_+ の統計的特徴を理論的および実験的に調べよう.

2. 格子乱流

我々が最近の研究 [5] で得た格子乱流の風洞実験データを用いる. 風洞実験とデータ処理について簡単に説明する.

格子は $0.04 \times 0.04 \text{ m}^2$ の角材を 0.20 m 間隔に配置して作った. 格子から $x_{wt} = 3.5 \text{ m}$ 風下において, 熱線流速計を用い, 縦速度 $U + u(t_{wt})$ と横速度 $v(t_{wt})$ を測定した. U は平均で $u(t_{wt})$ と $v(t_{wt})$ は時間変動である. 格子から $x_{wt} = 3.25 \text{ m}$ と 3.75 m 風下においても縦速度 $U + u(t_{wt})$ を測定した.

¹Résumé of our manuscript available at <http://arxiv.org/abs/1002.1513>.

Taylor の凍結乱流仮説を用い、測定点 x_{wt} における時間変動 $u(t_{wt})$ と $v(t_{wt})$ を時刻 t における空間変動 $u(x)$ と $v(x)$ に変換する:

$$x = -Ut_{wt} \quad \text{and} \quad t = \frac{x_{wt}}{U}. \quad (3)$$

格子乱流は、風洞における時刻 t_{wt} については定常で座標 x_{wt} に伴い減衰するから、座標 x について一様で時刻 t に伴い減衰する。² 特に $x_{wt} = 3.25$ m と 3.75 m での測定データは $x_{wt} = 3.5$ m に対応する時刻における時間変動 $\partial_t \langle u^2 \rangle$ などを評価するのに用いる。

3. 速度和と速度差の統計的關係

乱流が x 方向に一様である場合、速度和 u_+ と速度差 u_- の間に統計的な關係が成立する [2]. 乱流の一様性から得られる關係 $\langle u(x)^n \rangle = \langle u(x+r)^n \rangle$ に定義式 (1) を用いれば

$$\langle u_-^2(r) \rangle = 4\langle u^2 \rangle - 4\langle u_+^2(r) \rangle, \quad (4a)$$

$$\langle u_+(r)u_-(r) \rangle = 0, \quad (4b)$$

$$\langle u_-^3(r) \rangle = -12\langle u_+^2(r)u_-(r) \rangle. \quad (4c)$$

細川 [2] は關係式 (4c) を用いて式 (2b) を式 (2a) から導出した. 同様な關係式が v_+ と v_- の間にも成立する.

統計的關係式 (4) は、一様乱流に限らず等方乱流においても成立している [4]. しかし我々は議論を一様乱流に限定する. 一様乱流は等方乱流に比べ実現しやすい. 例えば、風洞実験は定常状態で行うのが通例である. 得られた時間変動に Taylor の凍結乱流仮説を用いれば、流れ方向に一様な空間変動に変換される [§2].

4. エネルギー収支式

速度和 u_+ を用いて乱流のエネルギー収支が記述できる. 時間 t に伴い減衰する一様等方乱流について、Saffman [7] は以下の厳密な關係式を得た:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{3}{2}\langle u^2 \rangle + \frac{15}{4r^5} \int_0^r \langle u_-^2(R) \rangle R^4 dR \right] = \frac{15\nu}{2r} \frac{\partial \langle u_-^2(r) \rangle}{\partial r} - \frac{5\langle u_-^3(r) \rangle}{4r}. \quad (5a)$$

導出は Landau と Lifshitz の教科書 [8] に詳しい. 式 (5a) に統計的關係式 (4a) と (4c) を代入して左辺を整理すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3}{2}\langle u^2 \rangle - \frac{15}{r^5} \int_0^r \langle u_+^2(R) \rangle R^4 dR \right] = -\frac{30\nu}{r} \frac{\partial \langle u_+^2(r) \rangle}{\partial r} + \frac{15\langle u_+^2(r)u_-(r) \rangle}{r}. \quad (5b)$$

²Taylor 変換から得られるのは仮想空間 x における乱流の空間変動だが、現実的な乱流の空間変動と考えて問題ない. 局所的には、仮想空間における空間変動 $u(x)$ は、風洞において流れ方向に速度 U で移動する座標系で得られる空間変動と一致する. こうした局所的な空間変動を連続的に接続して、仮想空間全体における空間変動が構成されるのである [6].

