

## 回転球面上の帯状流の分岐

### Bifurcation structure of zonal flow solutions on a rotating sphere

佐々木 英一 (京大・数理研),  
Eiichi SASAKI (RIMS, Kyoto Univ.),  
竹広 真一 (京大・数理研),  
Shin-ichi TAKEHIRO (RIMS, Kyoto Univ.),  
山田 道夫 (京大・数理研)  
Michio YAMADA (RIMS, Kyoto Univ.)

#### 概要

二次元回転球面上の流れは、惑星大気の帯状流の存在と関連し、また境界のない有界閉領域の流れの一例として興味深い。特に、球面調和関数  $Y_n^m$  で表わされる Rossby 波と呼ばれる基本解は 1970 年代に非粘性流の線形安定性が調べられたが、不安定化後の分岐は知られていない。我々は非回転・回転球面上において、球面調和関数  $Y_2^0, Y_3^0$  で表される 3 本のジェットからなる粘性帯状流の分岐構造を数値的に調べ 2 次元トーラスの場合 (Kolmogorov 問題) と比較して報告する。

## 1 はじめに

惑星大気の大規模な運動の振舞いを支配する大きな要因として、自転の効果と密度安定成層が考えられる。回転球面上の流れはこの二つの効果を取り入れた最も単純なモデルの一つである。この流れの性質を調べること、惑星大気特有の縞状構造を伴う東西帯状流を考察する試みが行われている。最近 Obuse ら [1] は、ランダムな強制外力が働く回転球面上の粘性 2 次元流の漸近状態を数値的に調べ、はじめに形成した複数本の東西ジェットを伴う帯状流が最終的に領域を覆う 2 本もしくは 3 本の東西ジェットからなる帯状流に漸近することを報告している。

では、東西ジェットを伴う帯状流の安定性はどのようになっているであろうか。回転球面上の 2 次元非圧縮非粘性流は球面調和関数  $Y_n^m$  で表される Rossby 波と呼ばれる基本解をもつ。特に、経度波数  $m = 0$  の解は  $n$  本の東西ジェットを伴う帯状流を表す。この帯状流の安定性は Baines[2], Skiba[3] らに調べられているが、不安定化後の分岐は未だ知られていない。そこで、本研究では非粘性流から粘性流へと問題を拡張して、回転球面上の 2 次元帯状流の安定性と不安定化後の分岐を調べる。

粘性流への拡張に伴い粘性項によって帯状流が散逸されることを防ぐため、帯状流と同じプロファイルを持つ外力を導入する。このような問題設定は Kolmogorov によって提唱された 2 次元トーラス上の平行流問題の球面への一般化である (以後 Kolmogorov 問題と呼ぶ)。この Kolmogorov 問題は、層流から乱流への遷移過程の典型例として、特に  $\sin$  型の外力によって駆動される平行流について解の安定性と分岐が詳しく調べられている。Iudovich[4] は縦に長い長方形領域内に横方向に流れる 2 本のジェットからなる平行流は大域的に漸近安定であることを示した。Meshalkin and Sinai[5] はこの平行流が線形不安定になるときその不安定モードは実固有値であることを証明した。さらに、Iudovich[4] はこの平行流からの分岐について定常解分岐が存在することを証明した。また、Okamoto and Shōji[6] は領域のアスペクト比、レイノルズ数を変えたとき分岐構造がどのように変わるか詳細に調べた。さらに、Kim and Okamoto[7] は正負 1 対の渦からなる定常解が強制外力の波数によらず安定に存在することを数値的に示唆した。

我々の興味は大きくわけて二つである。一つは、2 次元トーラス (Kolmogorov 問題) における分岐構造と比

較して、領域の幾何学的相違は分岐構造をどのように変えるか、という点である。特に Kim and Okamoto[7] が示唆するような正負 1 対の渦からなる安定定常解が球面上においても存在できるか否かを調べる。もう一つは回転効果が分岐構造をどのように変えるかという点である。回転効果によって帯状流の安定性はどのように変化するか、また不安定化後の非線形解のパターンやその安定性はどのように変化するかを調べる。

本論文は以下のように構成される。2 章では扱う支配方程式と計算方法について述べる。3 章では計算結果を述べる。まず非回転系における分岐構造を述べ、2 次元トーラスの場合と比較する。次に回転系における分岐構造を示す。4 章はまとめである。

## 2 支配方程式, 数値計算法

本研究で扱う支配方程式は、単位回転球面上での 2 次元非圧縮粘性流の渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{1}{R} \{(\Delta + 2)\zeta + (n_0(n_0 + 1) - 2)Y_{n_0}^0(\mu)\}, \quad (1)$$

