数理解析研究所講究録
第 1723 巻 2011 年 48-54

ホワイトノイズ解析による経路積分への入門
White Noise Approach to the Feynman Path Integrals

飛田 武幸 (Takeyuki HIDA)*

概要

今回の報告は次の 4 節からなる:

1. はじめに
2. ホワイトノイズ解析からの準備
3. Propagator の構成法
4. 展開

§1. はじめに.

経路積分, あるいは Feynman integral の研究への motivation としては, やはり Dirac のテキスト [1, § 32. Action Principle] に戻りたい. 具体的な問題設定は Feynman の論文 [2] および Feynman-Hibbs の著書 [3] によると言ってよかろう.

この話題は多くの数学者や物理学者の興味を呼び, 今日まで, 種々の方法で活発な研究が進められていることは周知の通りである. 課題は, まず関数 (経路) 空間の上で, 特殊な物理的な量の積分の正当化と, その応用である.

本稿で紹介したいことは, ホワイトノイズ解析における超汎関数の理論を応用して, 経路積分の正当化を行い, かつ多くの場合 (すなわち種々のポテンシャルの例) に, 具体的な伝達関数が求められるということである. ポテンシャルがある種の解析的な特異性を持つ場合にまで, ホワイトノイズ解析を適用する我々の方法が活用できることを述べたい.

実を言えば, Feynman integral の正当化への努力は 「ホワイトノイズ解析」を提案 (Carleton University における講義 1975) した一つの理由であった. [5] 参照.

具現化について: 直接には, L. Streit との discussion を基にして数理物理学の Belrin Conf. 1981, でアイデイアを発表し, ついで共著の論文 [17] となったのがその歴史である.

2000 Mathematics Subject Classification(s):

*名古屋大学・名城大学 名誉教授 (Professor Emeritus, Nagoya University・Meijo University)

考え方

1. Lagrangian によって決まる古典的な経路を乱す量子的な「ゆらぎ」をホワイトノイズ(ブラウン運動) で表すことにする．形の上では，それは固定端ブラウン運動 (Brownian bridge) となる．
2. Feynman 積分の被積分関数をホワイトノイズの**超汎関数**で記述する．
3. 伝達関数を与える上記の積分は，ホワイトノイズ測度による平均値になる．

このアイディアの具現化は，次節の準備のもとに，第 3 節で論じる．

時を経て，紹介したい言葉がある．

A physicist's quotation (at Nagoya White Noise Seminar, 2004 より) for a mthematician

"The useful thing about talking to physicists is their structural intuition"

§2. ホワイトノイズ解析からの準備

§2.1. Classical trajectory からの「揺らぎ」は Browian bridge で表される．

理由:「揺らぎ」時間 t をパラメータとする確率過程 $X(t)$ を有限時間区間で考えよう．

定理 1. $X(t)$ はガウス型でブラウン運動による標準表現を持つとし，さらに次の 3 条件を満たすならば，それは固定端ブラウン運動である．

- Markov 過程,
- 固定端.
- 分散 1 に規格化すれば (Special) Conformal invariance をみたす.

まず，これらの条件を仮定する理由を述べる．

Lagrangian $L(t)$ から出発しよう．

Markov 性を仮定する理由は Action

$$S(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} L(t')dt'$$

について Dirac の解説 ([1, §32]) によれば，それが $t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_m \to t$ のとき

$$B(t,t_0)=B(t,t_m)B(t_m,t_{m-1})\cdots B(t_2,t_1)B(t_1,t_0)$$

を主張する．これは Markov 過程に関する推移確率の類似と考えられる．

固定端にするのは trajectory を取り上げる以上，これは当然である．

$X(t)$ を normalize して $Y(t)=\dfrac{X(t)}{\sigma(X(t))}$ をとるとき，パラメータの変換，時間区間の変換などについて，適当な不変性を持たねばならない．それは shift, dilation, reflection (原点あるいは単位区間に関して)，あるいは射影変換に関する不変性の要求である．こうして special conformal transformation group にいたる．その変換群は，$PSL(2,R)$ と同型な変換群といってよい．

定理の証明. $Y(t)$ の分布の射影不変性から，その共分散関数は 4 時点の unharmonic ratio の関数である．その関数が平方根であることは $X(t)$ の局所連続性から導かれる．

こうして,時間区間を $[a,b]$ としたとき，固定端ブラウン運動 (Brownian bridge) $X(t), t \in [a,b]$, が得られる．例えば，単位区間のときは，$X(t), t \in [0,1]$ はホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ により，

$$X(t) = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-u}\dot{B}(u)du$$

と表現される．これはいわゆる標準表現である．

そこで，時間区間 $[0,t]$ における quantum mechanical trajectory $x(s)$ は，classical trajectory を $y(s)$ とするとき，

$$x(s) = y(s) + \sqrt{\frac{\hbar}{m}}X(s)$$

と表される．

これから Action $B(0,t)$ を計算して "経路積分" に持ち込めばよいのであるが，実はその積分はホワイトノイズ（ブラウン運動）を定義している測度による積分である．すなわち，定まった**確率空間における平均値**をとることに帰着される．これが基本的なアイディア!! に他ならない． □

