

超局所解析から見た完全 WKB 解析入門

青木 貴史 (Takashi Aoki)*

§ 1. はじめに

超局所解析と完全 WKB 解析は密接に関係している。超局所解析は微分方程式の解の特異性の余接束上での解析を一つの柱とする。一方、完全 WKB 解析では微分方程式の解の大域的性質を形式解とその Borel 和の活用により解析する。ともに複素解析的カテゴリーにおける微分方程式を主たる研究対象としているが、目的および手法は一見異なる。両者の接点から出発して完全 WKB 解析への一つのアプローチを与えるのが本稿の目的である。完全 WKB 解析に関する教科書と呼べるものは現時点では [10] (英訳が AMS から出ている) のみである。超局所解析に馴染みのある院生・研究者が [10] を読む際に本稿が参考になれば幸いである。本稿の内容は主に [3], [4], [7], [8], [10], [11] に依っているが、本稿の入門的性格から引用文献は限定的である。原典については各参考文献に引用された文献表を参照されたい。

超局所解析の主たる道具として超局所微分作用素 (microdifferential operator) が挙げられる ([3] およびその文献参照) これは通常

$$(1.1) \quad P(x, D) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, D)$$

のように書かれる。この概念が導入された頃は擬微分作用素 (pseudo-differential operator) と呼ばれていたが、 C^∞ カテゴリーにおける擬微分作用素の定義との整合性に欠けるため呼称が変更された。大まかな定義は次節で与える。

完全 WKB 解析における主役の一つは WKB 解である:

$$(1.2) \quad \psi(x, \hbar) = \exp \frac{1}{\hbar} \int T(x, \hbar) dx$$

WKB 解は WKB シンボルや準古典解などとも呼ばれる (ただし、意味が違うことがある)。ここで $\hbar$ は Planck 定数 h を 2π で割ったものを表す。WKB は Wentzel, Kramers, Brillouin の頭文字であり、量子力学の創成期に Schrödinger 方程式の解を表現するシンボルあるいは近似解

2000 Mathematics Subject Classification(s): 34E20, 34M40, 47G30

キーワード: exact WKB analysis, microdifferential operators

*近畿大学理工学部。

として用いられたのが始まりである。あと一名 Jeffreys の頭文字を加えて JWKB と書かれることもある。

これら二つの対象の関係を単純化して理解するには $\hbar = D_y^{-1}$ と考えればよい。ここで D_y^{-1} は y 変数に関する微分作用素の逆であり、 y は形式的冪級数の Borel 変換の変数を表す。これについては第3節で解説する。

§2. 超局所微分作用素

初めに超局所微分作用素の定義を復習しておく。以下に与えるものは厳密な定義とはいえないが、本稿の理解には十分である。

X を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし、 X の点を $x = (x_1, \dots, x_n)$ で表す。 X の余接束 $T^*X = X \times \mathbb{C}^n$ の座標を $(x, \xi) = (x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ と書く。 Ω を T^*X の開部分集合で ξ 方向に錐状なものとする。

定義 2.1. Ω で定義された超局所微分作用素とは次の条件を満たす関数列 $\{P_{m-j}(x, \xi)\}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$; m は与えられた整数) である:

- (1) 各 $P_k(x, \xi)$ ($k = m, m-1, m-2, \dots$) は Ω で正則な関数で ξ に関し k 次斉次である。
- (2) 任意のコンパクト集合 $\omega \subset \subset \Omega$ に対し定数 $C > 0$ が存在して次の評価を満たす。

$$(2.1) \quad \sup_{\omega} |P_{m-j}(x, \xi)| \leq j! C^{j+1}$$

この擬微分作用素を

$$(2.2) \quad P(x, D) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, D)$$

あるいは

$$(2.3) \quad :P(x, \xi): = \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, \xi):$$

などと表記する。 m は階数と呼ばれる。形式和

$$(2.4) \quad P(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, \xi)$$

をこの超局所微分作用素の表象という。

取り敢えず m は整数としたが、後に半奇数の場合も現れる。定義はこの場合も同じである。作用素としての意味付けは以下のように考える。簡単のため $m = 0$ とする。また、 Ω は次の形であると仮定する:

$$\Omega = \{(x, \xi); |x| < c, |\xi_i| < c|\xi_n| \ (i = 1, 2, \dots, n-1)\}$$

ただし、 $c > 0$ はある定数である。このとき $P_{-j}(x, \xi)$ は

$$P_{-j}(x, \xi) = \sum_{\alpha'} p_{-j, \alpha'}(x) \xi_n^{-j} \left(\frac{\xi'}{\xi_n} \right)^{\alpha'}$$

の形に展開できる. ただし, $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\xi'^{\alpha'} = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ とおいた. このとき正則関数 $f(x)$ への作用は

$$P(x, D)f(x) = p_{0,0}(x)f(x) + \sum_{j+|\alpha'|>0} \frac{p_{-j,\alpha'}(x)}{(j+|\alpha'|-1)!} \int_a^{x_n} (x_n-t)^{j+|\alpha'|-1} \partial'^{\alpha'} f(x', t) dt$$

により定める. a は f の正則域に応じて適当に選ばれた定数である. また多重指数に関する慣用的用法を用いた. 例えば $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\partial'^{\alpha'} f(x', t) = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} f(x', t)$, $|\alpha'| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$ 等である. 直感的にはこの作用は表象 $P(x, \xi)$ のところに微分作用素 $D = (D_1, \dots, D_n)$ ($D_j = \partial/\partial x_j$) を代入したものに他ならない. ただし, 代入する際に変数 ξ はすべて独立変数 x より右側に持ってゆく. また D_n の負冪は積分作用素と考える. この作用は関数の正則域を適切に設定すれば, 正則関数を法として well-defined となる. つまり特異性を保存する.

