数理解析研究所講究録
第 1723 巻 2011 年 1-22

経路積分入門 —経路積分，虚数時間の場合も—

(Introduction to Path Integral — Path Integral in Imaginary-Time as Well —)

一瀬　孝 (Takashi ICHINOSE)*

目次

§1. 経路積分とは？
§2. 如何に数学にするか
§3. 有限次元積分による近似
§4. 数学的な可算加法的な測度の構成
§5. もっと，虚数時間経路積分について
　§5.1. 指数積公式近似（再訪）
　§5.2. 虚数時間相対論的 Schrödinger 方程式
§6. スリット実験からもう一度「経路積分」のアイディアをみる

概要

Feynman による，量子力学の別の定式化を与える経路積分のアイディアを説明し，そのいくつかの数学的なアプローチについて概説する．

§1. 経路積分とは？

そもそも，積分とは，微小なものを集めて (統合して) something new を創る操作であり，ときには思いがけないものができる．**経路積分 (path integral)** は，量子力学の別の定式化を与えるファインマン (R. P. Feynman) による発明である (Princeton Thesis 1942 [F1], 1948 論文 [F2] として出版).

2000 Mathematics Subject Classification(s): 81S40, 58D30, 47D06, 41A80, 35J10
キーワード: path integral; exponential product formulas; construction of fundamental solutions/propagators for Schrödinger and Dirac equations.
*金沢大学・名誉教授.

それは，**経路** (**path**) $X\colon [0,t]\ni s\mapsto X(s)\in\mathbf{R}^N$ に関する線積分 $\int_0^t A(X(s))dX(s)$ のことではない．経路積分をあっさり書いてしまうと，

$$\int e^{(i/\hbar)S(X)}\mathcal{D}[X], \qquad \int e^{(i/\hbar)S(\phi)}\mathcal{D}[\phi]$$

という‘積分’である．この内，後者では，経路の代わりに，より一般の時空 $\mathbf{R}^d$ で定義された**場** (**field**) と呼ばれる実数 (複素数) 値ベクトル関数達 $\phi\colon \mathbf{R}^d\ni x\mapsto\phi(x)\in\mathbf{R}^N$or $\mathbf{C}^N$ を考え，**汎関数積分** (**functional integral**) という．$S(X), S(\phi)$ は**作用** (**action**) と呼ばれ，それぞれ，ラグランジュアン $L(X)$, ラグランジュアン密度 $\mathcal{L}(\phi)$ の積分

$$S(X)=\int_0^t L(X(s))ds,\quad S(\phi)=\int\mathcal{L}(\phi(x))dx,$$

である．$\mathcal{D}[X], \mathcal{D}[\phi]$ はこれらの経路達，関数達の空間 $\{X\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}^N\}, \{\phi\colon\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^N\}$ 上のある‘測度’である．‘積分’，‘測度’と引用符‘ ’が付くのは，$\mathcal{D}[\phi]$ が数学的な測度と言えるかの問題があり，この‘測度’による‘積分’はさしあたって，すべての関数 ϕ 達に渡って‘足しあげる’程度のことと理解すればよい．

量子力学のときは，簡単のために，$d=1, N=3$ とし，この 1 次元空間は時間パラメータとみると，$\phi\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ は 3 次元空間の中の**経路** (path) になるので，この $\phi(\cdot)$ をあらためて $X(\cdot)$ と書くことにする．3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の中をポテンシャル $V(x)$ のもとに運動する質量 m の粒子 (例えば電子) に対する非相対論的 Schrödinger 方程式

(1.1)
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(x)]\psi(t,x),\quad t>s,\ x\in\mathbf{R}^3,$$

を考えよう ($\hbar=h/(2\pi)$ ($h>0$: Planck 定数))．時刻 s での初期値 $\psi(s,x)=f(x)$ のときの解 $\psi(t,x)=\int K(t,x;s,y)f(y)dy$ の積分核 $K(t,x;s,y)$ を**基本解** (**fundamental solution**), または，**プロパゲイター** (**propagator**) と言う．$K(t,x;s,y)$ を Feynman は物理的仮設から次のように書き下した:

(1.2)
$$K(t,x;s,y)=\int_{\{X:X(s)=y,X(t)=x\}}e^{iS(X)/\hbar}\mathcal{D}[X].$$

ここで，$S(X)$ は経路 $X\colon[s,t]\to\mathbf{R}^3$ に対する作用，いま考えている場合には，

(1.3)
$$S(X)=\int_s^t[\frac{m}{2}\dot{X}(\tau)^2-V(X(\tau))]d\tau,\quad \dot{X}(\tau)=\frac{d}{d\tau}X(\tau)$$

である．$\mathcal{D}[X]$ は時刻 s に空間の位置 y を出発し時刻 t に空間の位置 x に至る経路 $X(\cdot)$ 全体 (図 1 参照) の空間上の一様‘測度’であり，形式的には，連続無限個の直積

$$\mathcal{D}[X]:=\text{constant}\times\prod_{s\le\tau\le t}dX(\tau),\quad dX(\tau): \tau\text{ ごとに }\mathbf{R}^3\text{ 上のルベーグ測度},$$

と考えられる．この constant をやや意味不明のまま無理やり書くと，

$$\text{constant}=\prod_{s\le\tau\le t}\Big(\frac{m}{2\pi i\hbar d\tau}\Big)^{3/2}$$

となる．この (1.2) の右辺が **Feynman 経路積分**である．

Feynmanの置いた(1.2)の導出のための，または，(1.2)と同値な物理的仮設は次である([F1], [F2], [F3]):

(i) $K(t,x;s,y)$ は，粒子が時刻 s に空間の位置 y を出発し時刻 t に空間の位置 x に至ると云う事象に対する**全確率振幅**を意味する．それは個々の経路 $X(\cdot)$ ごとの事象に対する確率振幅 $\varphi[X]$ の和であるとする：

(1.4) $$K(t,x;s,y) = \sum_{X:X(s)=y,X(t)=x} \varphi[X].$$

(ii) 各経路 $X(\cdot)$ からの寄与 $\varphi[X]$ は

(1.5) $$\varphi[X] = Ce^{iS(X)/\hbar}$$

とする．C は経路 $X(\cdot)$ に無関係な定数である．

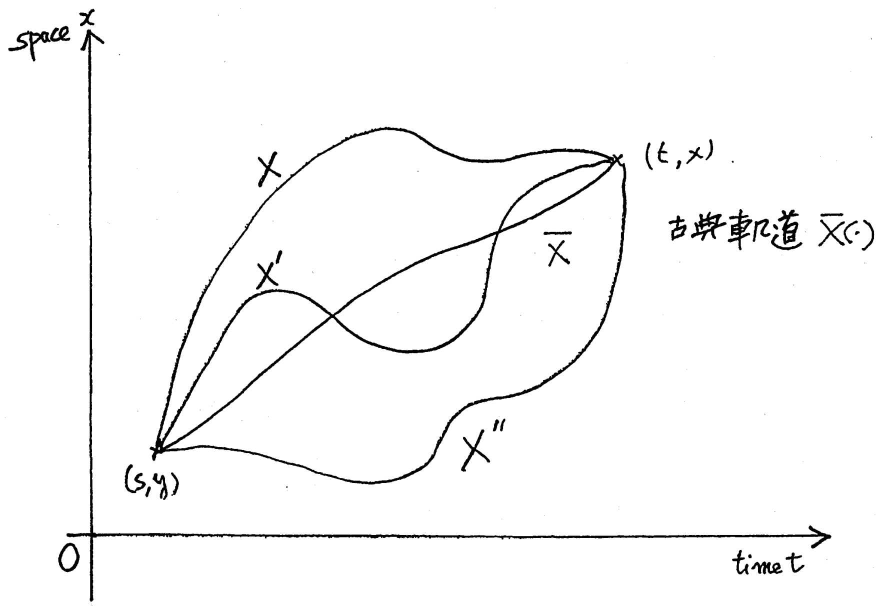

図 1. (s,y) と (t,x) とを結ぶ経路達

Feynmanは，この仮設(i),(ii)をDirac[D1,2]の記述に示唆されたものであるが，Diracのそれとは少し異なるが極めて近いので，ある文献では(1.2)をDirac–Feynman積分と呼んでいるものもある．

量子力学では，各経路 $X(\cdot)$ は平等に同じ大きさ（絶対値）で全確率振幅 $K(t,x;s,y)$ に寄与するという民主主義の原理に従い，経路ごとの個性はその位相（偏角）の違いで表されていると言える．この点で古典力学は民主主義の原理に従っていない．粒子は時空の2点 $(s,y),(t,x)$ を結ぶ作用 $S(X)$ を最小にする特別な経路，即ち，**古典軌道 (classical trajectory)** $\bar{X}(\cdot)$ に沿って運動するからである．$t-s$ が小さければ $\bar{X}(\cdot)$ は唯一つだけ存在し，$S(t,x;s,y) \equiv S(\bar{X})$ は t,s,x,y の関数になる．話をもとに戻すと，このようなすべての経路 $X(\cdot)$ の空間上の一様‘測度’ $\mathcal{D}[X]$