である。ただし、 $t$  は時間、 $\lambda$  は経度、 $\mu = \sin \phi$  は  $\sin$  緯度、 $\Omega$  は系の回転角速度、 $R$  はレイノルズ数である。 $\Delta$  は単位球面上の水平ラプラシアン、 $J(A, B)$  は Jacobian  $J(A, B) = \partial_\lambda A \partial_\mu B - \partial_\mu A \partial_\lambda B$  である。 $\zeta$  は渦度、 $\psi$  は流れ関数で、 $\zeta = \Delta \psi$  である。速度  $\mathbf{u} = (u_\lambda, u_\mu)$  は  $u_\lambda = -\sqrt{1-\mu^2} \partial_\mu \psi$ ,  $u_\mu = 1/\sqrt{1-\mu^2} \partial_\lambda \psi$  で、 $Y_{n_0}^m(\lambda, \mu)$  は  $4\pi$  に正規化された球面調和関数で  $n_0 \geq 2$  である。なお、粘性項の  $+2$  は全角運動量を保存するための項である。渦度方程式 (1) は  $n_0$  本のジェットからなる帯状流

$$\zeta_0 = Y_{n_0}^0(\mu), \quad (n_0 \geq 2),$$

を解に持つ。

本研究は基本解  $Y_{n_0}^0(\mu)$  ( $n_0 = 2, 3$ ) の安定性、分岐構造を調べる。帯状流の不安定化後の分岐解は Newton 法を用いる。分岐した非線形解は定常進行波であるため、非線形解の位相速度を  $v_p$  とし  $\lambda' = \lambda - v_p t$  と座標変換した系で、非線形解について線形化した方程式を解く。Newton 法の収束判定については、修正量の絶対値の最大値が  $10^{-8}$  以下で Newton 法が収束したと見なした。問題を数値的に解くために、球面調和関数によるスペクトル法を用いる。例えば渦度は

$$\zeta = \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{m=-n}^n \zeta_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) = \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{m=-n}^n \zeta_n^m P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$$

と表される。ただし  $P_n^m(\mu)$  は 2 に正規化されたルジャンドル陪関数である。帯状流の線形安定性については切断波数を 106, 127 と変え、分岐解の導出とその線形安定性には切断波数を 21, 35, 42 と変えてその収束を確認した。特に解の臨界レイノルズ数の誤差は 0.1% 未満である。各切断波数における格子点数は、切断波数を  $N_T$ , 経度方向の格子点数を  $K$ , 緯度方向の格子点数を  $I$  として、 $K \geq 3N_T + 1, I \geq 3N_T/2$  となるように格子点数をとりエイリアジングを除いた。

### 3 結果

最も簡単な2本のジェットからなる帯状流  $Y_2^0(\mu)$  は, 任意のレイノルズ数  $R$  と回転角速度  $\Omega$  において擾乱のエネルギーとエンストロフィーの和が発散しないことから, 大域的に漸近安定であることを証明することができる. 一方, Kolmogorov 問題においては Iudovich[4] によって, 二次元トーラス  $(x, y) \in [-\pi/\alpha, \pi/\alpha] \times [-\pi, \pi]$  においてアスペクト比  $\alpha$  が  $\alpha \geq 1$  のとき, 強制外力  $\sin y$  によって  $x$  方向に駆動される2本のジェットを持つ平行流は大域的に漸近安定であることが知られている. 従って, 2本のジェット解が安定であることは領域の幾何学的な違いによらず共通した性質であるように思われる.

従って3本のジェットからなる帯状流  $Y_3^0(\mu)$  は不安定となりうる最も単純な帯状流である. 以下では帯状流  $Y_3^0(\mu)$  を  $S$  とよび, ある  $\Omega$  において  $R$  を増加させたときの  $S$  からの解の分岐を調べる. 調べたパラメータ範囲は回転角速度  $-6.0 \leq \Omega \leq 2.2$ , レイノルズ数  $10 \leq R \leq 1000$  である.  $S$  の渦度分布と速度の経度成分を Fig.1 に示す.