超局所微分作用素を取り扱う際に次の定理は重要である.

定理 2.2 (Leibniz 則). 2 つの超局所微分作用素

$$P(x, D) = :P(x, \xi): = : \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, \xi):$$

$$Q(x, D) = :Q(x, \xi): = : \sum_{j=0}^{\infty} Q_{m'-j}(x, \xi):$$

の結合は次で与えられる.

$$P(x, D)Q(x, D) = : \exp(\partial_\xi \cdot \partial_y) P(x, \xi + \zeta) Q(x + y, \xi) |_{\zeta=y=0} :$$

$$= : \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|+k+l=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha P_{m-k}(x, \xi) \cdot \partial_x^\alpha Q_{m'-l}(x, \xi) :$$

超局所微分作用素の結合の定義を正確に与えなかったので Leibniz 則の証明は述べないが, 上記の正則関数への作用を Q, P と続けて行うと考えれば, 通常の Leibniz 則に不定積分が付け加わっただけである.

§ 3. WKB 解

1 次元の定常的 Schrödinger 方程式は

$$\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + (U(x) - E) \right) \psi = 0$$

の形をしている. 以下では $\hbar^{-1} = \eta$, $Q(x) = U(x) - E$ とおいて

$$(3.1) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x) \right) \psi = 0$$

という形の常微分方程式を考える。\$Q\$ は有理関数であると仮定する。また、\$\eta\$ は大きなパラメータを表す。(3.1) の解が

$$(3.2) \quad \psi = \exp \int S(x, \eta) dx$$

の形をしていると仮定する。(3.2) を (3.1) に代入して得られる Riccati 型方程式

$$(3.3) \quad \frac{dS}{dx} + S^2 = \eta^2 Q(x)$$

は

$$S = \sum_{j=-1}^{\infty} \eta^{-j} S_j = \eta S_{-1} + S_0 + \eta^{-1} S_1 + \eta^{-2} S_2 + \cdots$$

の形の形式解を持つことが容易に判る。実際、この展開を (3.3) に代入して \$\eta\$ の冪の係数を比較すれば

$$\begin{aligned} S_{-1}^2 &= Q(x) \\ S'_l + \sum_{j+k=l} S_j S_k &= 0 \quad (l = -1, 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が得られ、これを解いて

$$\begin{aligned} S_{-1} &= \pm \sqrt{Q(x)} \\ S_{l+1} &= -\frac{1}{2S_{-1}} (S'_l + \sum_{k=0}^l S_k S_{l-k}) \end{aligned}$$

となる。つまり、\$S_{-1}\$ の分枝を決めると \$S_l\$ (\$l \ge 0\$) は帰納的に定まる。このようにして (3.1) の形式解

$$\psi = \exp \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \eta^{-j} \int S_j(x) dx \right)$$

が得られる。各 \$S_j\$ は \$Q(x)\$ の零点、特異点を除く領域で解析的であるが、多価性を持ちうる。この構成は初等的であるが、形式級数 \$S\$ は一般には発散級数となる。しかし発散の程度は解析的に意味付け可能な範囲にある。複素平面から \$Q\$ の特異点と零点を除いた領域の任意のコンパクト集合 \$K\$ に対して定数 \$C > 0\$ が存在して

$$\sup_K |S_j(x)| \leq (j+1)! C^{j+2} \quad (j = -1, 0, 1, 2, \dots)$$

という評価を満たすことが証明できる。この評価は超局所微分作用素の定義に現れたもの (2.1) と同等である。すなわち、前節の設定で \$n=2, x_1=x, x_2=y, \xi_1=\xi, \xi_2=\eta\$ と考えれば

$$S(x, \eta) = \sum_{j=-1}^{\infty} S_j(x) \eta^{-j}$$

は適当な領域で定義された 1 階の超局所微分作用素の表象となる。これを \$x\$ について積分して指数関数に代入したのが WKB 解である。積分で (2.1) の形の増大度評価は変わらない。また、0 階超局所微分作用素の表象を指数関数に代入したものは再び 0 階超局所微分作用素の表象と

なる。ただし、 $S(x, \eta)$ は 1 階である。従って高々 0 階の部分 (次式右辺は左辺を素朴に展開した式である)

$$\exp \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j} \int S_j(x) dx \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j} g_j(x)$$

と 1 階部分

$$\exp \left(\eta \int S_{-1}(x) dx \right)$$

は別に考えて、1 階の微分作用素の指数関数は y 変数に関する平行移動 $y \rightarrow y + \int S_{-1}(x) dx$ の表象と考える。このように考えると WKB 解

$$(3.4) \quad \psi = \exp \left(\eta \int S_{-1}(x) dx \right) \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j} g_j(x)$$

は 0 階超局所微分作用素と平行移動 $y \rightarrow y + \int S_{-1} dx$ の合成作用素

$$(3.5) \quad : \psi : = \exp \left(\int S_{-1}(x) dx D_y \right) \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) D_y^{-j}$$

の表象を定める。この表象は ξ と y には依存しないという特別な形をしている。微分方程式 (3.1) の解を考えているのだから、作用素というよりは関数と見なしたい。そのためには D_y をパラメータ η と見なし、 x の関数として作用素

$$-D_x^2 + \eta^2 Q(x)$$

を作用させたときに消えるものを (3.1) の WKB 解と考えるのである。正確な定義については定義 7.3 で述べる。

Riccati 型方程式 (3.3) の形式解 S を η の冪の偶奇に応じて分解する:

$$S = S_{\text{even}} + S_{\text{odd}}$$

これを (3.3) に代入して η の奇数冪の項を比較すると

$$S_{\text{even}} = -\frac{S'_{\text{odd}}}{2S_{\text{odd}}}$$

という関係式が得られる。従って S_{even} の積分として

$$\int S_{\text{even}} dx = -\frac{1}{2} \log S_{\text{odd}}$$

が取れる。これを用いると $a \in \mathbb{C}$ を適当に選んで

$$\psi = \exp \int (S_{\text{even}} + S_{\text{odd}}) dx = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \int_a^x S_{\text{odd}} dx$$