があったとして，(1.6) をもっともらしく和を積分に置き変えて書き直したものが (1.2) である．ラグランジュアンを通して，古典力学との対応が見えるようになっていることがこれらの‘式’の顕著なところである．

Feynman は，$K(t,x;s,y)$ を規格化も考慮して次のような時間分割近似 (折線)

$$(1.6)\qquad \frac{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^{3(n-1)}} \exp\Big[\frac{it}{\hbar n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{m}{2}\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{t/n}\Big)^2 - V(x_k)\Big)\Big]dx_1\cdots dx_{n-1}}{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^{3(n-1)}} \exp\Big[\frac{it}{\hbar n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{m}{2}\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{t/n}\Big)^2\Big]dx_1\cdots dx_{n-1}}$$

の $n\to\infty$ ときの極限として定義した．ただし，時間区間 $[s,t]$ を $s=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$, $t_k-t_{k-1}=t/n$, と n 等分して，経路 X の各時刻 $t_k (k=0,1,2,\ldots,n)$ での位置を $x_k:=X(t_k)$, $x_0=y$, $x_n=x$, とおいた．

勿論 Feynman は，このように時間分割近似の極限として定義した $K(t,x;s,y)$ がシュレーディンガー方程式 (1.1) を満たすことを示していることは言うまでもない．

一般的な参考文献

[F1] Feynman's Thesis – A New Approach to Quantum Theory, L. M. Brown 編, World Sci. 2005 [Feynman の学位論文の他に, [F2],[D1] も一緒に収録の一冊].

[F2] R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, **20** (1948), 367–387.

[F3] R. P. Feynman and A. P. Hibbs: Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill 1965 [和訳:「量子力学と経路積分」, 北原訳, みすず書房].

[D1] P. A. M. Dirac: The Lagrangian in quantum mechanics, *Physik. Zeits. Sowjetunion*, **3** (1933), 64–72.

[D2] P. A. M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press, Oxford, 2nd ed. 1935, pp.124–126.

[GY] I. M. Gelfand and A. M. Yaglom: Integration in Functional spaces and its applications in quantum physics, *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 48–69.

[I1] 一瀬 孝:

(1) Path Integral 入門, 数理物理への誘い (江沢 洋 編), 遊星社 1986, pp. 88–110;

(2) 経路積分 — 解析学の立場から, 数学の未解決問題, 21 世紀数学への序章, サイエンス社 2003, pp.72–80;

(3) 経路積分, 数理科学 2007 年 4 月号特集: 現代数学はいかに使われているか [解析編], サイエンス社 2008, pp.32–38.

尚，本稿は，題を「経路積分入門」としたこともあり，§5，§6 以外の節は以前の拙稿 [I1] と重複するところがあることをお断りしておく．

§2. 如何に数学にするか

式 (1.2) による経路積分のアイディアを如何に数学的厳密に実現するか．色々な観点からの工夫をこらしたアプローチがある．先ず，

(a) 有限次元積分による近似

(b) 経路の空間上の可算加法的な測度の構成

がある．これらについては，節を改めて次節以降に [(a) は §3 で，(b) は §4] 述べ，この節の以下では，(a), (b) とは異なるその他のアプローチ (c), (d), (e) 及び (f) について少し触れておく．それらは，有限次元積分による近似ではなく，また，経路の空間上の可算加法的な測度を構成できる訳でもない．(f) は'積分'というよりは他とは別種の何か代数的な表現記号のようである．

(c) Infinite-dimensional oscillatory 'integral': 有限次元 Euclid 空間上の Fresnel 積分

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{\frac{i}{2}|x|^2} e^{ix\cdot y} dx = (2\pi i)^{d/2} e^{-i\frac{1}{2}|y|^2}$$

を無限次元可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上連続関数 $f(x), x \in \mathcal{H}$, であって，$\mathcal{H}$ 上の複素有界測度の Fourier 変換 μ $[f(x) = \int_{\mathcal{H}} e^{i(x,y)} d\mu(x)]$ で与えられるものに対する'積分'として導入された（この意味で）一般化された Fresnel'積分'

$$\widetilde{\int_{\mathcal{H}}} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2} f(x) dx := \int_{\mathcal{H}} e^{-\frac{i}{2}\|x\|^2} d\mu(x)$$

を用いて考察したもので，次を参照されたい．

[AHK] S. A. Albeverio and R. I. Hϕegh-Krohn: Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, *Lect. Notes in Math.* No. **523** (1976);

[AHK-M] S. A. Albeverio and R. I. Hϕegh-Krohn and S. Mazzucchi, 2nd and enlarged ed. 2008.

(d) Path integral by white noise approach: Brown 運動の微分である white noise の空間上の汎関数とみて考察したもので，次を参照されたい．

[SH] L. Streit and T. Hida: Generalized Brownian functionals and Feynman integrals, *Stochastic Process. Appl.* **16** (1983), 55–69.

(e) Coherent state path integral: phase space の変数に係わる coherent state propagator なるものの経路積分的表示や，また， Wiener 測度 regularization による方法な等を考察したもので，著者による極く最近出版された次のモノグラフを参照されたい．

[Kl] J. R. Klauder: A Modern Approach to Functional Integration, Birkhäuser/Springer, Fall 2010.

(f) Grassmann number path integral：これまでの経路積分はすべて Bose 粒子に関するものであったが，Fermi 粒子に関する経路積分である．これについては，例えば次をみられたい．

[Fa] L. D. Faddeev: Introduction to functional method, *Methods in Field Theory*, Les Houches, Ecole d'été de Physique Théorique, Session XXVIII (1975).

§3. 有限次元積分による近似

前節 §2 の (a) の有限次元積分による近似，または，経路積分の時間分割近似法について述べる．一口に一般の経路 $X(\cdot)$ を時間分割近似すると言ってその仕方に色々ある（図 2 参照）．

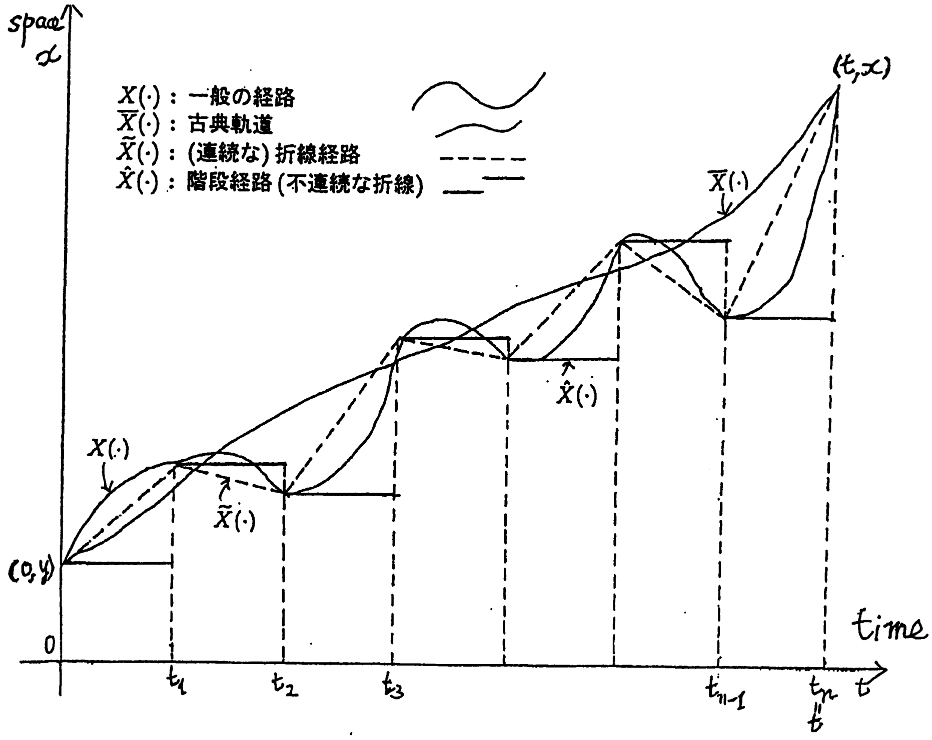

図 2. $(0,y)$ と (t,x) とを結ぶ時間分割近似経路達

簡単のために，一般性を失うことなく $s=0$ として時間区間 $[0,t]$ を考え，時刻 $t=0$ に空間の位置 y を出発し時刻 t に空間の位置 x に至る任意の経路 $X(\cdot)$ をとる．$[0,t]$ を n 個の小区間に分割 (簡単のために n 等分):