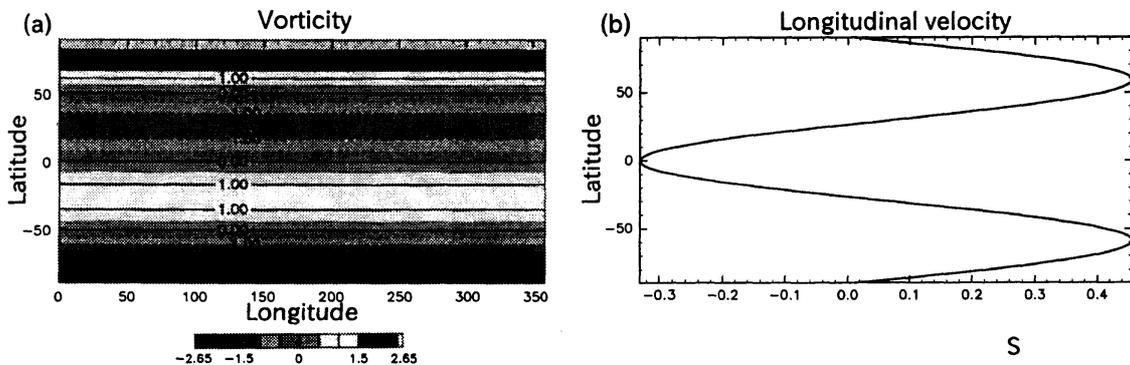


Fig.1  $S : \zeta_0 = Y_3^0(\mu)$ . (a): Vorticity. (b) Longitudinal velocity.

非線形解の特徴を明かにするために, それぞれの非線形解の渦度分布と東西平均した速度の経度成分  $\bar{u}_\lambda(\mu)$  を示す. ここで  $\bar{\cdot}$  は東西平均を表し,

$$\bar{u}_\lambda(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\lambda(\lambda, \mu) d\lambda$$

と定義する.

#### 3.1 非回転系における分岐構造

Fig.2 は回転のない場合の  $S$  の分岐図と対応する各分岐の位相速度である. 各分岐解のあるレイノルズ数での渦度分布と東西平均した速度の経度成分を Fig.3 に示す. Fig.3-右列において, 破線は  $S$  の速度の経度成分である.

$R = 26.13$  で  $S$  は不安定化し東西方向波数 2 の定常進行波解  $TW1$  (Traveling Wave 1) が超臨界分岐する.  $R = 70$  における  $TW1$  の渦度分布と東西平均した速度の経度成分を Fig.3-(a), (b) に示す.  $TW1$  の渦度分布 Fig.3-(a) は赤道反対称性を持たない. 東西平均した速度の経度成分 Fig.3-(b) は赤道を中心とした対称性を持ち,  $S$  に比べ小さい. さらに  $R$  が増加すると,  $R = 70.66$  でこの流れも不安定化し, 東西方向波数 2 で定常進行波解  $TW2$  が超臨界分岐する.  $R = 100$  における  $TW2$  の渦度分布と東西平均した速度の経度成分を Fig.3-(c), (d) に示す.  $TW2$  の渦度分布 Fig.3-(c) は北極まわりに正の強い渦が存在する. 東西平均した速度の経度成分 Fig.3-(d) は赤道対称性が崩れ北半球に東向き of ジェットが存在するが,  $S$  に比べ小さい. なお, 極を中心とした反対称な渦度分布, すなわち南極まわりに強い負の渦が存在する解もまた  $TW2$  である. さら

に  $R$  が増加すると、この流れは  $R = 103.2$  で Hopf 不安定性を生じる。なお  $TW1$  は  $R = 203.8$  で再安定化し不安定解  $TW3$  が (亜臨界) 分岐する。  $R = 500$  における  $TW3$  を Fig.3-(e),(f) に示す。  $TW3$  の渦度分布 Fig.3-(e) は  $TW1, TW2$  の渦度分布 Fig.3-(a),(c) に比べ中緯度の負の渦が局在化している。東西平均した速度の経度成分 Fig.3-(f) は  $TW2$  と同様に  $TW1$  のもつ赤道対称性が崩れているが  $TW2$  に比べ振幅が小さい。なお、極を中心とした反対称な渦度分布からなる解もまた  $TW3$  である。  $TW1$  はその後  $R = 249.4$  で Hopf 不安定性を生じ、安定な定常進行波解は失われる。これら定常進行波の位相速度は、  $R \leq 1000$  において正であり、  $R$  の増加と共に減少する (Fig.2-(b))。

2次元トーラス  $(x, y) \in [-\pi/\alpha, \pi/\alpha] \times [-\pi, \pi]$  上の Kolmogorov 問題について Kim and Okamoto[7] は、アスペクト比  $\alpha = 0.7$  として  $x$  方向の強制外力の波数を  $k = 2, 3$  と変え  $2k$  本のジェットを持つ平行流からの分岐を数値的に調べた。平行流から分岐した解は、  $R$  が小さいとき複数個の渦からなるが  $R$  の増加とともに渦が結合し、充分大きな  $R$  で正と負の一对の渦からなる解になることを見出した。彼らは数値計算結果から、強制外力の波数によらず、充分大きな  $R$  において正と負の一对の渦からなる定常解 (unimodal solution) が少なくとも一つ存在するか、充分大きな  $R$  において安定解は正と負の一对の渦からなる解であろう、という示唆を与えている。