の形に積分を規格化できる。以下、WKB 解というときには、この規格化を採用する。 S_{-1} の分枝を取り替えると S_{odd} の符号が変わるので、(3.1) の形式解の基本系として

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx \right)$$

を選ぶことができる. この記法を以下で用いる.

$$S_{\text{odd}} = \eta S_{-1} + \eta^{-1} S_1 + \eta^{-3} S_3 + \eta^{-5} S_5 + \cdots$$

であるから, $\frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}}$ を η に関して展開すると $\eta^{-\frac{1}{2}}$ が最高次となる. 従ってこの表象が定める超局所微分作用素は半奇数の階数を持つことに注意する.

§ 4. WKB 解の Borel 和

発散級数を用いて定義された WKB 解から解析的な真の解を得るには Borel 総和法を用いる.

WKB 解

$$(4.1) \quad \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx\right)$$

の指数関数内の η に関する 1 次部分 $\pm \eta \int_a^x S_{-1} dx$ を除くと, 残りの項

$$\pm \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-2j-1} \int_a^x S_{2j+1} dx$$

は η に関して高々 -1 次である. 従って $\psi_{\pm}$ は $1/\sqrt{S_{\text{odd}}}$ の項も併せて形式的に

$$(4.2) \quad \psi_{\pm} = \exp\left(\pm \eta \int_a^x S_{-1} dx\right) \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j-\frac{1}{2}} f_{\pm,j}(x)$$

の形に展開できる. このような形の, 指数関数項を伴う半奇数冪の形式的冪級数

$$(4.3) \quad \psi = \exp(\eta s(x)) \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j-\frac{1}{2}} f_j(x)$$

を考える. ただし, $s(x), f_j(x) (j=0, 1, 2, \dots)$ は適当な (共通の) 領域で定義された正則関数である. ψ に対して, その Borel 変換とは

$$(4.4) \quad \psi_B(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j(x)}{\Gamma(j + \frac{1}{2})} (y + s(x))^{j-\frac{1}{2}}$$

により定まる級数のことをいう. f_j について $\sup_K |f_j(x)| \leq j! C^{j+1}$ (K は f_j の正則域内の任意のコンパクト集合, $C > 0$ は K に応じて選べる定数) の形の評価が成り立つとき (4.4) は $|y + s(x)| < 1/C$ において収束し, (x, y) の正則関数を定める. この正則関数あるいはこれを解析接続したものも同じ記号で表し, (4.3) の Borel 変換という. $\psi_B(x, y)$ が $(x$ が動く範囲についての適当な条件の下に) y に関して $|\text{Im}(y + s(x))| < c$ ($c > 0$ はある定数), $\text{Re}(y + s(x)) > 0$ に解析接続可能で, 積分

$$\int_{-s(x)}^{\infty} \psi_B(x, y) \exp(-\eta y) dy$$

が収束するとき, ψ は Borel 総和可能であるといい, この積分で定義される関数を ψ の Borel 和と呼ぶ. (3.1) の WKB 解 (4.1) は適当な条件の下に Borel 総和可能となり, その Borel 和は (3.1) の正則解となることが知られている.

前節までの議論から分かるように, Borel 変換を考えることにより超局所解析と WKB 解が結びつく. 従って, 微分作用素と Borel 変換の関係を見ておく. 次の基本関係式は定義から明らかである:

$$(4.5) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_B = \frac{\partial \psi_B}{\partial x}, \quad (x\psi)_B = x\psi_B$$

$$(4.6) \quad (\eta\psi)_B = \frac{\partial \psi_B}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_B = -y\psi_B$$

従って (3.1) の WKB 解 $\psi_{\pm}$ の Borel 変換 $\psi_{\pm,B}$ は偏微分方程式

$$(4.7) \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_B(x, y) = 0$$

を満たす. この偏微分方程式は $\psi_{\pm,B}$ の解析に有用である. 従って, これは $\psi_{\pm}$ の Borel 和の解析にも役立つ.

§5. Airy の微分方程式

前節までで説明した枠組みが実際の方程式の解析にどのように使われるのか. 大きなパラメータを持つ Airy の微分方程式

$$(5.1) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 x \right) \psi = 0$$

を例に取って解説する. WKB 解

$$(5.2) \quad \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left(\pm \int_0^x S_{\text{odd}} dx \right)$$

の表示に現れる S_{odd} やその積分を数項求めるのは容易である:

$$(5.3) \quad S_{-1} = \sqrt{x}, \quad S_1 = -\frac{5}{32}x^{-\frac{5}{2}}, \quad S_3 = -\frac{1105}{2048}x^{-\frac{11}{2}}, \dots$$

$$(5.4) \quad \int_0^x S_{\text{odd}} dx = \eta \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \eta^{-1} \frac{5}{48} x^{-\frac{3}{2}} + \eta^{-3} \frac{1105}{9216} x^{-\frac{9}{2}} + \dots$$

ただし, 原点からの積分は, 適当な分枝の選択のもとに, x を出発し, 原点を正の向きに 1 回まわって x に戻る周回積分の半分と定めている. (5.3), (5.4) を見ると形式冪級数として $\psi_{\pm} = \sqrt{x} \phi_{\pm}(\eta x^{\frac{2}{3}})$ の形をしていることは明らかである. 従って $\psi_{\pm}$ は形式的に偏微分方程式系

$$(5.5) \quad \begin{cases} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 x \right) \psi_{\pm} = 0, \\ \left(2x \frac{\partial}{\partial x} - 3\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - 1 \right) \psi_{\pm} = 0 \end{cases}$$

