

# ペンローズタイルが生成する縞模様

日詰明男 (龍谷大学)

山岸義和 (龍谷大学)

## 1 はじめに

広い土地にペンローズタイル [1] を敷き詰め、各タイルの頂点に柱を立てる。これを遠くから眺めるとき、柱と柱の間のすきまを見通すことができるだろうか。

正十二面体の各面に、ペンローズタイリングの頂点集合の配置で孔を開けて、面に垂直に竹ひごを刺し通して得られる立体構造物「六勾 (むまがり)」 [2] は、6 つの方向の竹ひごが互いにぶつからずに組み合っている。一定以上の本数の竹ひごを使えば、自分自身の重量によって摩擦が生じるため、接着剤がなくても自立し、正十二面体の枠を外すことができる。さてここで、正十二面体を広げて竹ひごを増やしていくと、竹ひご同士は衝突しないだろうか。

ペンローズタイリングの頂点集合  $\Lambda_P \subset \mathbb{C}$  は、切断射影集合 (モデル集合) である [4]。上記の二つの問題は、つぎのような問題として定式化される。

複素数  $w \neq 0$  を固定するとき、各頂点  $z \in \Lambda_P$  を通り方向  $w$  に平行な直線  $z + \mathbb{R}w$  の和集合  $\Lambda_P + \mathbb{R}w$  は、複素平面  $\mathbb{C}$  のどんな部分集合か。稠密な部分集合か、離散集合か、あるいはいずれでもないか。

さらに別の言い方をすれば、 $w$  に垂直な直線  $\sqrt{-1}w\mathbb{R}$  への直交射影

$$\phi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \sqrt{-1}w\mathbb{R}, \quad \phi_1(z) = \frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{2\bar{w}} = \frac{\sqrt{-1}w}{|w|^2} \Im(z\bar{w})$$

による  $\Lambda_P$  の像  $\phi_1(\Lambda_P)$  を考えるということでもある。ここで  $\phi_1|_{(\sqrt{-1}w\mathbb{R})} = \text{id}$ ,  $\phi_1(w\mathbb{R}) = 0$ ,  $\Lambda_P + w\mathbb{R} = \phi_1^{-1}(\phi_1(\Lambda_P))$  が成立っている。ただし  $\Im$  は虚部を表す。 $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$  とする。

**定理 1.**  $w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta] \neq 0$  のとき、 $\phi_1(\Lambda_P)$  は切断射影集合である。

とくに、 $\phi_1(\Lambda_P)$  は一様離散集合である。したがって、上記の六勾の問題で、もしも太さ 0 の竹ひごの場合に衝突がないならば、竹ひごの太さを十分小さな正数としても衝突はないことがわかる。

冒頭の問題では、5回対称な方向の長さ1のベクトル  $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$  の整数倍の和として表される方向に視線を向ければ、柱と柱の隙き間を見通すことができるということである。正方形格子  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  の頂点に柱を立てた場合に、ガウスの整数  $w \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  の方向に眺めれば柱が等間隔に並んで見えることに類似している。

一方でこの問題は、クロネッカーの定理の類似として「力学系」的に考えることもできる。正方形タイリングが敷き詰められた平面上を、一つの方向  $w$  を定めて真っ直ぐに歩く人を考える。ここでタイルの間に平行移動で同値関係を考えて、代表元のタイルをプロトタイルと呼ぶ。この人は、自分がどのタイルを歩いているのか区別がつかないとすれば、一枚のプロトタイル上を歩いているようなものである。ただしプロトタイルの辺にぶつかったときは反対側の辺からプロトタイル内に入ってくる。クロネッカーの定理によれば、 $w$  が  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  に属するときはこの人のプロトタイル上の軌道は周期的であり、 $w$  を実数倍しても  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \setminus \{0\}$  に属さない場合は、この人の軌道はプロトタイル上で稠密である。

ペンローズタイリングには五角形版、鳳矢版、菱形版があり、相互に再構成できる変換規則がある。菱形版では角度が  $72^\circ, 108^\circ$  の太い菱形と、 $36^\circ, 144^\circ$  の細い菱形を使う。タイルの辺は  $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$  の5つの複素数である。この菱形版ペンローズタイリングの上を、一つの方向  $w$  を定めて真っ直ぐに歩く人を考える。ただし、菱形の太い細いや、菱形の方向は認識できるが、それ以上の区別はつかないとする。すなわち、互いに平行移動でうつりあう菱形を同一視すれば、太い5枚と細い5枚の合計10枚のプロトタイル  $T_0, \dots, T_9$  の上をぐるぐる歩く。プロトタイルの辺に到達したとき、次にどのプロトタイルに行くかはわからない。それでも定理1によれば、 $w$  が整数環  $\mathbb{Z}[\zeta]$  に属するときはこの軌道は10枚のプロトタイルの中の有限個の線分の和集合として表される。