我々は2次元トーラス上の Kolmogorov 問題の球面上へ一般化である問題設定で帯状流の分岐を調べたが、本研究で用いたパラメータの範囲では高レイノルズ数で安定な定常解を見出すことはできず、また正負一对の渦からなる定常解も見出されなかった。これは Kim and Okamoto[7] の主張とは異なる結果であり、領域の幾何学的な違いにより2次元トーラスと球面における分岐構造が異なることを示している。

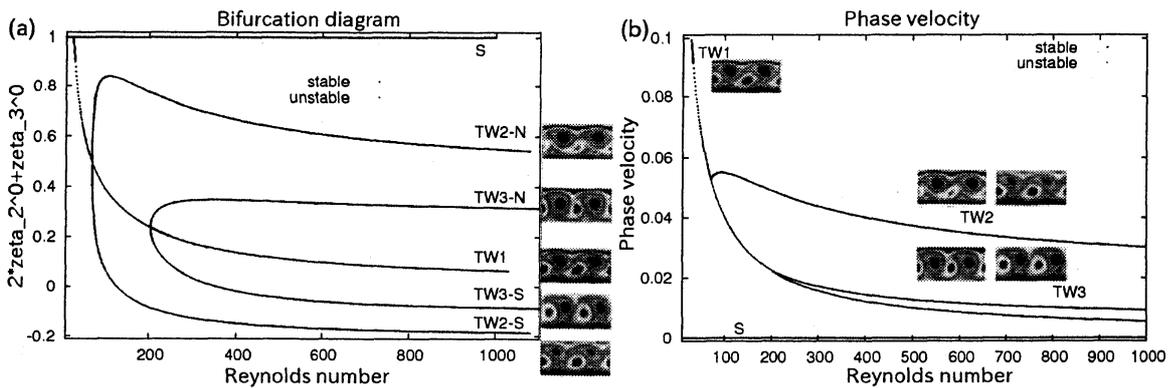


Fig.2 Bifurcation diagram and phase velocity at  $\Omega = 0.0$  Blue asterisks and red crosses indicate stable and unstable branches, respectively. (a):Bifurcation diagram of zonal flow  $Y_3^0$  on a non-rotating sphere. (b):Phase velocity of each solution in Fig.1-(a)