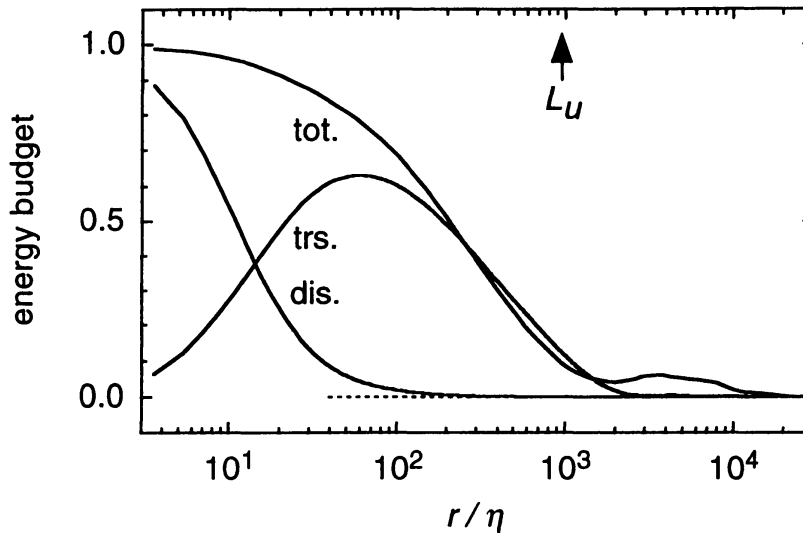


図 1: 格子乱流におけるエネルギー収支式 (6) の左辺 (tot.), 右辺第 1 項 (dis), 第 2 項 (trs). 各項を平均エネルギー散逸率 $\langle \varepsilon \rangle$ で規格化した. 横軸は Kolmogorov 長 η で規格化したスケール r . 矢印は縦速度の積分長 L_u を示す.

つまり速度和 u_+ は各スケールで厳密な関係式を満足する. 速度和 u_+ が大スケール運動のみを代表する場合, こうした関係式は存在しない. 速度和 $u_+(r)$ は各スケール r の運動を反映するのである [1].

関係式 (5a) と (5b) の意味を明確にするため, 極限 $r \rightarrow \infty$ における漸近式 $\langle u(x+r)u(x) \rangle \rightarrow 0$ から得られる関係

$$\frac{3}{2}\langle u^2 \rangle = \frac{15}{4r^5} \int_0^r \langle u_-^2(R) \rangle R^4 dR \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{15}{r^5} \int_0^r \langle u_+^2(R) \rangle R^4 dR \Big|_{r \rightarrow \infty}$$

を利用し書き換えを行う. 結果は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{15}{4r^5} \int_0^r \langle u_-^2(R) \rangle R^4 dR \Big|_{r \rightarrow \infty} + \frac{15}{4r^5} \int_0^r \langle u_-^2(R) \rangle R^4 dR \right] = \frac{15\nu}{2r} \frac{\partial \langle u_-^2(r) \rangle}{\partial r} - \frac{5\langle u_-^3(r) \rangle}{4r}, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{15}{r^5} \int_0^r \langle u_+^2(R) \rangle R^4 dR \Big|_{r \rightarrow \infty} - \frac{15}{r^5} \int_0^r \langle u_+^2(R) \rangle R^4 dR \right] = -\frac{30\nu}{r} \frac{\partial \langle u_+^2(r) \rangle}{\partial r} + \frac{15\langle u_+^2(r)u_-(r) \rangle}{r}. \quad (6b)$$

式 (6a) は運動エネルギー u_-^2 の収支を記述し, 式 (6b) は運動エネルギー u_+^2 の収支を記述する. 両式の左辺は $\geq r$ において失われる全運動エネルギーである. 極限 $r \rightarrow 0$ で $-3\partial_t \langle u^2 \rangle / 2 = \langle \varepsilon \rangle$ に漸近し極限 $r \rightarrow \infty$ で 0 に漸近する. 右辺第 1 項は $\geq r$ において熱に散逸する運動エネルギーである. 極限 $r \rightarrow 0$ で $15\nu \langle (\partial_x u)^2 \rangle = \langle \varepsilon \rangle$ に漸近し極限 $r \rightarrow \infty$ で 0 に漸近する. 右辺第 2 項は r の大スケール側から小スケール側に輸送される運動エネルギーである. 特に式 (6b) では $\langle u_+^2(r)u_-(r) \rangle$ から解るように, 運動エネルギー u_+^2 は u_- との相互作用を介して輸送されている.