を満たす. (4.5), (4.6) により $\psi_{\pm}$ の Borel 変換 $\psi_{\pm,B}$ は偏微分方程式系

$$(5.6) \quad \begin{cases} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_{\pm,B} = 0 \\ \left(2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 2 \right) \psi_{\pm,B} = 0 \end{cases}$$

を満たすことがわかる。第2式より、ある関数 $H_{\pm}$ が存在して

$$\psi_{\pm,B} = \frac{1}{x} H_{\pm}(y/x^{\frac{3}{2}})$$

と書ける。さらに $1/2$ だけ平行移動して $s = \frac{3y}{4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}$ とおくと

$$\psi_{\pm,B} = \frac{1}{x} h_{\pm}(s)$$

の形であるとしてよい。ここに現れた $u = h_{\pm}$ は次の微分方程式を満たす:

$$(5.7) \quad \left(s(1-s) \frac{d^2}{ds^2} + \left(\frac{3}{2} - 3s \right) \frac{d}{ds} - \frac{8}{9} \right) u = 0$$

これは超幾何微分方程式であり、解の基本系として

$$(5.8) \quad \begin{cases} u_1 = F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}; s\right) \\ u_5 = s^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; s\right) \end{cases}$$

が選べる。ここで $F(\alpha, \beta, \gamma; s)$ は超幾何関数を表す。(u_1, u_5 の記号は [9] に従った。) (5.7) の解は一般に $s = 0, 1$ に特異点を持つが、これは (x, y) 座標では曲線 $9y^2 = 4x^3$ に対応し、 $\psi_{\pm,B}$ が満たす偏微分方程式 (5.6) 第1式の原点を通る陪特性曲線に他ならない。 $x\psi_{\pm,B}$ は u_1, u_5 の1次結合を用いて書けるが、展開の初項を比較して

$$(5.9) \quad \psi_{+,B} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} u_5$$

であることがわかる。 $\psi_{-,B}$ については、展開の中心が $s = 1$ に相当するので別の解の基本系

$$(5.10) \quad \begin{cases} u_2 = F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}; 1-s\right) \\ u_6 = (1-s)^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; 1-s\right) \end{cases}$$

を用いた方が簡単に書ける。 $s = 1$ における展開を比較すれば

$$(5.11) \quad \psi_{-,B} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \frac{i}{x} u_6$$

が得られる。従って $\psi_{\pm}$ の Borel 和を $\Psi_{\pm}$ で表すと以下のような式が得られる:

$$(5.12) \quad \Psi_{\pm}(x, \eta) = \int_{\mp a(x)}^{\infty} \psi_{\pm,B}(x, y) \exp(-y\eta) dy$$

ただし、 $\mp a(x) = \mp \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ および

$$\begin{aligned} \psi_{+,B}(x, y) &= \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{\pi}x} \left(\frac{1}{2} + \frac{3y}{4x^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{3y}{4x^{\frac{3}{2}}}\right), \\ \psi_{-,B}(x, y) &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}x} \left(\frac{1}{2} - \frac{3y}{4x^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{3y}{4x^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

であり、積分路は実軸に平行に取り無限遠に向かうものとする。実は (5.12) には曖昧さが残っている。まず、積分路上に被積分関数の特異点があるときは避けなければならない。特異点が

積分路の近くにあるとき、その位置が積分路の上か下かにより積分が定める正則関数は意味が変わってくる。これらをもう少し精密に議論するためには被積分関数の特異性 (x を固定したときの y についての特異性) を詳しく調べる必要がある。超幾何関数の特異点は詳しくわかるので、その情報を活用する。

注意 1. ここに現れた超幾何関数は初等超越関数を用いて書き下せる。例えば

$$F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; s\right) = \frac{\cos\left(\frac{2}{3}\sin^{-1}\sqrt{s}\right)}{2s\sqrt{1-s}}$$

となる。さらに s の代数関数であることも判る。これらの事実は超幾何微分方程式から得られる情報に比べると活用しにくい。例えば Airy 関数の積分表示と WKB 解の関係を書き下す際には有効に利用できる。

超幾何関数の接続公式の一つである関係式 ([9] 参照)

$$(5.13) \quad u_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} u_2 + \frac{1}{2} u_6$$

を用いれば $\psi_{\pm, B}$ の関係

$$(5.14) \quad \psi_{+, B} = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} u_2 + \frac{i}{2} \psi_{-, B}$$

が得られる。 $s=1$ において u_2 は正則、 $\psi_{-, B}$ は分岐するから $\psi_{+, B}$ は $s=1$ 、すなわち $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ において特異点をもち、そこにおける特異部分は $i/2 \psi_{-, B}$ であることがわかる。従って、 $\psi_{+, B}$ を積分するときには、この特異性に注目する必要がある。 $a(x)$ の形より Ψ_+ を定める積分路上に特異点に乗る可能性があるのは

$$\operatorname{Im} x^{\frac{3}{2}} = 0$$

のとき、すなわち $\arg x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \dots$ のときである。これは 3 本の原点を始点とする半直線を表す。これらの半直線を (5.1) の **Stokes 半直線** という。また、 $\psi_{\pm, B}$ の 2 つの特異点を重ねる点を **変わり点** という。今の場合は明らかに $x=0$ が変わり点である。変わり点と Stokes 半直線は大きなパラメータを自然な形で含む微分方程式に対して一般的に定義され (Stokes 半直線は一般化されて **Stokes 曲線** と呼ばれる)、完全 WKB 解析において基本的な役割を果たす。これらの概念は漸近解析の分野でも基本的であるが、Stokes 曲線については定義が異なる場合があるので注意が必要である。