$\mathcal{T}_0 = \{T_j : 0 \leq j < 10\}$  とする。タイルの境界は、半開区間のように、4本の辺のうち2本は隣のタイルに属することにすれば、 $\Lambda_j \subset \Lambda_P$  ( $0 \leq j < 10$ ) が存在して  $\mathbb{C} = \bigcup_{j=0}^9 (T_j + \Lambda_j)$  は disjoint union である。 $\mathcal{T} = \bigcup_{j=0}^9 \{T_j + u : u \in \Lambda_j\}$  とする。写像  $\pi_P : \mathbb{C} \rightarrow \bigcup_{T \in \mathcal{T}_0} T$  を、タイリングが定める標準的な写像(被覆写像のようなもの)とする。このとき、次の問題が残った。これに答えるには、ある程度広い空間を作って力学系を定義する必要があると思う。

問.  $w \neq 0, w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta] = 0$  とする。一点  $z \in \mathbb{C}$  を定め、これを通る直線  $z + w\mathbb{R}$  を考える。このとき  $\pi_P(z + w\mathbb{R})$  は  $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_0} T$  の中で稠密か。

## 2 切断射影集合

まずは、[1, 4] にならって切断射影集合を定義する。局所コンパクトアーベル群  $G$  の部分群  $D$  が格子 (lattice) であるとは、 $D$  が離散的で  $G/D$  がコンパクトであるときにいう。

**定義 1.** 切断射影スキーム (cut-and-project scheme)  $\Sigma = (\mathbb{R}^k, H, D, \Omega, \Lambda, p, q)$  とは、'physical space'  $\mathbb{R}^k$  と、局所コンパクトアーベル群  $H$  ('internal space'), 格子  $D \subset \mathbb{R}^k \times H$ , 相対コンパクトな  $H$  の部分集合  $\Omega$  ('window'),  $\mathbb{R}^k$  の部分集合  $\Lambda = \Lambda(\Omega)$ , 自然な射影  $p: \mathbb{R}^k \times H \rightarrow \mathbb{R}^k$  および  $q: \mathbb{R}^k \times H \rightarrow H$  によって構成され、

1.  $p|_D: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  が単射で、
2.  $q(D)$  が  $H$  の稠密部分集合で、
3.  $\Lambda = \{p(d) : d \in D, q(d) \in \Omega\}$  が成立つものをいう。

このとき  $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$  を、切断射影集合あるいはモデル集合という。 $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$  が  $\mathbb{R}^k$  の中の相対稠密な部分集合で、あるモデル集合の部分集合となっているとき、この  $\Lambda$  を Meyer 集合という。

$r > 0$  とする。頂点  $\lambda \in \Lambda$  のまわりの  $r$ -patch を  $C_r(\lambda) := \Lambda \cap \overline{B_r(\lambda)}$  で定義する。ただし  $\overline{B_r(\lambda)} = \{x \in \mathbb{R}^k : |x - \lambda| \leq r\}$  は閉球を表す。二点  $\lambda, \mu \in \Lambda$  の  $r$ -patch が平行移動で同値であるとは、 $C_r(\mu) = C_r(\lambda) + (\mu - \lambda)$  が成立つときにいう。

**命題 1.**  $\Lambda$  を Meyer 集合とすると、各  $r > 0$  において、 $r$ -patch の平行移動による同値類は有限個である。

*Proof.* [4, Corollary 6.10]. □

複素平面において、1 の 5 乗根  $\zeta^j, 0 \leq j \leq 4$  を頂点とする正五角形 (の内部) を  $P_1 = \{\sum_{j=0}^4 t_j \zeta^j : \sum_{j=0}^4 t_j < 1, t_j \geq 0, 0 \leq j \leq 4\} \subset \mathbb{C}$  とし、 $P_2 = -\tau P_1, P_3 = \tau P_1, P_4 = -P_1$  とする。黄金比を  $\tau = \zeta + \zeta^4 + 1 = -\zeta^2 - \zeta^3 = (\sqrt{5} + 1)/2$  で表す。 $\mathbb{Q}[\zeta] \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}[\tau], \mathbb{Z}[\zeta] \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}[\tau]$  が成立つ。写像

$$*: \mathbb{Z}[\zeta] \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta], \quad \left(\sum_{j=0}^4 a_j \zeta^j\right)^* = \sum_{j=0}^4 a_j \zeta^{2j},$$

$$\nu: \mathbb{Z}[\zeta] \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \quad \nu\left(\sum_{j=0}^4 a_j \zeta^j\right) = \sum_{j=0}^4 a_j \pmod{5}$$