エネルギー収支式 (6a) と (6b) の対応する各項は, 各スケール r で正確に同じ値となる. つまり両式は同じエネルギー収支の異なる記述である. 図 1 に格子乱流で得られたエネルギー収支を示す.

乱流一般でのエネルギー収支について

乱流の大スケール運動は一般に等方ではない。しかし乱流が十分に発達している場合、散逸領域や慣性領域の小スケール運動は局所的に等方である。こうした小スケールにおけるエネルギー収支は、式 (6a) の左辺を書き換えて [3]

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{15\nu}{2r} \frac{\partial \langle u_-^2(r) \rangle}{\partial r} - \frac{5 \langle u_-^3(r) \rangle}{4r}. \quad (7a)$$

乱流が x 方向に一様である場合、式 (6b) の左辺も同様な書き換えが出来る

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{30\nu}{r} \frac{\partial \langle u_+^2(r) \rangle}{\partial r} + \frac{15 \langle u_+^2(r) u_-(r) \rangle}{r}. \quad (7b)$$

両式は大スケール運動に関係なく成立する。慣性領域において式 (7a) と (7b) の右辺は第 2 項が卓越している。これらエネルギー輸送項は式 (2a) と (2b) に対応する。つまり Kolmogorov の 4/5 則 (2a) は運動エネルギー u_-^2 の輸送に対応し [式 (7a)], 細川の関係式 (2b) は運動エネルギー u_+^2 の輸送に対応している [式 (7b)].

5. 速度和の物理的意味

速度差 $u_-(r)$ と $v_-(r)$ が各スケール r の運動を代表するのは良く知られている。厳密には $< r$ の運動も速度差に寄与するが、 r が大きくない場合は無視して問題ない。これに対し速度和 $u_+(r)$ と $v_+(r)$ はスケール $\geq r$ の運動を代表すると仮定できる。つまり速度和 $u_+(r)$ と $v_+(r)$ は大スケール運動の影響を強く受けるが、各スケール r の運動を反映する。特に $u_+^2(r)$ と $u_-(r)$ の相関 [式 (4c)] は各スケール r の運動を介し成立している。極限 $r \rightarrow 0$ において速度和 $u_+(r)$ と $v_+(r)$ は 1 点速度 u と v に収束し、全スケールの運動を代表するようになる。

この仮定を確認するため、格子乱流で $\langle u_+^2(r) \rangle$ を $\langle \bar{u}^2(r) \rangle$ と比較する。但し \bar{u} はスケール r で平滑化した速度である。³

$$\bar{u}(r, x, t) = \frac{1}{r} \int_x^{x+r} u(X, t) dX. \quad (8)$$

結果を図 2(a) に示す。積分長 L_u 以下のスケール r で $\langle u_+^2(r) \rangle$ と $\langle \bar{u}^2(r) \rangle$ は等しい。この領域において速度和 $u_+(r)$ はスケール $\geq r$ の運動を代表している。積分長 L_u 以上のスケール r では $< r$ の運動が無視できず $\langle u_+^2(r) \rangle$ は $\langle u_-^2(r) \rangle$ と同様に一定値に漸近する。

現象論的には、速度差 $u_-(r)$ と $v_-(r)$ は直径 r の渦の変形運動あるいは回転運動と解釈される。同様に速度和 $u_+(r)$ と $v_+(r)$ は直径 r の渦の並進運動と解釈できる。直径 r の渦の並進運動は直径 $\geq r$ の渦の変形運動や回転運動の重ね合わせで決まるが、速度差 $u_-(r)$ と $v_-(r)$ が各スケール r の運動を代表し速度和 $u_+(r)$ と $v_+(r)$ がスケール $\geq r$ の運動を代表するのと矛盾しない。