さて、第 4 象限実軸近くにある x が、虚軸に平行に移動して実軸を横切り第 1 象限に移動する際に $\psi_{+, B}$ の特異点および (5.12) における Ψ_+ を定める積分路の動きを観察する。まず、 x が図 1 の黒丸の位置にあるときを考える。図 1 において原点から出る 3 本の半直線が Stokes 半直線を表す。図 2 は y 平面を表す。 $\psi_{+, B}$ の特異点の一つは図 2 の第 2 象限にある黒丸であり、そこから右に伸びる灰色の半直線が Borel 和を取る際の積分路を表す。第 4 象限にあるやや小さな黒丸は $\psi_{+, B}$ のもう一つの特異点を表す。

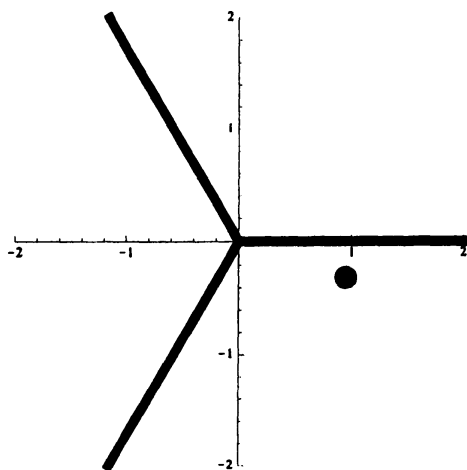


図 1

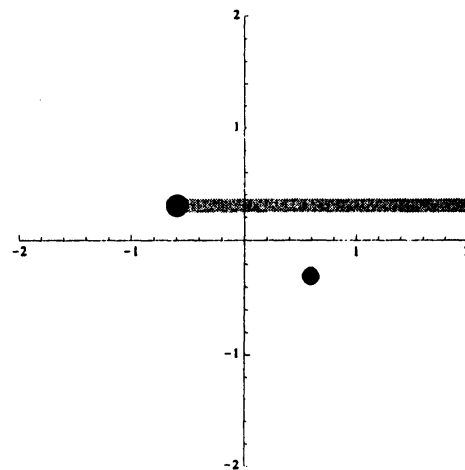


図 2

x が原点を中心に反時計回りに回転するように動くとき $\psi_{+,B}$ の y 平面での2つの特異点は、やはり原点を中心として共に反時計回りに回転する。 x が実軸を横切る瞬間(図3)に y 平面の特異点は実軸上に並ぶ(図4)。

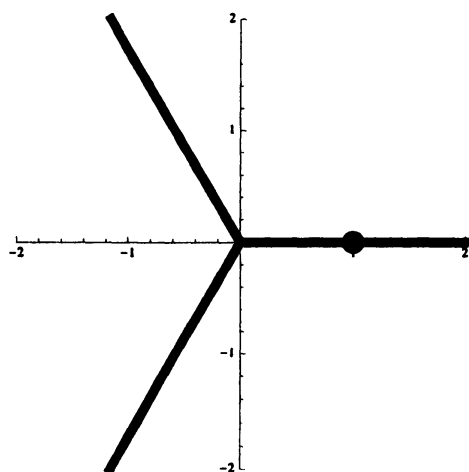


図 3

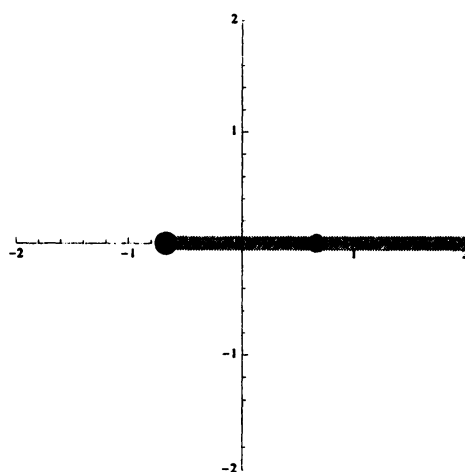


図 4

さらに x が回転して第1象限に移る(図5)と特異点は図6の配置となる。

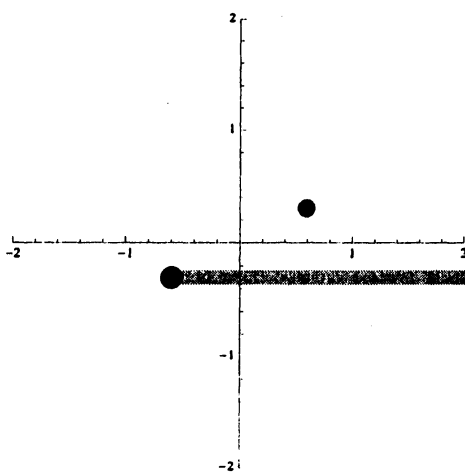
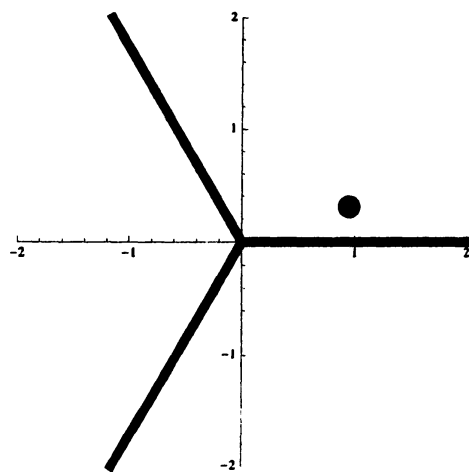


図 5

図 6

図 2 と図 6 では明らかに積分路が位相的に異なり, Borel 和の意味が違ってくる. 一方, 同じ Stokes 領域 (Stokes 半直線を協会とする領域) では積分路は同じホモトピー類に属することが判り, Borel 和の解析的意味は各 Stokes 領域で確定している. そこで図 1 の x を含む Stokes 領域で定義された $\psi_{\pm}$ の Borel 和を $\Psi_{\pm}^I$, 図 5 の x を含む Stokes 領域で定義された $\psi_{\pm}$ の Borel 和を $\Psi_{\pm}^{II}$ と書く. Ψ_{+}^I を実軸正の部分を超えて解析接続し第 1 象限を含む Stokes 領域で考えたとき, その関数を定義する積分路は図 2 の積分路を, 特異点にぶつからないように連続変形して得られる図 7 のような路となる.