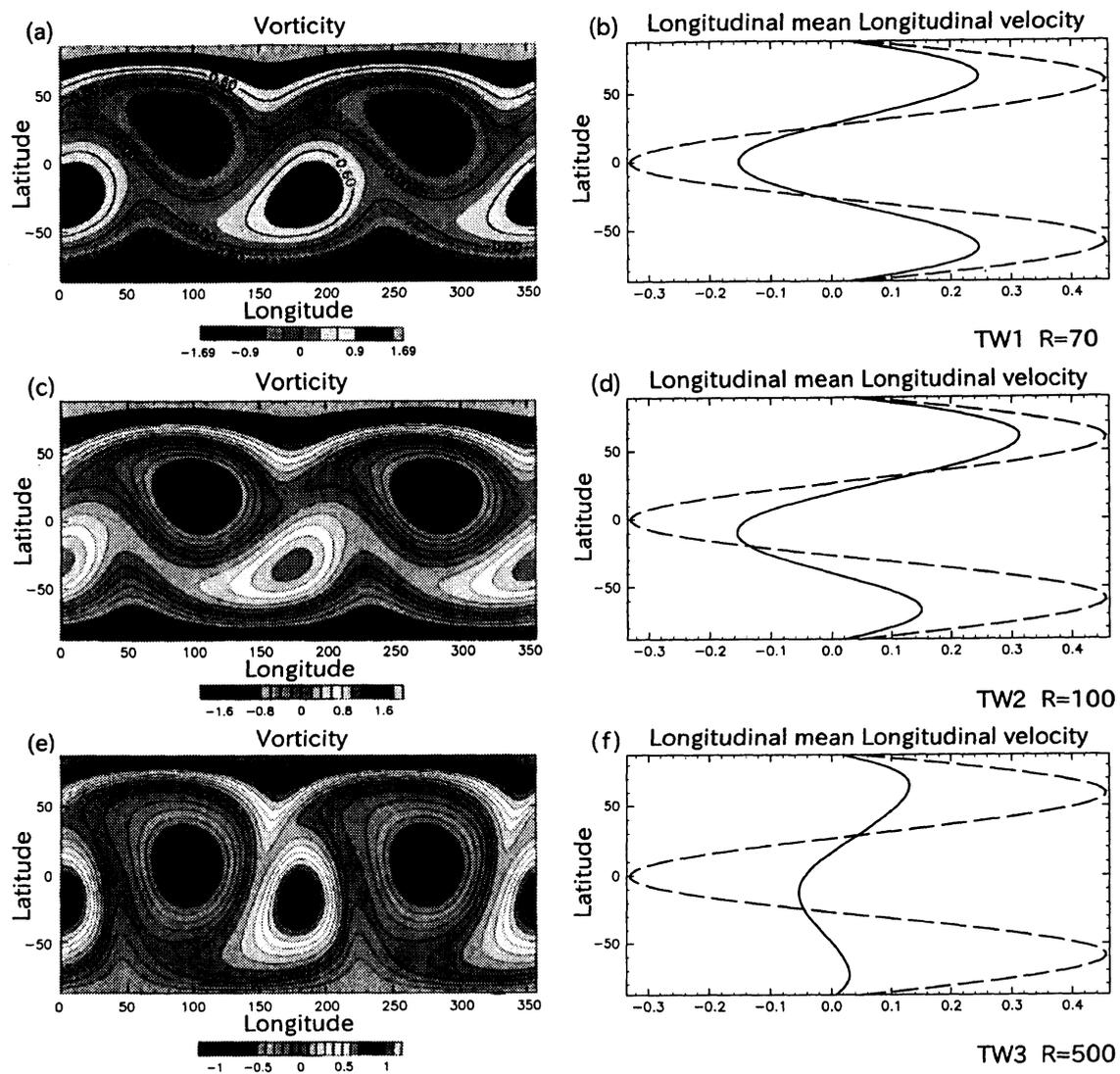


Fig.3 Nonlinear solutions at  $\Omega = 0$ . Left and right columns indicate vorticity and longitudinal mean longitudinal velocity, respectively. (a)(b):TW1,  $R = 70$ ,(c)(d):TW2,  $R = 100$ ,(e)(f):TW3,  $R = 500$ .

### 3.2 回転系における分岐構造

回転のある場合について、 $S$  からの分岐解を追跡し、各  $(R, \Omega)$  における非線形解の線形安定な領域を Fig.4 に示す。図中の白い領域は Hopf 不安定な領域である。  $\Omega$  の値によって、安定となる解の性質は大きく変化している。  $R$  の増加と共に最終的には Hopf 不安定となり、安定定常進行波解は消失すると考えられる。

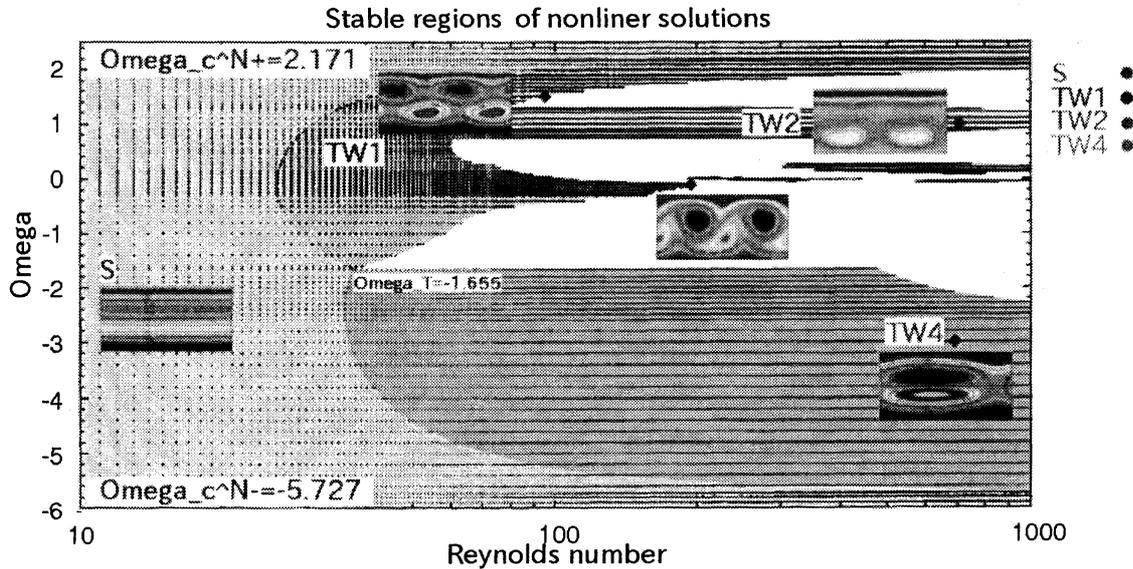


Fig.4 Stable regions of nonlinear solutions. The white regions are Hopf unstable.