³定義式 (8) はスケール $\geq r$ の運動の定義でもある。運動のスケールについては多様な定義が可能だが、我々が採用した定義は正規直交 wavelet 変換のひとつである Haar 変換の定義と同一である [9]。実際、Haar 変換の変換係数は速度差や速度和と対応関係にある。

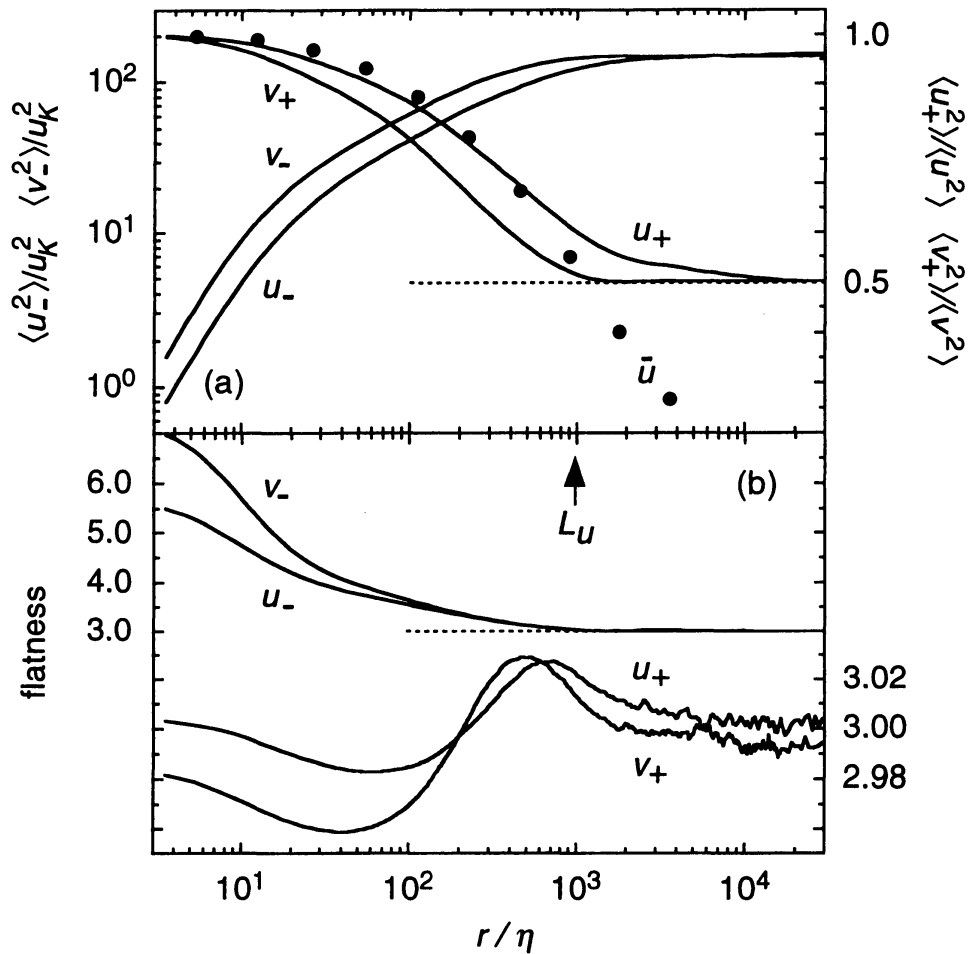


図 2: 格子乱流におけるモーメント。横軸は Kolmogorov 長 η で規格化したスケール r 。(a) $\langle u_+^2 \rangle / \langle u^2 \rangle$, $\langle v_+^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$, $\langle u_-^2 \rangle / u_K^2$, $\langle v_-^2 \rangle / u_K^2$ 。ここで u_K は Kolmogorov 速度。黒丸は $\langle \bar{u}^2 \rangle / \langle u^2 \rangle$ 。(b) $\langle u_+^4 \rangle / \langle u_+^2 \rangle^2$, $\langle v_+^4 \rangle / \langle v_+^2 \rangle^2$, $\langle u_-^4 \rangle / \langle u_-^2 \rangle^2$, $\langle v_-^4 \rangle / \langle v_-^2 \rangle^2$ 。矢印は縦速度の積分長 L_u を示す。