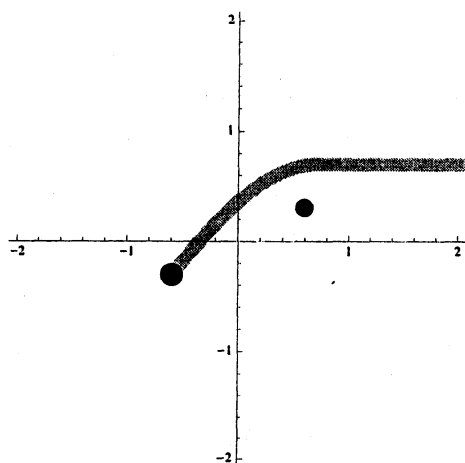


図 7

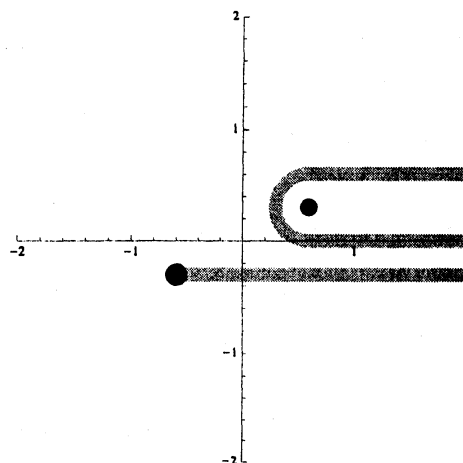


図 8

図 7 の積分路は連続的に変形して図 8 の 2 つの積分路の和に分解できる. ただし, 図 8 の積分路のうち半直線部分は実軸正の部分に平行に無限遠に向かい, 第 1 象限の特異点を囲む路は無限遠から原点近くに来て特異点を時計回りに迂回し, 再び無限遠に向かう. この部分の積分は $\psi_{+,B}$ の特異点 $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ におけるいわゆる discontinuity, つまり $y = -\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ における $\psi_{+,B}$ の芽の解析接続の特異点 $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ を左右それぞれから迂回したものの差を図 9 の積分路に沿って無限遠まで積分したものとなる.

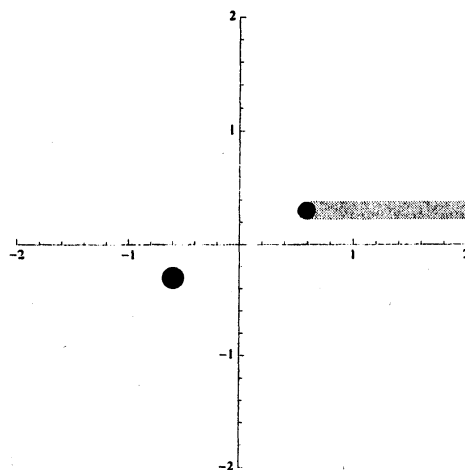


図 9

$\psi_{+,B}$ は $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ において平方根の分岐をするので, discontinuity は $i\psi_{-,B}$ と一致する. 結局 (5.14) より関係式

$$(5.15) \quad \Psi'_+ = \Psi''_+ + i\Psi''_-$$

を得る. 同様の考察から

$$(5.16) \quad \Psi'_- = \Psi''_-$$

を得る. Ψ'_- を定義する積分路上には図 3 の状況でも他の特異点に乗らないから明らかである. これらを併せて WKB 解 (の Borel 和の) 接続公式という.

ここでは Stokes 半直線 $(0, \infty)$ を原点から見て反時計回りに超える場合を考察したが, 他の Stokes 半直線でも同様である. $\psi_{\pm}$ のうち $\operatorname{Re} x^{\frac{3}{2}} > 0$ (resp. $\operatorname{Re} x^{\frac{3}{2}} < 0$) のとき ψ_+ (resp. ψ_-) が優勢, 他方を劣勢と呼ぶことにすると Borel 和で見れば Stokes 半直線上で優勢な方が劣勢な WKB 解を係数 i と共に拾い込み, 劣勢な WKB 解は変化しない. この接続公式は, Airy の微分方程式に限らず, 単純変わり点 ((3.1) における Q の単純零点) 近くでは, WKB 解の積分端点をその単純変わり点に取っておけば, 一般的に成り立つ. その理由を次節で見る.

§ 6. 単純変わり点の近傍における局所理論

微分方程式

$$(6.1) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x) \right) \psi = 0$$

を考える. ただし, Q は $x=a$ の近傍で定義された正則関数で $x=a$ において Q は単純な零点を持つとする. このとき, $x=a$ はこの方程式の単純変わり点であるという. 平行移動と相似変換によって $Q(x) = x(1 + O(x))$ と仮定しても一般性を失わない. このとき適当な変換 (独立変数および従属変数の変換) によって WKB 解を保ちながら (6.1) を Airy の微分方程式に変換できると考えるのは自然である. 実際, x の関数を係数とする η^{-1} の形式冪級数

$$z(x, \eta) = z_0(x) + \eta^{-1} z_1(x) + z_2(x) \eta^{-2} + \dots$$

が存在して z 変数で書いた Airy の微分方程式

$$(6.2) \quad \left(-\frac{d^2}{dz^2} + \eta^2 z \right) \varphi = 0$$

の WKB 解 $\varphi_{\pm}$ に対して

$$(6.3) \quad \psi_{\pm}(x, \eta) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\pm}(z(x, \eta), \eta)$$

は (6.1) の WKB 解となる. 変換の構成は, 次の式が成り立つように各 z_j を決めればよい:

$$(6.4) \quad \eta^2 Q(x) = \eta^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 z(x, \eta) - \frac{1}{2} \{z; x\}$$

ただし

$$\{z; x\} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} / \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} / \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$

は Schwarz 微分を表す.