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=t, \tag{3.1}$$

$[t_j-t_{j-1}=t/n,\ 1\leq j\leq n]$ して，$X(t_j)=x_j(j=0,2,\ldots,n; X(0)=x_0\equiv y, X(t)=x_n\equiv x)$ とおき，各小区間 $[t_{j-1},t_j]$ 上の経路 $X(\cdot)$ の部分を適当な近似曲線で置き換えれば区間 $[0,t]$ 上の時間分割近似経路 $X_n(\cdot)$ が得られる．例えば，各小区間 $[t_{j-1},t_j]$ で定数とすれば **（不連続な）階段経路** $\hat{X}(\cdot)$ が得られ，時空の 2 点 $(t_{j-1},x_{j-1}),(t_j,x_j)$ を結べば **（連続な）折線経路** $\widetilde{X}(\cdot)$ が得られる．また，これらの小区間 $[t_{j-1},t_j]$ 上の経路 $X(\cdot)$ の部分を古典軌道に置き換えれば**区分的古典軌道 (piecewise classical trajectory)** が得られる．経路として最初に古典軌道 (classical trajectory) $\overline{X}(\cdot)$ をとって区分的古典軌道を作れば，もし区間 $[0,t]$ の幅 t が十分小さければ，勿論それは古典軌道自身と一致する．

さて，空間$\mathbf{R}^3$上のSchrödinger作用素$H=-\frac{1}{2}\Delta+V$に対するUnitary群e^{-itH}，または，その積分核である基本解$K(t,x;0,y)$を求めたい．以下では，記号の簡単化のために，$m=\hbar=1$とおく．そのために，1つの時間分割近似経路$X_n(\cdot)$と(1.3)から$S_n(X):=S(X_n)$として，式(1.2)の近似と思える有限な$3(n-1)$次元 積分

$$K_n(t,x;0,y):=\frac{1}{(2\pi i\frac{t}{n})^{3(n-1)/2}}\overbrace{\int_{\mathbf{R}^3}\cdots\int_{\mathbf{R}^3}}^{(n-1)\text{ times}} e^{iS_n(X)}\prod_{j=1}^{n-1}dX(t_j) \tag{3.2}$$

を考える．$n\to\infty$のとき， 収束

$$K_n(t,x;0,y)\longrightarrow K(t,x;0,y),\qquad (x,y)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3, \tag{3.3}$$

が言えないか，と考えるのである．

時間分割近似経路の取り方により，次の色々な方法がある．

(a1) E. Nelson (1964) による指数積公式による方法．

(a2) 藤原，藤原・熊ノ郷による時間分割近似として，特に，区分的古典軌道，及び，(連続な) 折線を用い，大きな次元のEuclid空間におけるstaitinary phase methodを用いた方法．

(a3) K. Itô (1967) は，有限traceを持つcovariance operatorのGauss測度達による近似によって，trace無限大の極限として目標の経路‘積分’を得た:

[It] K. Itô: Generalized uniform complex measures in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman integral, *Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability* (Berkeley, Calif. 1965/66), Vol.II, Part 1, 1967, pp.145–161.

(a4) 時間分割近似による他にも多くあるが，次の２つを挙げておく:

[Tr] A. Truman: The polygonal path formulation of the Feynman path integral, Feynman Path Integral, *Springer Lect. Notes in Phys.* No. **106** (1979), pp. 73–102.

[CS] R. H. Cameron and D. A. Storvick: A simple definition of the Feynman path integral, with application, *Memoirs Amer. Math. Soc.* No. **288** (1983).

ここでは，特に，(a1)について少し述べ，その関連で(a2)に言及する．

(a1), (a2): Nelsonによる指数積公式 (Trotter積公式，Trotter–Kato積公式) を用いる，経路積分の数学的な意味付けと存在を与える最も簡単な方法である．

[N] E. Nelson: Feynman integrals and the Schrödinger equation, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 332–343.

(1.3)の作用$S(X)$の近似のために，運動エネルギー部分$\int_0^t\frac{\dot{X}(\tau)^2}{2}d\tau$の近似には（連続な）折線軌道$\widetilde{X}_n(\cdot)$を，ポテンシャルエネルギー部分$\int_0^t V(X(\tau))d\tau$には（不連続な）階段経路$\hat{X}_n(\cdot)$を

用いると，

$$S_n^{\sim\wedge}(X) \equiv S(\tilde{X}/\hat{X}_n) := \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{X(t_j)-X(t_{j-1})}{t/n}\right)^2 - V(X(t_{j-1}))\right]\frac{t}{n} \tag{3.4}$$

となり，対応する $K_n^{\sim\wedge}(t,x;0,y)$ は

$$K_n^{\sim\wedge}(t,x;0,y) := \overbrace{\int_{\mathbf{R}^3}\cdots\int_{\mathbf{R}^3}}^{(n-1)\text{ times}} e^{i\sum_{j=1}^{n}\frac{t}{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{t/n}\right)^2 - V(x_{j-1})\right]}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{dx_k}{(2\pi i\frac{t}{n})^{3/2}} \tag{3.5}$$

となる．この右辺を，例えば $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ に作用させると，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^3} K_n^{\sim\wedge}(t,x;0,y)f(y)dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\frac{t}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{t/n}\right)^2} e^{-i\frac{t}{n}V(x_{n-1})}\frac{dx_{n-1}}{(2\pi i\frac{t}{n})^{3/2}}\int_{\mathbf{R}^3}\cdots\cdots \\
&\times \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\frac{t}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{t/n}\right)^2} e^{-i\frac{t}{n}V(x_1)}\frac{dx_1}{(2\pi i\frac{t}{n})^{3/2}}\int_{\mathbf{R}^3} e^{i\frac{t}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-x_0}{t/n}\right)^2} e^{-i\frac{t}{n}V(x_0)}f(x_0)\frac{dx_0}{(2\pi i\frac{t}{n})^{3/2}},
\end{aligned}$$

となり（$x = x_n$），作用素の積 $[e^{i(t/n)\frac{1}{2}\Delta}e^{-i(t/n)V}]^n$ の積分核になっていることが分る．

指数積公式 (Trotter 積公式，Trotter–Kato 積公式): A, B を Hilbert 空間上の自己共役作用素で，作用素和 $A+B$ が本質的自己共役とすると，次が成り立つ（ただし，(3.7) では更に A, B は共に下に有界と仮定する）：

$$e^{-it(A+B)} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}[e^{-i(t/n)A}e^{-i(t/n)B}]^n \text{ (Unitary case)}, \tag{3.6}$$

$$e^{-t(A+B)} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}[e^{-(t/n)A}e^{-(t/n)B}]^n \text{ (Selfadjoint case)}. \tag{3.7}$$

注意. (3.7) の方は２次形式和 $A\dot{+}B$ でも成立ち，**Trotter–Kato 積公式**と言う．

従って，この (3.6) を用いると，作用素 $[e^{i(t/n)\frac{1}{2}\Delta}e^{-i(t/n)V}]^n$ は作用素 e^{-itH} に $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上強収束することが従い，この意味で (3.3) が言えたことになる．

(a2) より精密な時間分割近似 [Fujiwara 1979, Fujiwara–Kumano-go 2005]: 作用 (1.3) の近似のために，今度は，時間区間 $[0,t]$ の分割に対する区分的古典軌道 $\overline{X}_n(\cdot)$ や，または，(連続な）折線軌道 $\widetilde{X}_n(\cdot)$ をとる．折線軌道 $\widetilde{X}_n(\cdot)$ の場合に書くと，

$$S_n^{\sim}(X) \equiv S(\widetilde{X}_n) := \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{X(t_j)-X(t_{j-1})}{t/n}\right)^2\frac{t}{n} - \int_0^t V(\widetilde{X}(s))ds \tag{3.8}$$

であり，対応する $K_n^{\sim}(t,x;0,y)$ は

$$K_n^{\sim}(t,x;0,y) := \overbrace{\int_{\mathbf{R}^3}\cdots\int_{\mathbf{R}^3}}^{(n-1)\text{ times}} e^{i\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{t/n}\right)^2\frac{t}{n} - \int_{t_{j-1}}^{t_j}V(\widetilde{X}(s))ds\right]}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{dx_k}{(2\pi i\frac{t}{n})^{3/2}} \tag{3.9}$$

となる．また，区分的古典軌道 $\overline{X}_n(\cdot)$ を取った場合も，$S(\overline{X}_n)$，$\overline{K}_n(t,x;0,y)$ は少し変更を受けるが似たような式になる．そして，顕著なのは，Fujiwara 自身によって開発された，大きな次元

の Euclid 空間における停留位相の方法を用いる．その結果，(a1) の Trotter 積公式で得られるよりもはるかに精密で強い結果，即ち，$K_n^{\sim}(t,x;0,y)$ が基本解へ各点収束することが示された．

参考文献

[Fu] 藤原大輔: ファインマン経路積分の数学的方法— 時間分割に拠る近似法，シュプリンガー・フェアラーク東京 1999.

[FuK] D. Fujiwara and N. Kumano-go: Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), 57–79.