註. 上の $x(s)$ の表現をそのまま propagator $G(y_1.y_2;0,t)$ の計算に用いる場合，固定端ブラウン運動の代りにブラウン運動 $B(s)$ はそのままを置き，被積分関数を Donskmer の delta 関数 $\delta_0(x(t)-y_2)$ との積にするのが好都合である．

こうして，ホワイトノイズ解析による Path integral quantization の設定に到達するのである．

実行法は前述のように 1983 の論文 [17] によることとなるが，それ以後 BiBOS 研究所 (ドイツ北部) で多くの若い math-physicists がこの方向での path integr の研究で成果をあげている．これには，アジア地区からの参加者も多い．

その他，文献として

M. Masujima [13] 全 800 ページ余の大労作，では Chapt.6. Hida distribution approach to path integrtal quantization と題する一つの章を割いている．

また，G. Roepstorff [14] では第 2 章の一節 2.10.4. The Feynman integral as a Hida distribution で取り上げている．Feynman integral を rigorous に定義するために white noise calculus を使うと言っている．

§2.2. White Noise Analysis 解説.

ここで重要な問題が起こる．action の計算には運動のエネルギーの計算が必要となる．$\dot{x}(s)^2$ には $\dot{B}(t)^2$ が含まれる．これは従来の確率解析では処理できない．それが扱える新しいランダム関数のクラスを導入する必要がある．そのための手法が Renormalization (くりこみ) である．まず $\dot{B}(t), t \in R^1$ の 2 次形式からはじめるが，それは "適当な無限大を引いて超汎関数にする" ことである．形式的には

$$\iint F(u,v)\dot{B}(u)\dot{B}(v)dudv - \int F(t,t)\frac{1}{dt}dt$$

であるが，厳密な説明には無限次元のフーリエ変換 またはラプラス変換を用いることになる．それらの変換は，それぞれ T-変換，S-変換と呼ばれている．

例. renormalized $\dot{B}(t)^2$ は

$$:\dot{B}(t)^2: = 2H_2(\dot{B}(t); \frac{1}{dt}).$$

ただし 上式で用いた H_2 はパラメータを持つ 2 次エルミート多項式である．高次多項式の場合もエルミート多項式の計算が基になる [6, 附録 A.5] 参照).

経路積分では，そこに登場する二次形式 (運動のエネルギー) の指数関数の扱いが本命であるが，それはもう一段階上の 手段が必要となる．それは multiplicative renormalization である．それら renormalization の詳細は [15] 参照．

一般に超汎関数空間の構成は Fock space

$$(L^2) = \bigoplus \mathcal{H}_n$$

から出発して，上のように $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2^{(-2)}$ をモデルとし，

$$\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n^{(-n)}$$

を構成する．ここで $\mathcal{H}_n$ が無限次元であることに注意する．

正の減少列 c_n を選び

$$(L^2)^- = \bigoplus c_n \mathcal{H}_n^{(-n)}$$

がホワイトノイズ **超汎関数** 空間である．

ついでながら，ホワイトノイズ解析の基礎である $\dot{B}(t)$ を変数とする超汎関数の導入についての motivations は path integral 以外にも多くの例がある．

§2.3. ホワイトノイズ測度の flattening.

無限次元にはルベーグ式の測度が存在しないことは，よく知られている．しかし，それに匹敵するものが求められている．我々はこれに対して次のような手法を考える．

形式的に言えば，ホワイトノイズ測度は関数空間 (無限次元である) に導入された標準ガウス測度 μ である，関数空間の要素を $x(t)$ と書けば仮想的なルベーグ測度 $dL(x)$ を用いて

$$d\mu(x) = \exp[-\frac{1}{2}\int x(t)^2 dt] dL(x)$$

とでも表したいところである．それは勿論不可能であるが，せめて

$$g(x) = \exp[\frac{1}{2}\int x(t)^2 dt]$$

を考えたい．実際

$$g(x) d\mu(x)$$

を考えて，ルベーグ測度の代用にしたいと思うのは自然であろう．上式単独では勿論意味はないが，他の関数と組み合わせて意味のあるものにしたい．実際それは可能な場合があり，次節で実証される．

この $g(x)$ は超汎関数である.

§3. Propagator の構成法.

当面 Lagrangian は

$$L(\dot{x},x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)$$

とする. Action は

$$S[x]=S_0[x]-\int V ds$$

である.

前節の注意により, quantum mechanical trajectory を

$$x(s)=y(s)+\sqrt{\frac{\hbar}{m}}B(s)$$

する. したがって propagator $G=G(y_1,y_2,t)$ は次のように書ける:

定理 2. Propagator $G=G(y_1,y_2;t)$ は次のように書ける.

$$G=E\left\{Ne^{\frac{im}{2\hbar}\int_0^t \dot{x}(s)^2ds+\frac{1}{2}\int_0^t \dot{B}(s)^2ds}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(x(s))ds}\delta(x(t)-y_2)\right\}.$$

ここで factor $\frac{1}{2}\int_0^t \dot{B}(s)^2ds$ はホワイトノイズ測度に対する flattenning の働きをさせるために用いた (2.3 節による).