ここでは  $S$  の線形安定性について議論する。  $S$  の  $R - \Omega$  平面上の臨界曲線を Fig. 5 に示す。  $R \leq 10^6$  の範囲で  $S$  が不安定化する領域は  $\Omega_c^{N-} = -5.727 \leq \Omega \leq 2.171 = \Omega_c^{N+}$  の範囲に限られる。この範囲外の (従って絶対値の大きな)  $\Omega$  に対しては  $R = 10^6$  において  $S$  は線形安定となっており、任意の  $R$  に対しても線形安定となることが予想される。  $\Omega_T = -1.665$  で臨界モードの東西波数  $m_c$  が入れ替わり、  $\Omega_T < \Omega < 2.171 = \Omega_c^{N+}$  において  $m_c = 2$  で、  $\Omega_c^{N-} = -5.727 < \Omega < \Omega_T$  において  $m_c = 1$  である。 Fig.6 は臨界モードの位相速度である。  $\Omega$  の増加とともに位相速度は単調減少する。位相速度と  $\Omega$  はほぼ線形関係である。

Fig. 7 は各  $R, \Omega$  における臨界モードの渦度分布である。  $m_c = 2$  について  $\Omega$  が正方向に増加すると中緯度の渦が大きくなり、  $m_c = 1$  について  $\Omega$  が負方向に減少すると赤道近傍にある渦が大きくなる。各臨界モードの位相速度 Fig.6 と渦度分布 Fig.7 を比較する。  $|\Omega|$  が充分大きいとき、  $|\Omega|$  増加すると臨界モードの位相速度の絶対値は増加する。一方、臨界モードの渦度は、  $m_c = 2$  について中緯度の渦が大きくなり、  $m_c = 1$  について赤道上の渦が大きくなる。この緯度は、  $S$  の速度の経度成分が臨界モードの伝播方向と逆向きに値を持つ緯度に対応している。

非粘性の場合の  $S$  の線形安定性は Baines[2] によって調べられている。臨界モードの東西波数は非粘性の場合のものと同じである。しかし非粘性流の場合の不安定となる  $\Omega$  の範囲は  $-5.35 \leq \Omega \leq 1.76$  であり、この範囲は粘性の場合の範囲の一部に過ぎない。この結果は非粘性と非粘性極限の不一致を思わせるが、これは以下の理由で整合性を得る。 Fig.8 は  $S$  の線形安定性を調べた結果得られた、最も不安定なモードの増幅率である。特に、  $R = 10^3, 10^6$  のときの  $1.5 \leq \Omega \leq 2.2$  における最も不安定モードの増幅率を Fig.9 に示す。不安定モードの増幅率は  $R = 10^3$  において  $\Omega \leq 2.171$  まで正であるものの、  $R = 10^6$  においては  $1.76 \leq \Omega \leq 2.171$  の範囲の増幅率は殆どゼロとなる。  $\Omega$  が負の部分についても同様の傾向が見られる。従って有限の粘性の場合の安定特性は、非粘性極限において不安定擾乱の増幅率が 0 へ収束することにより非粘性の場合の安定特性に一致する。

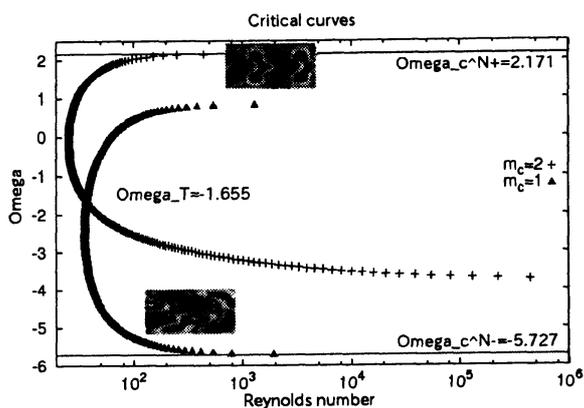


Fig.5 Critical curves of  $S$ . Red + and gray  $\Delta$  indicate longitudinal wave number of critical mode  $m_c = 2, 1$ , respectively.

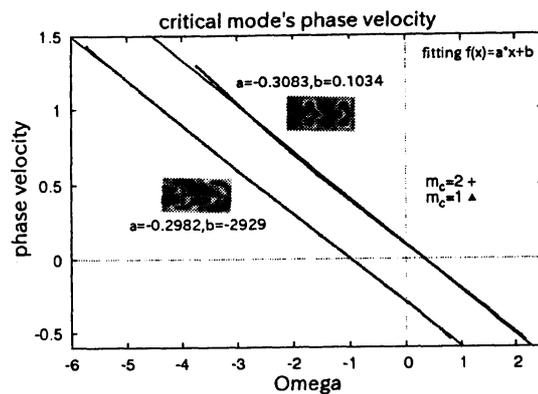


Fig.6 Critical mode's phase velocity. Red + and gray  $\Delta$  indicate longitudinal wave number of critical mode  $m_c = 2, 1$ , respectively.