§4. 数学的な可算加法的な測度の構成

数学的な可算加法的測度を構成し，真正の経路積分として実現できる例は余り多くないが，次のようないくつかがある．

(b1) 虚数時間経路積分 ($t \to -it$), Feynman–Kac 公式 [M.Kac]

(b2) 運動量表示の Schrödinger 方程式の場合 [V.P.Maslov and A.M.Chebotarev]

(b3) 空間 1 次元 Dirac 方程式の場合 [T.Ichinose and Hiroshi Tamura]

(b4) (Euclidian) 場の量子論

以下ではこれらついて概説する．

(b1) 虚数時間経路積分 ($t \to -it$), Feynman–Kac 公式

$\mathcal{D}[X]$ や $\mathcal{D}[\phi]$ は，一般には可算加法的測度としては存在しない．このままではなかなか先に行けないが，時間 t を $t \to -it$ と**虚数時間 (imaginary time)** に移した場合，つまり，時間と空間を同じ足場で扱う所謂**ユークリッド** (Euclid) **化**した場合を考えると幾分よくなる．話は拡散過程や平衡統計力学の問題へ移行する．一般的なことを急いで注意しておくと，この場合作用 $S(X)$ ($S(\phi)$) に当たる部分がラグランジュアン（ラグランジュアン密度）の積分からハミルトニアン（ハミルトニアン密度）の積分にかわる．

さて，前節と同様に，$m=\hbar=1$ とおき，また簡単のため $s=0$ とする．すると，$iS(X)$ はハミルトニアンの時間積分 $-\int_0^t[\frac{1}{2}\dot{X}(\tau)^2+V(X(\tau))]d\tau$ に移り，$X_0(\tau):=X(t-\tau)-x$, $0\le\tau\le t$, とおいて経路達を X から X_0 へ変換して書き直すと，

$$K^E(t,x;0,y):=\int_{X_0(0)=0,X_0(t)=y-x} e^{-\int_0^t[\frac{1}{2}\dot{X}_0(\tau)^2+V(x+X_0(\tau))]d\tau}\mathcal{D}[X_0] \tag{4.1}$$

になる．同時に，方程式 (1.1) は温度 $u(t,x)$ が満たす熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=[\frac{1}{2}\Delta-V(x)]u(t,x) \tag{4.2}$$

に移っている．既に 1923 年頃ウィーナー (N.Wiener) は，この右辺の $e^{-\int_0^t\frac{1}{2}\dot{X}_0(\tau)^2d\tau}\mathcal{D}[X_0]$ の部分から時間 $[0,\infty)$ 上の $X_0(0)=0$ を満たす連続経路 X_0 達の空間 $C_0:=C_0([0,\infty)\to\mathbf{R})$ 上に可

算加法的確率測度 $\mu_0(X_0)$ を構成していた．**ウィーナー測度 (Wiener measure)** と呼ばれ，始めての真正の汎関数測度であった．1947 年頃ファインマンと同じコーネル大学にいて彼の話を聞いたカッツ (M. Kac) は，ウィーナー測度を用いて熱方程式の初期値 $u(0,x)=f(x)$ のときの解 $u(t,x)$ を汎関数積分として

$$(4.3)\qquad u(t,x)=\int K^E(t,x;0,y)f(y)dy=\int_{C_0} e^{-\int_0^t V(x+X_0(\tau))\,d\tau}f(x+X_0(t))d\mu_0(X_0)$$

と表示した．これを **Feynman–Kac 公式**という．

また，(4.2) より一般の vector potential 付きの虚数時間非相対論的 Schrödinger 方程式の Cauchy 問題を考えよう:

$$(4.4)\qquad \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=-[\frac{1}{2m}(-i\nabla-A(x))^2+V(x)]u(t,x),\quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^3.$$

初期値 $u(0,x)=f(x)$ のときの解 $u(t,x)$ の経路積分表示は，時間 $[0,\infty)$ 上の $X(0)=x$ を満たす連続経路 X 達の空間 $C_x:=C_x([0,\infty)\to\mathbf{R}^3)$ 上のウィーナー測度 μ_x と共に，次の **Feynman–Kac–Itô 公式**で与えられる：

$$(4.5)\qquad u(t,x)=\int_{X(0)=x} e^{-i\int_0^t A(X(s))\circ dX(s)-\int_0^t V(X(s))ds}f(X(t))d\mu_x(X).$$

参考文献

[Kac1] M. Kac: Wiener and integration in function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72**, Part II (1966), 52–68.

[Kac2] M. Kac: Integration in Function Spaces and Some of Its Applications, *Lezioni Fermiane*, Accademia Nazionale del Lincei Scuola Norm. Sup. Pisa 1980.

[Si1] B. Simon: Functional Integration and Quantum Physics, 2nd ed., AMS Chelsea Publishing 2004.

基本解・熱核 $K^E(t,x;0,y)$ は条件付ウィーナー測度でも書けるが，分りやすいので，関数 f として敢えてやや形式的に超関数であるデルタ関数 $f(y)=\delta(y-x)$ をとると

$$(4.6)\qquad K^E(t,x;0,y)=\int_{C_0} e^{-\int_0^t V(x+X_0(\tau))\,d\tau}\delta(y-x-X_0(t))\,d\mu(X_0)$$

を得る．言うまでもなく，これはその後の確率論の「マリアヴァン解析」によって正当化されている．勿論，これをまた実数時間のときの式 (1.5) のような時間分割近似極限としても書ける．そしてこの先の話は，数学における確率解析の分野になる．

(b2) 運動量表示の Schrödinger 方程式に対する経路積分 [Maslov-Chebotarev 1976/80]

Scrödinger 方程式 (1.1) を Fourier 変換すると，

$$(4.7)\qquad i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(t,p)=\Big[\frac{\hbar^2p^2}{2m}+V(-\nabla_p)\Big]\hat{\psi}(t,p),\quad t>0,\ p\in\mathbf{R}^d,$$

に変わる．ただし，$\phi(t,x)$ の Fourier 変換を $\hat{\psi}(t,p):=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbf{R}^d}e^{-ixp}\psi(t,x)dx$ とする．

定理 4.1. ([MC1]1976, [MC2] 1980]). (4.7) の Cauchy 問題の解 $\hat{\psi}(t,p)$ は, 連続な運動量経路空間 $C([0,t]\to\mathbf{R}^3)$ 上の可算加法的な複素数値測度 λ が存在して,

$$\hat{\psi}(t,p)=\int_{P(t)=p}\exp\left[-i\int_0^t\frac{\hbar^2P(s)^2}{2m}ds\right]\hat{\psi}(0,P(0))\,d\lambda(P) \tag{4.8}$$

と経路積分表示できる.

参考文献

[MC1] V. P. Maslov and A. M. Chebotarev: Generalized measure in Feynman path integrals, *Theor. and Math. Phys.* **28** (1) (1976), 793–805.

[MC2] V. P. Maslov and A. M. Chebotarev: Jump-type processes and their applications in quantum mechanics, *Transl. Journal of Soviet Math.* **13** (1980), 315–357.

(b3) 空間 1 次元 Dirac 方程式に対する経路積分

再び, $\hbar=1$ とし, また, 光速度 $c=1$ という単位系で考える. α,β は 2×2-行列で, $\alpha^2=\beta^2=1$, $\alpha\beta+\beta\alpha=0$ を満たすとする. 例えば, $\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ とする. このとき空間 1 次元 Dirac 方程式の Cauchy 問題

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=-\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}-iA(t,x)\right)+im\beta+iV(t,x)\right]\psi(t,x),\quad t>0,\ x\in\mathbf{R}, \tag{4.9}$$

の初期値 $\psi(0,x)=g(x)$ のときの解 $\psi(t,x)={}^t(\psi_1(t,x),\psi_2(t,x))$ は, 次のような経路積分表示ができる.

定理 4.2. ([I2] 1982, [I3] 1984, [ITa1,2] 1984, 1987; [I4] 1993) Lipschitz-連続経路達の空間 $\mathrm{Lip}([0,t]\to\mathbf{R})$ [より精しくは, 1 次元 x-空間を速度 1 (光速度 $c:=1$) zigzag に進む経路達の空間 (図 3 参照)] 上の可算加法的な 2×2-matrix 値測度 $\nu_{t,x}$ が存在して, 次が成立つ:

$$\psi(t,x)=\int_{X(t)=x}d\nu_{t,x}(X)e^{i\int_0^t[A(s,X(s))dX(s)-V(s,X(s))ds]}g(0,X(0)) \tag{4.10}$$

参考文献

[I2] T. Ichinose: Path integral for the Dirac equation in two space-time dimensions, *Proc. Japan Acad.* **58 A** (1982), 290–293.

[I3] T. Ichinose: Path integral for a hyperbolic system of the first order, *Duke Math. J.* **51** (1984), 1–36.

[ITa1] T. Ichinose and Hiroshi Tamura: Propagation of a Dirac particle – A path integral approach, *J. Math. Phys.* **25**, 1810–1819(1984).