この変換は形式的なものであるが, Borel 変換した先で見れば超局所微分作用素で表すことができる. 方程式 (6.1) に現れる微分作用素を Borel 変換したものを P_B と書く:

$$P_B = -D_x^2 + Q(y)D_y^2$$

変換 z の初項 $z_0 = z_0(x)$ の逆関数を $x = g(z_0)$ とし, z_0 を改めて z と書くことにする. P_B を (z, y) 座標で書くと

$$P_B = g'(z)^{-2} \left(-D_z^2 + zD_y^2 + \frac{g''(z)}{g'(z)} D_z \right)$$

となる. 変換 $z(x, \eta)$ の第 2 項以下

$$\eta^{-1}z_1(x) + \eta^{-2}z_2(x) + \dots$$

の Borel 変換を (-1) 階超局所微分作用と見なし, それを r とおく:

$$r(z, D_y) = z_1(g(z))D_y^{-1} + z_2(g(z))D_y^{-2} + \dots$$

WKB 解の変換

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\pm}(z(x, \eta), \eta)$$

における平行移動 $z \mapsto z + \eta^{-1}z_1 + \eta^{-2}z_2 + \dots$ は 0 階超局所微分作用

$$:\exp(r(z, \eta)\zeta): = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(z, D_y)^k}{k!} D_z^k$$

の作用と見なすことができる. ここで ζ は z の余接変数を表す. すなわち $:\zeta: = D_z$ である. このとき次が成り立つ.

定理 6.1 ([8]). 2 つの微分作用素

$$\tilde{P}_B = -D_z^2 + zD_y^2 + \frac{g''(z)}{g'(z)} D_z, \quad A = -D_z^2 + zD_y^2$$

に対して

$$X = :g'(z)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\partial r(z, \eta)}{\partial z} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp(r(z, \eta)\zeta):$$

$$Y = :g'(z)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\partial r(z, \eta)}{\partial z} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(r(z, \eta)\zeta):$$

とおくとき

$$\tilde{P}_B X = Y A$$

が成り立つ.

微分作用素 A は、もちろん Airy の方程式に現れる微分作用素の Borel 変換である。従って Airy の方程式の WKB 解の Borel 変換 $\varphi_{\pm,B}$ に対して超局所微分作用素 X の作用をしかるべく定めると $\psi_{\pm,B} = X\varphi_{\pm,B}$ に対して $P_B\psi_{\pm,B} = 0$ が成り立つ。ただし、この等号は正則関数を法としている。従って $\psi_{\pm,B}$ の特異性は $\varphi_{\pm,B}$ の特異性を見れば分かることになり、前節最後に述べたことが示される。Airy の方程式の Stokes 半直線に対応するのは

$$\operatorname{Im} \sqrt{Q(x)} dx = 0$$

の積分曲線で原点から出るものであり、これが (6.1) の原点から生じる Stokes 曲線と呼ばれるものになる。

Q が有理関数のとき、一般性の仮定の下に単純変わり点近傍での局所理論を貼り合わせることにより大域的な接続公式を得ることが可能となる。応用の詳細については [2], [10]などを参照。

§7. 高階への拡張

単純変わり点における局所理論は高階 (3 階以上) 微分方程式あるいは無限階の場合に拡張可能である。簡単のため次の形の微分方程式に話を限定する:

$$(7.1) \quad P\psi = P(x, \eta^{-1}D_x)\psi = \sum_{j \geq 0} a_j(x) \eta^{-j} D_x^j \psi = 0$$

ただし、 a_j は共通な領域 $U \subset \mathbb{C}$ で定義された正則関数であり、 $P(x, \zeta) = \sum_{j \geq 0} a_j(x) \zeta^j$ は ζ について整関数であると仮定する。このような形式的に無限階の微分作用素に対しても WKB 解を考えることができる。

定義 7.1. 形式的冪級数

$$(7.2) \quad S(x, \eta) = \eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \eta^{-2} S_2(x) + \cdots$$

に対して指数関数項付きの形式的冪級数

$$(7.3) \quad \psi = \exp \int S(x, \eta) dx$$

が (7.1) の WKB 解であるとは擬微分作用素 $P(x, D_y^{-1} D_x)$ の量子化接触変換

$$(7.4) \quad :\psi:^{-1} P(x, D_y^{-1} D_x) :\psi:$$

が右から D_x で割り切れるときをいう。

この定義の意味を説明するためには量子化接触変換の解説が必要であるが、詳細は略して (7.4) の計算法のみを与える。

命題 7.2 ([1]). 量子化接触変換 $:\psi:^{-1} P(x, D_y^{-1} D_x) :\psi:$ の表象は

$$(7.5) \quad \exp(\eta^{-1} \partial_z \partial_z) P(x, \zeta + A(x, z, \eta)) \Big|_{z=0}$$

ただし、 $T(x, \eta) = \int^x S(x, \eta) dx$, $A(x, z, \eta) = \frac{1}{z} (T(x+z, \eta) - T(x, \eta))$ である。