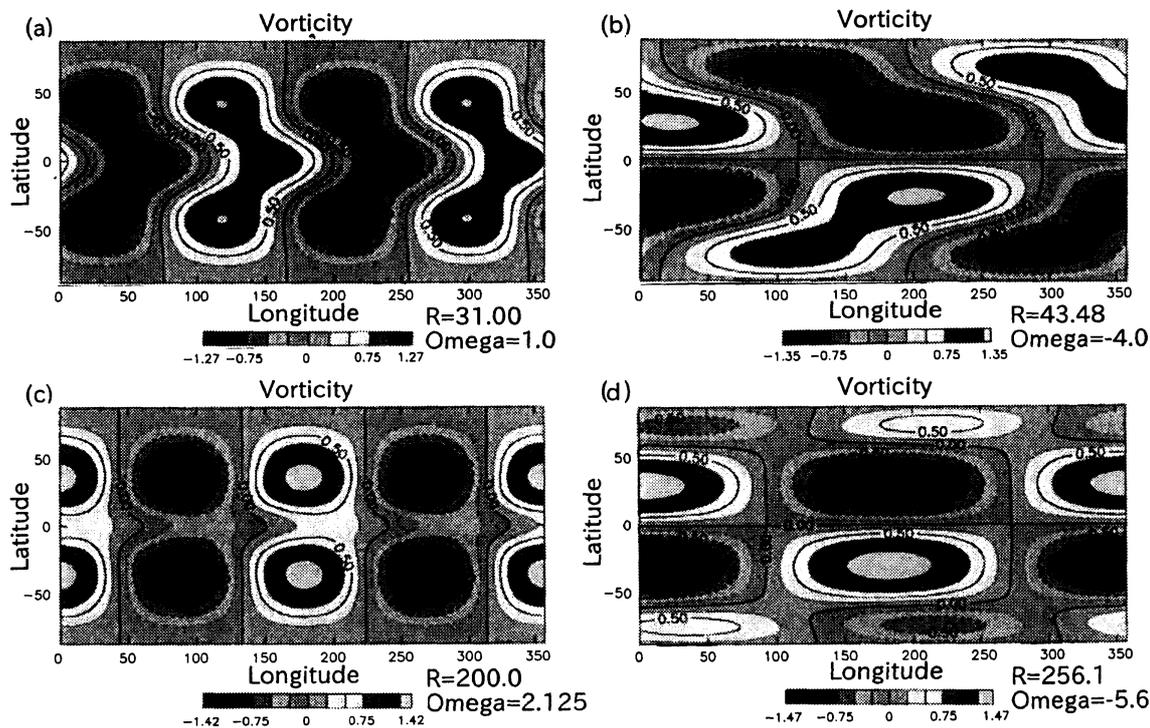


Fig.7 Critical mode vorticities. Left and right columns indicate  $m_c = 2, 1$ , respectively. (a):  $R = 31.00, \Omega = 1.0$ , (b)  $R = 43.48, \Omega = -4.0$ , (c)  $R = 200.0, \Omega = 2.125$ , (d)  $R = 256.1, \Omega = -5.6$ .

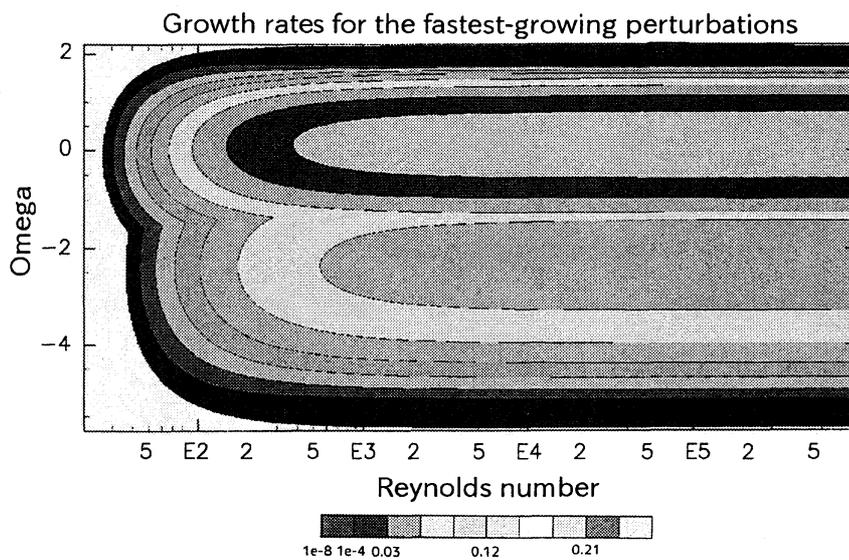


Fig.8 Growth rates for the fastest-growing perturbations.  $Y_3^0$  is stable in the white region.