[ITa2] T. Ichinose and Hiroshi Tamura: Path integral approach to relativistic quantum mechanics – Two-dimensional Dirac equation –, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, No.**92** (1987), 144–175.

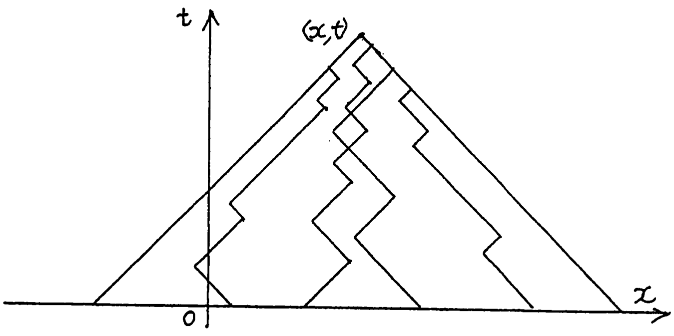

図 3. 時刻 0 に 1 次元空間 $\mathbf{R}$ のある点を出発し有限回 zigzag 運動しながら時刻 t に $x \in \mathbf{R}$ に至る経路達

[I4] T. Ichinose: Path integral for the Dirac equation, *Sugaku Expositions*, Amer. Math. Soc. **6** (1993), 15–31.

証明の概略. $K(t,x)(=K(t,x;0,0))$ を空間 1 次元の free(相互作用のない) の Dirac 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\left[\alpha\frac{\partial}{\partial x} + im\beta\right]\psi(t,x) =: C\psi(t,x), \quad (t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \tag{4.11}$$

の Cauchy 問題の基本解，即ち，unitary 群 e^{tC} の積分核とする．

経路 $X : [0,t] \to \mathbf{R}$ の空間上の可算加法的測度 ν を構成するために，$\dot{\mathbf{R}} := \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ を $\mathbf{R}$ の 1 点 compact 化，$\mathbf{X}_t := \prod_{[0,t]}\dot{\mathbf{R}} = (\dot{\mathbf{R}})^{[0,t]}$ とおく．$\mathbf{X}_t$ はすべての経路 $X : [0,t] \to \mathbf{R}$ からなる大変大きな集合で，連続経路全体 $C([0,t] \to \mathbf{R})$ ばかりではなく，不連続経路や無限大 ∞ を通る経路も含んでいる．Tychonoff の定理より，$\mathbf{X}_t$ は compact Hausdorff 空間になる．この $\mathbf{X}_t$ 上の $\mathbf{C}^2$ 値連続関数 $\Psi = {}^t(\Psi_1,\Psi_2)$ 全体の Banach 空間を $C(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2)$ とする．次に，この空間の元 Ψ でであって，区間 $[0,t]$ の有限分割：$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = t$ と $\dot{\mathbf{R}}^{k+1}$ 上のある $\mathbf{C}^2$ 値連続関数 $F(x_0,x_1,\ldots,x_k)$ が存在して，$\Psi(X) = F(X(s_0),X(s_1),\ldots,X(s_k))$ と表されるようなものの全体のなす部分空間を $C_{fin}(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2)$ とする．そして，固定した $t>0, x\in$ に対して，$C_{fin}(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2)$ 上の $\mathbf{C}^2$ 値線形汎関数 $L_{t,x}$ を導入する：

$$\begin{aligned} L_{t,x}(\Psi) :=& \overbrace{\int_{\mathbf{R}}\cdots\int_{\mathbf{R}}}^{k\text{ times}} K_0(s_k - s_{k-1}, x_k - x_{k-1})\cdots K_0(s_1 - s_0, x_1 - x_0) \\ & \times F(x_0,x_1,\ldots,x_k)dx_0dx_1\cdots dx_{k-1}, \quad x_k = x, \\ =& e^{(s_k-s_{k-1})C}\cdots e^{(s_1-s_0)C}F(x_0,x_1,\ldots,x_k). \end{aligned} \tag{4.12}$$

この証明で最も肝心なことは，空間 1 次元の free Dirac 方程式 (4.11) の Cauchy 問題が L^∞ well-posed であることである．実際，次の補題が成立つ．

補題 4.3. ．任意の $g \in C_\infty(\mathbf{R};\mathbf{C}^2) = C_\infty(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}^2 := \{f \in C_b(\mathbf{R};\mathbf{C}^2); |f(x)| \to 0,\ |x| \to \infty\}$ に対して，初期値 $\psi(0,x) = g(x)$ を満たす解 $\psi(t) := \psi(t,\cdot) \in C_\infty(\mathbf{R};\mathbf{C}^2)$ が存在して，次の不等式が成立つ：

$$\|\psi(t)\|_\infty = \|e^{tC}g\|_\infty \le e^{mt}\|g\|_\infty. \tag{4.13}$$

注意. 空間 $\mathbf{R}^d$ での 1 階双曲方程式系の Cauchy 問題が L^∞ well-posed であるのは，$d=1$ のときのみであることが知られている．従って，空間 3 次元 Dirac 方程式の Cauchy 問題は，残念ながら，L^∞ well-posed ではない．

この補題 4.3 を用いて，次の Key 評価式

$$|L_{t,x}(\Psi)| := \max\{(L_{t,x}(\Psi))_1, (L_{t,x}(\Psi))_2\} \le e^{mt}\|\Psi\|, \quad \Psi \in C_{fin}(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2). \tag{4.14}$$

を示すことができる．

$C_{fin}(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2)$ は Stone-Weierstrass の定理より，$C(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2)$ の中で稠密であるから，上の評価式 (4.14) はすべての $\Psi \in C(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2)$ で成立っていることになる．従って，$L_{t,x}(\Psi)$ は $C(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2)$ 上の連続線形汎関数になるから，Riesz の表現定理定理より，$\mathbf{X}_t$ 上のある $M_2(\mathbf{C})$ 値 regular Borel 測度 $\nu_{t,x}$ が存在して，

$$L_{t,x}(\Psi) = \int_{\mathbf{X}_t} d\nu_{t,x}(X)\Psi(X), \qquad \Psi \in C(\mathbf{X}_t;\mathbf{C}^2). \tag{4.15}$$

が成立つ．

以下簡単のために，$A(t,x) = A(x), V(t,x) = V(x)$ が t-independent の場合として議論を進める (t-dependent の場合は少しだけ手間がかかるに過ぎない)．

$$((T(\tau)g)(x) := \int_{\mathbf{R}} K(\tau, x-y)e^{i[A(y)(x-y)-V(y)\tau]}g(y)dy \tag{4.16}$$

とおくと，$x = x_k$ として，

$$\left[\left(T\left(\tfrac{t}{k}\right)\right)^k g\right](x) = \overbrace{\int_{\mathbf{R}} \cdots \int_{\mathbf{R}}}^{k \text{ times}} \prod_{j=1}^{k} K\left(\tfrac{t}{k}, x_j - x_{j-1}\right) \tag{4.17}$$
$$\times e^{i\sum_{l=1}^{k}[A(x_{l-1})(x_l - x_{l-1}) - V(x_{l-1})(\frac{t}{k})]}g(x_0)dx_0dx_1\cdots dx_{k-1}.$$

この (4.17) の右辺は，(4.15) により，

$$\int_{X(t)=x} d\nu_{t,x}(X)e^{i\sum_{l=1}^{k}A(X(s_{l-1}))(X(s_l)-X(s_{l-1}))}e^{-i\sum_{l=1}^{k}V(X(s_{l-1}))(\frac{t}{k})}g(X(0)) \tag{4.18}$$

に等しく，$k \to \infty$ のとき，この被積分関数は $e^{i\int_0^t[A(X(s))dX(s)-V(X(s))ds]}g(X(0))$ に収束するので，従って (4.17) の右辺は

$$\int_{X(t)=x} d\nu_{t,x}(X)e^{i\int_0^t[A(X(s))dX(s)-V(X(s))ds]}g(X(0))$$

に収束し，一方左辺は，作用素論的考察より，$L^\infty(\mathbf{R})$ ノルムで $\psi(t,x)$ に収束する．

また,構成された測度 $\nu_{t,x}$ の台は, $\mathrm{Lip}([0,t]\to\mathbf{R})$ [より精しくは1次元 x-空間を速度1 (光速度 $c:=1$) zigzag に進む経路達の空間] 上に集中していることを示すことができる.(証明の概略終)

(b4) (Euclidian) scalar 場の量子論 (d= 1,2,3) — 時空の格子近似

Minkowski 時空の作用 $S(\phi)$ を Euclid 時空の作用とも言うべき

$$iS(\phi)=-\int_{\mathbf{R}^d}[\frac{1}{2}|\nabla\phi(x)|^2+\frac{1}{2}m^2|\phi(x)|^2+\lambda|\phi(x)|^4+iJ(x)\phi(x)]dx$$

で考えた ($J(x)$ は外場) 次の '積分式'

$$Z(J)=\int_{\{\phi:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^N\}}e^{-\int_{\mathbf{R}^d}[\frac{1}{2}|\nabla\phi(x)|^2+\frac{1}{2}m^2|\phi(x)|^2+\lambda|\phi(x)|^4+iJ(x)\phi(x)]dx}\mathcal{D}[\phi]$$

が,対応する物理の情報を全部内包していると言ってよい程重要な Green 関数生成汎関数になる. $d\leq 3$ のとき, Feynman–Kac 公式を得たように, $e^{-\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla\phi(x)|^2dx}\mathcal{D}[\phi]$ の部分から Euclidian scalar 場 ϕ 達の空間上の可算加法的確率測度 M が構成でき,

$$Z(J)=\int_{\{\phi:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^N\}}e^{-\int_{\mathbf{R}^d}[\frac{1}{2}m^2|\phi(x)|^2+\lambda|\phi(x)|^4+iJ(x)\phi(x)]dx}dM(\phi)$$

と書け, **構成的場の量子論**, **平衡統計力学**の問題になる.