エネルギー輸送項の現象論的解釈について

エネルギー収支式 (6a) と (7a) の輸送項 $-5\langle u_-^3(r) \rangle / 4r$ は、現象論的には、直径 r の渦の変形運動エネルギー $\langle u_-^2(r) \rangle$ の輸送を記述する。時間スケールは渦の寿命 $r / \langle u_-^2(r) \rangle^{1/2}$ である。同様に式 (6b) と (7b) の輸送項 $15\langle u_+^2(r) u_-(r) \rangle / r$ は渦の並進運動エネルギー $\langle u_+^2(r) \rangle$ の輸送を記述すると解釈できる。時間スケールは再び $r / \langle u_-^2(r) \rangle^{1/2}$ である。つまり渦の変形に伴い、変形運動エネルギー $\langle u_-^2(r) \rangle$ だけでなく並進運動エネルギー $\langle u_+^2(r) \rangle$ も小スケール側に輸送される。なお $-5\langle u_-^3(r) \rangle / 4r$ と $15\langle u_+^2(r) u_-(r) \rangle / r$ は正確に同じ値をとるから、各スケール r に対応する渦の全集合を考える場合、変形運動エネルギーの輸送と並進運動エネルギーの輸送は等価となる。

6. 速度和モーメントの振舞

速度和は速度差とは異質な表現だから、従来の速度差を用いた研究で見落としていた乱流の特性が見出される可能性がある。格子乱流の風洞実験データを用い、速度和モーメント $\langle u_+^n(r) \rangle$ と $\langle v_+^n(r) \rangle$ のスケール依存性を調べる。

格子乱流の2次モーメント $\langle u_+^2(r) \rangle$ と $\langle u_-^2(r) \rangle$ を図2(a)に示す。スケール r が減少すると $\langle u_-^2(r) \rangle$ も減少する。これに対し $\langle u_+^2(r) \rangle$ は $\langle u^2 \rangle / 2$ から $\langle u^2 \rangle$ に増大する [1]。同様な振舞が $\langle v_+^2(r) \rangle$ と $\langle v_-^2(r) \rangle$ にも見出される。速度和モーメント $\langle u_+^n(r) \rangle$ と $\langle v_+^n(r) \rangle$ は変動する範囲が狭く速度差モーメント $\langle u_-^n(r) \rangle \propto r^{\zeta_n}$ のような冪則を示さない。つまり速度和モーメントは速度差モーメントと異質なスケール依存性を持つのである。

格子乱流の速度和3次モーメント $\langle u_+^3(r) \rangle$ はスケール r に伴い変動するが、普遍的な振舞ではない。完全に等方な乱流では全スケールにおいて $\langle u_+^3(r) \rangle = 0$ となる。つまり速度和モーメントのスケール依存性は大スケール運動の影響を強く受けるのである。

格子乱流の2次モーメントと4次モーメントから尖度を評価して図2(b)に示す。速度差の尖度はスケール r が減少すると間欠性を反映して増大する。これに対し速度和の尖度は3に近い値で $\pm 1\%$ 程度しか変動しない。同様な結果を大気乱流の野外観測から Sreenivasan と Dhruva [10] が得ている。速度和が大スケール運動の影響を強く受けるのが理由である。実際、極限 $r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ における漸近的な振舞は

$$\frac{\langle u_+^4(r) \rangle}{\langle u_+^2(r) \rangle^2} \rightarrow \frac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2} \quad \text{as } r \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \frac{\langle u_+^4(r) \rangle}{\langle u_+^2(r) \rangle^2} \rightarrow \frac{\langle u^4 \rangle}{2\langle u^2 \rangle^2} + \frac{3}{2} \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

両漸近値は $\langle u^4 \rangle / \langle u^2 \rangle^2 = 3$ の場合に等しいが、この条件を格子乱流は良く満足している。風洞実験データは長大なため、より詳細な解析も可能である。図2(b)から速度和の尖度がスケール r に伴い変動することが解る。最大値は $r \simeq L_u$ にあり最小値は $r \simeq L_u/10$ にある。同様な変動を境界層乱流や噴流でも確認した。⁴