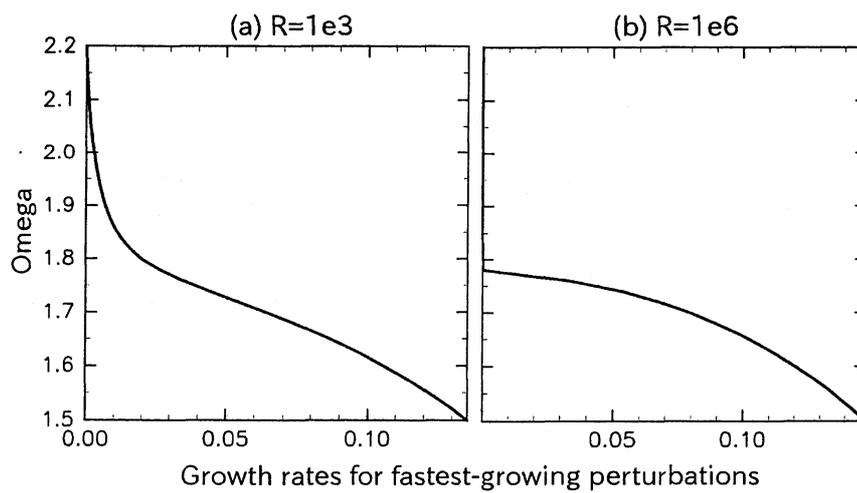


Fig.9 The growth rates for the fastest-growing perturbations at  $1.5 \leq \Omega \leq 2.2$ . (a)  $R=10^3$  (b)  $R=10^6$ .

## 4 まとめ

本研究は回転球面上の帯状流の安定性と分岐構造を調べた。

最も単純な帯状流である2本のジェットからなる帯状流  $Y_2^0(\mu)$  はレイノルズ数, 回転角速度によらず, 大域的に漸近安定である. Iudovich[4] は縦方向に長辺を持つ2次元トーラス領域に横方向に流れる2本のジェットからなる平行流は大域的に漸近安定であることを示した. これは領域の幾何学的な違いがあるにもかかわらず共通した性質である.

3本のジェットからなる帯状流  $Y_3^0(\mu)$  は不安定となりうる最も単純な帯状流であるため, この帯状流からの分岐を数値的に求めた.

回転効果がない場合, レイノルズ数の増加とともに定常進行波へ分岐し, その定常進行波はいずれ Hopf 不安定となることを見出された. Kim and Okamoto[7] は Kolmogorov 問題において正負1対の渦からなる安定定常解の存在を数値的に示唆したが, 球面領域において彼らが主張する安定定常解は見出されず, 領域の幾何学的相違により分岐構造が異なることが分かった.

回転効果がある場合, 回転効果によって分岐構造が大きく変化する. 特に  $R \leq 10^6$  の範囲で帯状流が不安定化する  $\Omega$  の領域は非粘性の場合の領域よりも広く, 非粘性と非粘性極限の不一致を思わせるが, 非粘性極限において不安定擾乱の増幅率が0に収束することで整合的となる.

## 参考文献

- [1] K. Obuse, S. Takehiro, M. Yamada : Long-time asymptotic states of forced two-dimensional barotropic incompressible flows on a rotating sphere, *Phys. Fluids* 22, 056601, 2010.
- [2] P. G. Baines: The stability of planetary waves on a sphere, *J. Fluid Mech.*, 73-2, 193-213, 1976.
- [3] Y. N. Skiba: Linear instability of ideal flows on a sphere, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32, 284-306, 2009.
- [4] V. I. Iudovich: Example of the generation of a secondary stationary or periodic flow when there is loss of stability of the laminar flow of a viscous incompressible fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, 29, 527-544, 1965.
- [5] L. D. Meshalkin and Y. G. Sinai: Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous liquid, *J. Appl. Math. and Mech.*, 25, 1700-1705, 1962.
- [6] H. Okamoto and M. Shōji: BifurcationDiagrams in Kolmogorov's Problem of Viscous Incompressible Fluid on 2-D Flat Tori, *Japan J. Indus Appl. Math.*, 10, 191-218, 1993.
- [7] S.-C. Kim and H. Okamoto: Stationary vortices of large scale appearing in 2D Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 27-1, 47-71, 2010.