Euclidian space-time scalar 場の量子論が構築できれば,そこから本来の Minkowski 時空の scalar 場の量子論へ,所謂 Osterwalder–Schrader の公理に基づいて移行することができることになっている.従って, Minkowski 時空3次元以下の scalar 場の量子論は数学的に存在する.しかし, 4次元の場合は存在しないらしいが,まだ完全な決着はついていない.

scalar 場よりも,もっと物理的な Tomonaga, Schwinger, Feynman 及び Dyson によって建設された量子電磁力学 QED (Quantumelectrodynamics) も,まだ数学的には確立されていない.これは,最も簡単で真に重要な,電子と光子の2粒子のみからなる物理的模型の場の量子論である.この理論が存在するとして計算された結果が実験とあれ程正確に合うにも係わらずでもある.また, QED を Euclid 場の量子論として考えたとしても,これに対応する Osterwalder–Schrader の公理もまだきちんとは整備されていないようである.

勿論, QED を内包より一般な Gauge 場の量子論も,まだ数学的には確立されていない.そこでは, $\int\int\int\mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[\overline{\psi}]\mathcal{D}[A]e^{iS(\psi,\overline{\psi},A)}$ のような3つの場 $\psi,\overline{\psi},A$ に関する汎関数積分が登場する.

参考文献

[Si2] B. Simon: The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton University Press 1974.

[GJ] J. Glimm and A. Jaffe: Quantum Physics. A Functional Integral Point of View, 2nd edition, Springer 1987.

[E] 江沢 洋・新井 朝雄:「場の量子論と統計力学」, 日本評論社 (1988).

[Irt] 伊東 恵一: 構成的場の量子論, 数学 第 38 巻 第 2 号 (1986), 165–179.
[W] 渡辺 浩: 「場の量子論の数学的構成」, 日本医科大学基礎科学紀要，第 22 号 (1997), 67 pages.

§5. もっと，虚数時間経路積分について

§5.1. 指数積公式近似（再訪）

経路積分は，§3 で見たように指数積公式を用いる近似で最も簡単に意味付けられる．この小節では，虚数時間経路積分の場合には，指数積公式からその積分核が基本解に各点収束していることも導けるについて述べる．

そのために，先ず，この 10 年来明らかになってきた事実, A, B が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素で, **和** $A+B$ **も自己共役**のとき, selfadjoint Trotter–Kato 積公式 (3.7) が強収束ばかりではなく，**作用素ノルム**でも収束していること, 即ち，次が示されたことを注意しておく．

定理 5.1. ([ITa],[ITTZ] 2001; cf. [INZ] 2004)

$$\|[e^{-tA/n}e^{-tB/n}]^n - e^{-tH}\|_{\mathcal{H}} = O(\tfrac{1}{\mathbf{n}}),$$
$$\|[e^{-tB/2n}e^{-tA/n}e^{-tB/2n}]^n - e^{-tH}\|_{\mathcal{H}} = O(\tfrac{1}{\mathbf{n}}).$$

この収束は，$(0,\infty)$ 上で局所一様．もし $H \geq \delta I (\delta > 0)$ なら $[0,\infty)$ 上で一様．また，この誤差評価 $O(\frac{1}{\mathbf{n}})$ は最良である．

この定理の結果を，具体的な Schrödinger 作用素 $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ [$A = -\frac{1}{2}\Delta, B = V$ であって，$V(x)$ は下に有界な potential 関数] の場合に当てはめ更に深めると，積分核 $K^{(n)}(t,x,y) := [e^{\frac{t}{n}\frac{1}{2}\Delta}e^{-\frac{t}{n}V}]^n(x,y)$ の各点一様収束も言えること等が [(最良) 誤差評価付きで] 分った． 例えば，次の 2 つの結果が示された．定理 5.2 の誤差評価は，定理 5.1 の対称 Trotter 積の一般論の場合の $O(\frac{1}{\mathbf{n}})$ よりも良いことに注意。

定理 5.2. ([ITa3] 2004, IT4 2006; [AI] 2008])．もし $V(x)$ が下に有界な $C^\infty(\mathbf{R}^d)$ 関数で, $V(x) \geq C\langle x\rangle^m$, $C > 0$, かつ，$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{m-\delta|\alpha|}$ $(0 < \exists\delta \leq 1)$ を満たすとする（例えば，もし $\delta = 1$ なら, $V = x^2$, $x^4, \dots$ 等) と，すべての x, y-偏微分も込めて,

$$[K^{(n)}(t,x,y) - e^{-tH}(x,y)] = O(\tfrac{1}{\mathbf{n}^2}),$$
$$\text{in } C^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)\text{-topology, locally uniformly in } (0,\infty).$$

定理 5.3. ([IT4] 2006) (非負の Coulomb potential の場合)．$H := -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ において, $V(x) \geq 0$ は, ある $0 < \alpha < 1$ に対して，$V(-\Delta+1)^{-\alpha}$: $L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^d)$ が有界作用素であることを満たし, しかも, V は 2 点 $p, q \in \mathbf{R}^d$ の近傍で C^∞ とする．このとき,

$$[K^{(n)}(t,x,y) - e^{-tH}(x,y)] = O(\tfrac{1}{\mathbf{n}}), \qquad \text{in } C^\infty(U)\text{ -topology, locally uniformly in } (0,\infty).$$

最後に，**作用素ノルムでの unitary 指数積公式**は一般には成り立たない（反例については [I5, §4] を見よ）．しかし，少し驚くべきこととして，**実数時間相対論的** Schrödinger 方程式や一般の空間 **3 次元の Dirac 方程式**の場合には，幾分制限はあるものの非自明な potential $V(x)$ に対して，unitary 指数積公式が**作用素ノルム収束する**ことも証明された．勿論，**実数時間非相対論的** Schrödinger 方程式の場合には成り立たない．

定理 5.4. ([IT2] 2004; "unitary" norm Trotter !).
1^o $L^2(\mathbf{R}^3)^4$ 上の Dirac 作用素 $H = H_0 + V = (i\alpha\cdot\nabla + m\beta) + V(x)$ において，その potential V について $\partial_x^\alpha V(x)(|\alpha| = 2)$ が有界とする．また，
2^o $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上の相対論的 Schrödinger 作用素 $H = H_0 + V = \sqrt{-\Delta + m^2} + V(x)$ において，その potential V について，$\partial_x^\alpha V(x)$ $(1 \le |\alpha| \le 4$ $[m = 0$ のときは，$0 \le |\alpha| \le 4])$ が有界とする．

このとき，

$$\|[e^{-itH_0/2n}e^{-itV/n}e^{-itH_0/2n}]^n - e^{-itH}\|_{L^2} = O(\tfrac{1}{n^2}), \quad \text{locally uniformly in } \mathbf{R}.$$

参考文献

[IT1] T. Ichinose and Hideo Tamura: The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, *Commun. Math. Phys.* **217** (2001), 489–502; *Erratum*, ibid. **254** (2005), 255.

[ITTZ] T. Ichinose, Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and V. A. Zagrebnov: Note on the paper "The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound" by Ichinose and Tamura, *Commun. Math. Phys.* **221**(2001), 499–510.

[INZ] T. Ichinose, H. Neidhardt and V. Zagrebnov: Trotter–Kato product formula and fractional powers of self-adjoint generators, *J. Functional Analysis* **207** (2004), 33–57.

[IT2] T. Ichinose and Hideo Tamura: Note on the norm convergence of the unitary Trotter product formula, *Lett. Math. Phys.* **71** (2004), 65–81.

[IT3] T. Ichinose and Hideo Tamura: Sharp error bound on norm convergence of exponential product formula and approximation to kernels of Schrödinger semigroups, *Comm. PDE* **29** (2004), Nos. 11/12, 1905–1918.