これを用いると 2 階の場合の Riccati 方程式にあたるものを無限階の場合に書き下すことができる。

定理 7.3 ([7]). (7.3) が (7.1) の WKB 解であるためには次の関係式が成り立つことが必要かつ十分である。

$$(7.6) \quad \exp(\eta^{-1} \partial_{\zeta} \partial_z) P \left(x, \zeta + \eta^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(k+1)!} \partial_x^k S(x, \eta) \right) \Big|_{z=\zeta=0} = 0$$

この式に (7.2) を代入して η に関して展開すると初項 S_{-1} の条件として

$$P(x, S_{-1}(x)) = 0$$

が得られる。これは解析的な方程式であるので、適当な仮定の下に局所的な解は存在するとしてよい。 $S_{-1}(x)$ が定まると第 2 項は $\partial_{\zeta} P(x, S_{-1}(x)) \neq 0$ ならば

$$S_0(x) = - \frac{\partial_{\zeta}^2 P(x, S_{-1}(x)) S'_{-1}(x)}{2 \partial_{\zeta} P(x, S_{-1}(x))}$$

の形で求めることができる。 $S_1, S_2, \dots$ も多少複雑にはなるが、逐次決められる。ここに現れた分母が消える点が変わり点の定義となる。

定義 7.4. $(x_*, \zeta_*) \in U \times \mathbb{C}$ に対して

$$P(x_*, \zeta_*) = \partial_{\zeta} P(x_*, \zeta_*) = 0, \quad P(x_*, \zeta) \neq 0 \quad (\zeta \neq \zeta_*)$$

のとき x_* を変わり点, ζ_* を特性値という。さらに

$$\partial_x P(x_*, \zeta_*) \neq 0, \quad \partial_{\zeta}^2 P(x_*, \zeta_*) \neq 0$$

のとき x_* は単純であるという。

この定義の下に単純変わり点の近傍においては無限階であっても WKB 解の接続問題は 2 階の場合に帰着する。それを見るために、まず Weierstrass の予備定理を用いて表象の分解を行う。 x_* を P の単純変わり点, ζ_* を特性値とすると ζ の整関数 $q(x, \zeta)$ で $q(x_*, \zeta_*) \neq 0$ を満たすものと x_* の近傍で正則な関数 $r_0(x), r_1(x)$ で $r_0(x_*) = r_1(x_*) = 0$ を満たすものを係数とする $\zeta - \zeta_*$ の 2 次多項式

$$(7.7) \quad r(x, \zeta) = (\zeta - \zeta_*)^2 + r_1(x)(\zeta - \zeta_*) + r_0(x)$$

が存在して

$$(7.8) \quad P(x, \zeta) = q(x, \zeta) r(x, \zeta)$$

と書ける。

定理 7.5 ([7]). 上で得られた $q(x, \zeta), r(x, \zeta)$ に対して $q(x, \eta^{-1} \zeta), r(x, \eta^{-1} \zeta)$ をそれぞれ主表象とする $\eta \neq 0$ で定義された超局所微分作用素 $Q(x, D_y^{-1} D_x, D_y), R(x, D_y^{-1} D_x, D_y)$ が存在して

$$(7.9) \quad P(x, D_y^{-1} D_x) = Q(x, D_y^{-1} D_x, D_y) R(x, D_y^{-1} D_x, D_y)$$

が成り立つ。

D_y を大きなパラメータ η にもどすと、微分作用素としての分解

$$P(x, \eta^{-1} D_x) = Q(x, \eta^{-1} D_x, \eta) R(x, \eta^{-1} D_x, \eta)$$

が得られたことになる.

$$R(x, \eta^{-1} D_x, \eta) = \eta^{-2} D_x^2 + R_1(x, \eta) \eta^{-1} D_x + R_0(x, \eta)$$

は 2 階の作用素であり、2 階微分方程式

$$(7.10) \quad R(x, \eta^{-1} D_x, \eta) \psi = 0$$

の WKB 解は

$$P(x, \eta^{-1} D_x) \psi = 0$$

の WKB 解となる. したがって、このような WKB 解、すなわち単純変わり点に関わる WKB 解に注目する限り無限階の場合でも接続問題を考察するには (7.10) を考察すればよく、この方程式は 1 階項を消すと局所理論により Airy の微分方程式に帰着される.

このように、単純変わり点近傍では無限階 (有限階を含む) であっても接続問題は考察可能であるが、大域的な接続問題は 3 階以上の方程式では Stokes 曲線の交差が起こり、難しくなる. これについては [5], [6] を参照されたい.

参考文献

- [1] Aoki, T., Quantized contact transformations and pseudodifferential operators of infinite order, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26** (1990), 505–519.
- [2] Aoki, T. and Iizuka, T., Monodromy matrices of a second order Fuchsian differential equation with five singular points, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B5** (2008), 117–127.
- [3] 青木貴史, 片岡清臣, 山崎 晋, 超関数・FBI 変換・無限階擬微分作用素, 共立出版 2004.
- [4] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., The Bender-Wu analysis and the Voros theory, *Special Functions, ICM-90 Satellite Conference Proceedings*, Springer, 1991, 1–29.
- [5] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations, “Analyse algébrique des perturbations singulières, I, Méthodes résurgentes” (Ed. Louis Boutet de Monvel), Hermann 1994, pp. 69–84.
- [6] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., On the exact WKB analysis for the third order ordinary differential equations with a large parameter, *Asian Journal of Mathematics*, **2** (1998), 625–640.
- [7] Aoki, T., Kawai, T., Koike, T. and Takei, Y., On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases, *Advances in Mathematics*, **181** (2004), 165–189.
- [8] Aoki, T., and Yoshida, J., Microlocal reduction of ordinary differential operators with a large parameter, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **29** (1993), 959–975.
- [9] A. Erdélyi (eds.), Higher transcendental functions, vol. 1, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, 1985.
- [10] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店 2008.

- [11] Voros, A., The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A*, **39** (1983), 211–338