例. 調和振動子の場合.

ポテンシャル $V(x)$ は

$$\frac{1}{2}g\left(y(s)+\sqrt{\frac{\hbar}{m}}B(s)\right)^2$$

となる. これにホワイトノイズ $\dot{B}(u)$ に関する chaos expansion を適用する.

$\frac{1}{2}g$ を除くと $(y(s)+\sqrt{\frac{\hbar}{m}}B(s))^2$ の展開は

$$y(s)^2-\frac{\hbar}{m}s+2\sqrt{\frac{\hbar}{m}}y(s)\int_0^s\dot{B}(u)du+\frac{\hbar}{m}\int_0^s\int_0^s :\dot{B}(u)\dot{B}(v):\,dudv$$

となる.

こうして, $y_1=0$ とし, $G(0,y_2,t)$ を求める計算は, 被積分関数の指数部分は $\dot{B}(s)$ の 2 次関数となった. あと δ 関数の部分は, もとの固定端ブラウン運動に戻ってもよいし, S 変換など他の方法もある. 最終的に

$$G(0,y_2,t)=\left(\frac{m}{2\pi\hbar sin\omega t}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar}y_2^2 ctg\omega t\right]$$

に到達する.

§4. 展開

Propagator を求める我々の方法で Potential V を一般化する種々の試みがなされてきた.

BiBOS: Examples of their publications:

M. de Faria, J. Potthoff and L. Streit, The Feynman integrand as a Hida distribution. J. Math. Phys. 22 (1991) 2123-2129.

M. Grothaus, D.C. Khandekar and J.L. da Silva, The Feynman integral for time-dependent anharmonic oscillators. J. Math. Phys. 38 (1997), 3278-3299.

T. Kuna, L. Streit and W. Westerkamp, Feynman integrals f or a class of exponentially growing potentials. J. Math. Phys. 39 (1998), 4476-4491.

M. Grothaus and L. Streit, Construction of relativistic quantum fields in the framework of white noise analysis. J. Math. Phys. 40 (1999) 5387-5405.

M. de Faria, M.J. Oliveira and L. Streit, Feynman integrals for non-smooth and rapidly growing potengtials. J. Mathy. Phys. 46 (2005) 063505.

M. Griyhaus, L. Streit, A. Vogel, Feynman integrals as Hida distributions : The case of non-perturbative potentials. (preprint)

その他

Central Visayan Institute, Philippines,

C.C. Bernido (Director), M.V. Carpio-Bernido, et al.

Milano, Italy

Albeverio-Hahn-Sengupta. Applications to Chern-Simons Action integrals.

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, The principles of quantum mechanics. 4th ed. 1957 (1st ed. 1930), Oxford Univ. Press.

[2] R. P. Feynman, Space-time approach to non-reativistic quantum mechanics. Review of Modern Physics. 20 (1948). 367-387.

[3] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals. McGraw-Hill. 1965.

[4] I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, Integration in functional spaces and its applications in quantum physics. Usp. Mat. Nauk. 11 (1), (1956), 77-114. Math. Phys. 1 (1960), 48-69.

[5] T. Hida, Analysis of Brownian functionals. Carleton Math. Lecture Notes no. 13, Carleton University, 1975.

[6] 飛田武幸, ブラウン運動, 岩波書店, 1975; Brownian Motion, Springer-Verlag, 1980, 増補版 2008.

[7] 飛田武幸, 確率論の基礎と発展, 共立出版, 2010.

[8] T. Hida and L. Streit, Generalized Brownian functionals. Proc. VI-th Conf. on Math. Phys. Berlin, (1981).

[9] T. Hida and Si Si, Lectures on white noise functionals. World. Sci. Pub. Co. 2008.

[10] T. Hida, Si Si and T. Shimizu, The $\dot{B}(t)$'s as idealized elemental random variables. Volterra Center Notes N.614. 2008.

[11] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars. 1948. 2ème ed. with supplement 1965.

[12] P. Lévy, A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions. Proc. 3rd Berkely Symp. on Math. Stat. Probab. vol.II (1956), 133-175.

[13] M. Masujima, Path integral and stochastic processes intheoretical phusics, Feshbach Pub. Co. 2007,

[14] G. Roepstorff, Path integral approach to Quantum Physics, An Introduction. Springer. 1994.

[15] Si Si, Introduction to Hida distributions. World Sci. Pub. Co. 2010, to appear.

[16] Si Si Win Win Htay and L. Accardi, $\mathcal{T}$-transform of Hida distribution and factorizations. Volterra Center Note, Feb. 2009, N. 625, 1-14.

[17] L. Streit and T. Hida, Generalized Brownian functionals and the Feynman integral. Stochastic processes and their applications. 16 (1983), 55-69.