[IT4] T. Ichinose and Hideo Tamura: Exponential product approximation to integral kernel of Schrödinger semigroup and to heat kernel of Dirichlet Laplacian, *J. Reine Angew. Math.* **592** (2006), 157–188.

[AI] Y. Azuma and T. Ichinose: Note on convergence pointwise of integral kernels and in norm for exponential product formula with the harmonic oscillator, *Integral Equations Operator Theory* **60** (2008), 151–176.

[I5] T. Ichinose: Time-sliced approximation to path integral and Lie–Trotter–Kato product formula, In: *A Garden of Quanta, Essays in Honor of Hiroshi Ezawa for his seventieth birthday*, World Scientific 2003, pp. 77–93.

次は，これらの結果を込めた作用素ノルム指数積公式に関するレビューである：

[IT0] T. Ichinose and Hideo Tamura: Results on convergence in norm of exponential product formulas and pointwise of the corresponding integral kernels, *Modern Analysis and Applications, The Mark Krein Centenary Conference* (Odessa, Ukraine, April 2007) – Vol.1: *Operator Theory and Related Topics*, Birkhäuser 2009, pp. 315–328.

§ 5.2. 虚数時間相対論的 Schrödinger 方程式

(a) Weyl 量子化相対論的 Hamitonian の場合

H_A を vector potential $A(x)$ を持つ classical symbol $\sqrt{|p-A(x)|^2+m^2}$ に対する Weyl 量子化 Hamitonian

$$(5.1)\qquad (H_A f)(x) := (2\pi)^{-3}\iint_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3} e^{i(x-y)p}\sqrt{|p-A(\tfrac{x+y}{2})|^2+m^2}\, f(y)\,dpdy$$

として，虚数時間相対論的 Schrödinger 方程式

$$(5.2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -[(H_A-m)+V(x)]u(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^3,$$

に対する初期値 $u(0,x)=f(x)$ のときの Cauchy 問題を考える．

λ_x を Lévy 過程の経路空間 $D_x := D_x([0,\infty)\to\mathbf{R}^3)$，即ち，右連続左極限を持つ経路 $X: [0,\infty)\to\mathbf{R}^3$ で，条件 $X(0)=x$ を満たすもの達全体の空間，の上の確率測度で，

$$e^{-t(\sqrt{p^2+m^2}-m)} = \int_{X(0)=x} e^{ip\cdot(X(t)-X(0))}\,d\lambda_x(X), \quad t\ge 0,\ p\in\mathbf{R}^3,$$

を満たすものとする．Lévy–Khinchin 公式から，$\sqrt{p^2+m^2}-m = -\int_{|y|>0}[e^{ip\cdot y}-1-ip\cdot yI_{|y|<1}]n(dy)$ が成り立ち，ここに $n(dy)$ は Lebesgue 測度に関して絶対連続な Lévy 測度である．各経路 $X\in D_x$ に対して，$N_X(dsdy)$ を $(0,\infty)\times(\mathbf{R}^3\setminus\{0\})$ 上の計数測度

$N_X((t,t']\times U) = \{$ 跳び $X(s)-X(s-)\neq 0$ が U に入っている時点 $s\in(t,t']$ の個数 $\}$

$(0<t<t'$, U は $\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$ の Borel 集合$)$

とし，$\tilde N_X(dsdy) := N_X(dsdy)-dsn(dy)$ とおく．各 $X(t)$ は Lévy–Itô の定理より，

$$X(t) = x+\int_0^{t+}\int_{|y|\ge 1} y\cdot N_X(dsdy) + \int_0^t\int_{0<|y|<1} y\cdot\tilde N_X(dsdy)$$

と表示される．$\int_{D_x} N_X(dsdy)d\lambda_x(X) = dsn(dy)$ が成立っている．

この記号の下に，(5.2) の解 $u(t,x)$ は次の経路積分表示ができる ([ITa] 1986, [I6] 1992)：

$$(5.3)\qquad u(t,x) = e^{-(H_A-m+V)} = \int_{D_x} e^{-W(X)} f(X(t))\,d\lambda_x(X),$$

$$\begin{aligned} W(X) &= i\int_0^{t+}\int_{|y|>0} A(X(s-)+y/2)\cdot y\tilde N_X(dsdy) \\ &\quad + i\int_0^t\int_{|y|>0}[A(X(s-)+y/2)-A(X(s)]\cdot y\,dsn(dy) + \int_0^t V(X(s))\,ds. \end{aligned}$$

Lévy 過程の $N_X(dsdy)$ に関する確率積分等については，[IkW], [A] を参照せよ．

参考文献

[ITa] T. Ichinose and Hiroshi Tamura: Imaginary-time path integral for a relativistic spinless particle in an electromagnetic field, *Commun. Math. Phys.* **105** (1986), 239-257;

[I6] T. Ichinose: Some results on the relativistic Hamiltonian: self-adjointness and imaginary-time path integral, In: *Differential Equations and Mathematical Physics, Proc. of the International Conference, Univ. of Alabama at Birmingham*, March 13–17, 1994, International Press, Boston 1995, pp. 102–116.

[IkW] N. Ikeda and S. Watanabe: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland Mathematical Library 24, North-Holland 1981.

[A] D. Applebaum: Lévy processes and stochastic calculus, 2nd ed., *Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 116*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

(b) もうひとつの相対論的 Hamiltonian の場合

それは，非負自己共役作用素 $|-i\nabla - A(x)|^2 + m^2$ (第 1 項が非相対論的 magnetic Schrödinger 作用素の 2 倍になっている) の $\frac{1}{2}$ 乗である自己共役作用素 $\sqrt{|-i\nabla - A(x)|^2 + m^2}$ を経て定義される．それに対する虚数時間相対論的 Schrödinger 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -[\sqrt{|-i\nabla - A(x)|^2 + m^2} - m + V(x)]u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^3. \tag{5.4}$$

の Cauchy 問題を考える．初期値 $u(0,x) = f(x)$ のときの解 $u(t,x)$ は，時間の非減少右連続函数である変更された時間経路 $T : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ で，条件 $T(0) = 0$ を満たすもの達 (Lévy subordinators) の空間 $D_0([0,\infty) \to \mathbf{R})$ 上の確率測度 λ_0 が存在して，

$$u(t,x) = \int_{C_x}\int_{D_0} e^{-i\int_0^{T(t)} A(X(s))\circ dX(s) - \int_0^t V(X(T(s)))ds} f(X(T(t)))d\mu_x(X)d\lambda_0(T). \tag{5.5}$$

と経路積分表示できる．μ_x は式 (4.5) でも用いた C_x 上のウィーナー測度である．

参考文献

[AJLS] G. F. De Angelis, G. Jona-Lasinio and M. Sirugue: Probabilistic solution of Pauli-type equations, *J. Phys.* **A16** (1983), 2433–2444.

[ARS] G. F. De Angelis, A. Rinaldi and M. Serva: Imaginary-time path integral for a relativistic spin-(1/2) particle in a magnetic field, *Europhys. Lett.* **14** (1991), 95–100.

尚，より一般の spin を持つ Hamiltonian の場合にも:

[HIL] F.Hiroshima, T.Ichinose and J. Lőrinczi: Path integral representation for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, Preprint 2010.

§6. スリット実験からもう一度「経路積分」のアイディアをみる

以下は，

[Z] A. Zee: Quantum Field Theory, Princeton Univ. Press, 2003; 2nd ed., 2010

の中の “The professor's nightmare: a wise guy in the class (教授の悪夢：ひとりの聡明な学生)” からの引用（の拙和訳）である．ただ，[F2] R. P. Feynman and A. P. Hibbs, pp.19–21, にも短く同じ内容のことが書いてある．

尚，本稿 §1 では，経路 X に対する確率振幅は $\varphi[X]$ と書いたが（式 (1.4), (1.5) を見よ），本節の記法では $\mathcal{A}(X)$ と書くことになる．図 4, 5, 6, 8, 9 は [Z] から借用した．

教授が量子力学の授業で，所謂 double-slit 実験について講義をしておりました．

P: “(各) 事象 (event) $\longleftrightarrow$ 確率振幅 (probability amplitude)” の対応から，

$\mathcal{A}(S \to O)$: 粒子が時刻 $t=0$ に S(source) を出発し時刻 $t=T$ に O(detector) に至る確率振幅，

$\mathcal{A}(S \to A_i \to O)$: 粒子が時刻 $t=0$ に S(source) を出発し，途中穴 A_i を通って時刻 $t=T$ に O(detector) に至る確率振幅，