7. おわりに

速度差 $u_-(r)$ と $v_-(r)$ が各スケール r での運動を代表するのに対し、速度和 $u_+(r)$ と $v_+(r)$ はスケール $\geq r$ の運動を代表する。現象論的には、速度差が渦の変形運動や回転運動を代表するのに対し、速度和は渦の並進運動を代表する。つまり速度和は速度差と密接に関係するが、異質な表現なのである。

⁴現象論的には、縦速度和 u_+ の尖度の変動は以下のように解釈できる。スケール r が十分に小さい場合、 $u_+(r)$ は直径 r の渦の並進運動を代表し、直径 $\gtrsim r$ の渦の変形運動の重ね合わせで決まる。変形運動の方向が揃う場合、 u_+ の値は確率密度分布の裾に位置する。スケール r が増大すると、直径 $\lesssim r$ の渦が寄与しないから上述の裾は短くなり、尖度は減少する。さらにスケール r が増大すると、直径 $\gtrsim r$ の渦が少なくなり、 $u_+ \simeq 0$ の確率密度が上昇し、尖度は増大する。スケール r が相関長 L_u つまりエネルギー保有渦の直径を超えると、こうした渦の乱雑な相対運動が縦速度和 u_+ の値を決め、尖度は正規分布での値3に近づく [式(9)]。横速度和 v_+ についても同様な解釈が可能である。

巽と吉村 [1] は速度和 $u_+(r)$ と速度差 $u_-(r)$ が各スケール r で統計的に独立とする完結仮説を提案した。現象論的には、渦の並進運動 u_+ と変形運動 u_- が統計的に独立だと仮定した訳である。この仮定は多くの場合に成立するが [式 (4b)], 重要な例外は u_+^2 と u_- の相関で [式 (4c)], 運動エネルギー u_+^2 の輸送において速度差 u_- が重要な働きを担うことに対応している [式 (6b)].

速度和は大スケール運動のみの指標でないことに注意されたい。乱流の小スケール運動が大スケール運動の影響を受けるかどうか議論が続いているが [10], 小スケール r における速度差 $u_-(r)$ と比較する大スケール運動の指標として, 速度和 $u_+(r)$ や 1 点速度 u が利用される場合がある。実際にはスケール $\geq r$ の運動を代表するから, 速度和 $u_+(r)$ が小スケール r の運動を介して速度差 $u_-(r)$ と相関を持つ可能性がある [式 (4c)]. 1 点速度 u も極限 $r \rightarrow 0$ における $u_+(r)$ に対応するから, 速度差 $u_-(r)$ と相関を持つ可能性がある。これらの相関は比較の趣旨とは異なる。特に慣性領域におけるエネルギー輸送率 $-5\langle u_-^3(r) \rangle / 4r = 15\langle u_+^2(r)u_-(r) \rangle / r$ は大スケール運動の影響を受けていない。

速度和は速度差とは異質な運動の表現だから, 従来の研究で見落としていた乱流の特性が見出される可能性が高い。よって今後とも速度和の研究は有望である。

参考文献

- [1] T. Tatsumi and T. Yoshimura, *Fluid Dyn. Res.* **35**, 123 (2004); **39**, 221 (2007).
- [2] I. Hosokawa, *Prog. Theor. Phys.* **118**, 169 (2007).
- [3] A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 16 (1941).
- [4] M. Kholmyansky and A. Tsinober, *Phys. Fluids* **20**, 041704 (2008).
- [5] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka, *Phys. Fluids* **21**, 065107 (2009).
- [6] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima, *Phys. Fluids* **18**, 015103 (2006).
- [7] P. G. Saffman, in *Topics in Nonlinear Physics*, edited by N. J. Zabusky (Springer, New York, 1968), p. 485.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, 1959), Chap. 3. 和訳は流体力学 (東京図書, 1970), 第 1 巻 第 3 章.
- [9] H. Mouri, H. Kubotani, T. Fujitani, H. Niino, and M. Takaoka, *J. Fluid Mech.* **389**, 229 (1999).
- [10] K. R. Sreenivasan and B. Dhruva, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **130**, 103 (1998).