とすると，量子力学の基本的な仮設は，

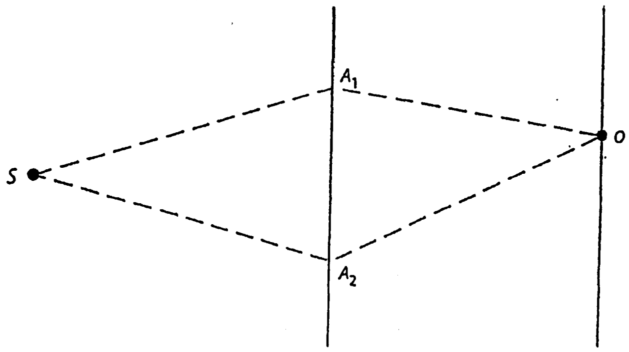

図 4. 1 つのスクリーンに 2 つの穴をあける

$$\mathcal{A}(S \to O) = \mathcal{A}(S \to A_1 \to O) + \mathcal{A}(S \to A_2 \to O)$$

である（図 4）．

突然，聡明な学生が質問した．彼を仮に “Feynman” と呼びましょう．

F: 先生，もしこのスクリーンにもうひとつ 3 つ目の穴 A_3 を空けたらどうなるのでしょうか（図 5）．

P: 勿論，その 3 つ目の穴を通る確率振幅を足せばよい．

教授が，続けようとすると，Feynman はさえぎって，

F: 先生，もし 4 つ目，5 つ目の穴をこのスクリーンに空けたらどうなるのでしょうか．

教授は少し忍耐を失いながら，

P: よろしい，いい質問だ．すべての穴を通る確率振幅を足せばよい．つまり，

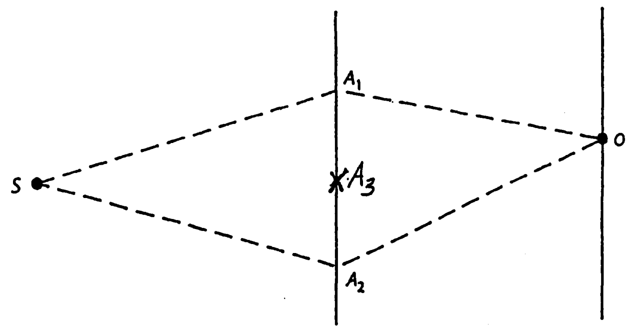

図 5. 1 つのスクリーンに 3 つ目の穴をあける

$$\mathcal{A}(S \to O) = \sum_i \mathcal{A}(S \to A_i \to O)$$

すると Feynman は，すかさずききました．

F: 先生，ではもうひとつ 2 つ目のスクリーンを置き，それにいくつかの穴を空けたらどうなるのでしょうか．

P: その場合は，

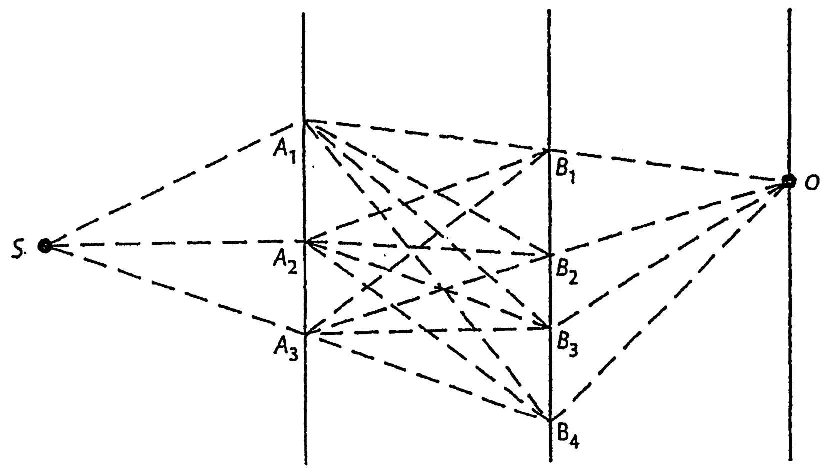

図 6. 2 つのスクリーンにいくつかの穴をあける

$$\mathcal{A}(S \to O) = \sum_{i,j} \mathcal{A}(S \to A_i \to B_j \to O)$$

となります（図 6）．Feynman はしつこくきくきく．

F: それでは，3 つ目，4 つ目のスクリーンを置いたらどうなるのでしょうか．そして，1 つのスクリーンに無限個（連続無限個！）の穴を空け，その結果そのスクリーンがそこに最早なく

なってしまったら，どうなるのでしょうか．

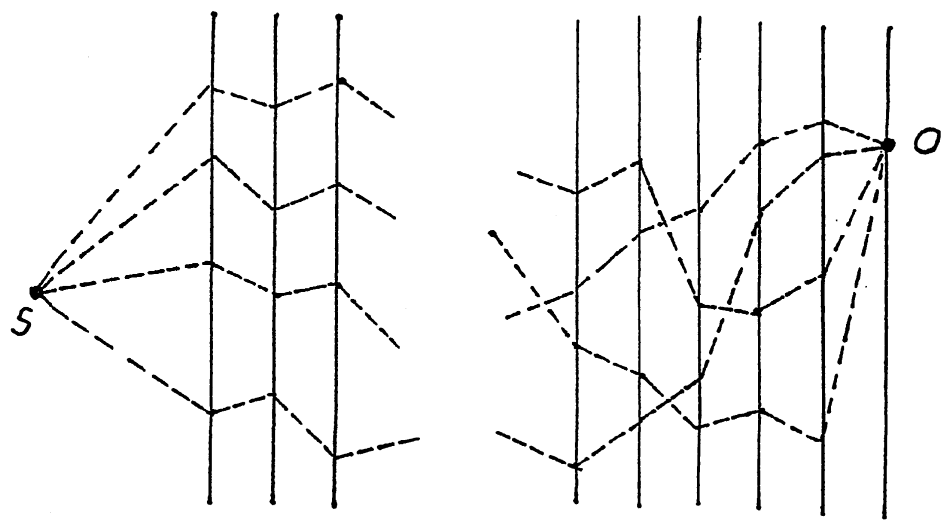

図 7. 沢山のスクリーンに沢山の穴をあける

教授はため息をつき，

P: 先に行きます．この講義では沢山話すことがあるので．

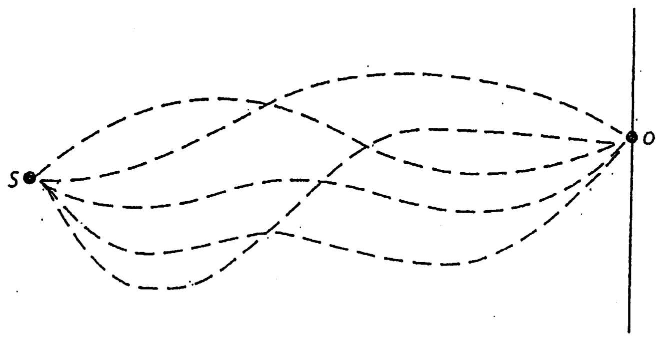

図 8. 無限個のスクリーンに無限個の穴をあける

読者の皆さんは，賢明なる学生 "Feynman" が言わんとしたことがお分かりかと思います．即ち，もし 1 つのスクリーンに無限個の穴を空け，その結果スクリーンがもうそこには存在しないという，彼の observation は大変面白いものです．Feynman が示したことは，S(source) と O(detector) の間に何もない (つまり，1 つのスクリーンもない) 空間があるとしても，粒子が S から O へ伝播する確率振幅は（存在しない）スクリーン達の各々の穴達の各 1 つを通って行く確率振幅達の和になることである．換言すれば，

$\mathcal{A}(t=0$ に S を出発し $t=T$ に O に至る$)$
$= \sum_{\text{(paths)}} \mathcal{A}(t=0$ に S を出発し, ある特定の経路を経て $t=T$ に O に至る$)$
これは §1 に書いた式 (1.5) $K(t,x;0,y) = \sum_{X:X(0)=y,X(t)=x} \varphi[X]$ と同じことである.

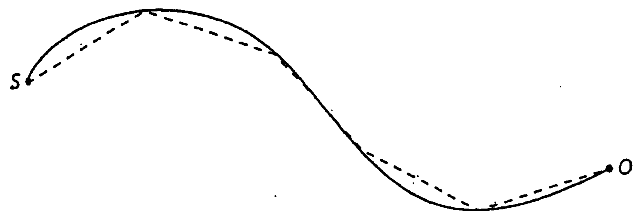

図 9. 経路を連続な折線で近似する

数学的厳密にこだわる人は如何に $\sum_{\text{(paths)}}$ を定義するかについて心配する. Feynman は Newton や Leibniz に従った. 図 9 のように, 経路を短い線分達からなる (連続な) 折れ線で近似する. そして, 線分達の長さを zero にする. すると, これは, お互いに無限に近いスクリーン達 (各スクリーンには無限個の穴が空けられた) が置かれた空間を丁度一杯にしていることになります. ......

謝辞. 筆者が手描や Xerox コピーで用意した本稿の図を tex.text 用に変換するに際して, 熊ノ郷直人さんに助けて頂きました. ここに厚くお礼を申し上げます.

まとめ

経路積分（汎関数積分）とは,

すべての経路（場）に渡って「**足し上げる**」こと

Cf. 統計力学の分配関数 (partition function)