を考えると、 $\tau^* = 1 - \tau$  であり、 $z \in \mathbb{Z}[\zeta]$  に対して  $z^{**} = \bar{z}$  は複素共役である。また、 $z \in \mathbb{Z}[\zeta]$  に対して  $\nu(z^*) = \nu(z)$  が成立つ。

Penrose の切断射影スキーム  $\Sigma_P = (\mathbb{C}, \mathbb{C} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}), D_P, \Omega_P, \Lambda_P, p, q)$  は、

$$D_P = \{(z, z^*, \nu(z)) : z \in \mathbb{Z}[\zeta]\}$$

を格子とし、

$$\Omega_P = \bigcup_{j=1}^4 \Omega_j, \quad \Omega_j = (P_j + \xi) \times \{j\}, \quad 1 \leq j \leq 4$$

を窓として定義される. ここで  $\xi \in \mathbb{C}$  はパラメータである. また, Fibonacci の切断射影スキーム  $\Sigma_F = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, D_F, I_F, \Lambda_F, p_F, q_F)$  は,

$$D_F = \{(x, x^*) : x \in \mathbb{Z}[\tau]\} = \{(a + b\tau, a + b\tau^*) : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

を格子とし, 有界な区間  $I_F \subset \mathbb{R}$  を窓として与えられる.

### 3 切断射影スキームの準同型

定理 1 の証明は, Penrose の切断射影スキームから直線上の切断射影集合のスキームへの準同型を構成することによって得られる. 切断射影集合の submodel や quotientmodel という概念はすでに Pleasants [5, 6] によって議論されており, tomography の問題として Baake-Huck [3] の研究がある.

**定義 2.** 二つの切断射影スキーム  $\Sigma_i = (\mathbb{R}^{k_i}, H_i, D_i, \Omega_i, \Lambda_i, p_i, q_i)$ ,  $i = 1, 2$  を考える.  $\Sigma_1$  から  $\Sigma_2$  への準同型とは, 線形写像  $\phi : \mathbb{R}^{k_1} \rightarrow \mathbb{R}^{k_2}$  と位相群の準同型写像  $\psi : H_1 \rightarrow H_2$  の組みであって,  $(\phi \times \psi)(D_1) = D_2$ ,  $\psi(\Omega_1) = \Omega_2$ ,  $\phi(\Lambda_1) = \Lambda_2$ ,  $q_2 \circ (\phi \times \psi) = \psi \circ q_1$ ,  $p_2 \circ (\phi \times \psi) = \phi \circ p_1$  をみたすものをいう.

$w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta] \neq 0$  を仮定し,

**Case 1.** すべての  $u \in w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta]$  で  $\nu(u) = 0$

**Case 2.** ある  $u \in w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta]$  で  $\nu(u) \neq 0$

の二つの場合に分けて考える. 必要があれば  $w$  を実数倍して,  $w \in \mathbb{Z}[\zeta] \setminus \{0\}$  と仮定してよい. そうすれば  $w^*$  も定義できる. 複素平面から直線  $\sqrt{-1}w^*\mathbb{R}$  への正射影を

$$\psi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \sqrt{-1}w^*\mathbb{R}, \quad \psi_1(z) = \frac{z\bar{w}^* - \bar{z}w^*}{2\bar{w}^*} = \frac{\sqrt{-1}w^*}{|w^*|^2} \Im(z\bar{w}^*)$$

で与える.

**補題 1.** 二点  $z, \tilde{z} \in \mathbb{Z}[\zeta]$  に対して, 以下は互いに同値である:

1.  $\phi_1(z) = \phi_1(\tilde{z})$ ,
2.  $\psi_1(z^*) = \psi_1(\tilde{z}^*)$ ,
3.  $z + w\mathbb{R} = \tilde{z} + w\mathbb{R}$ ,
4.  $z^* + w^*\mathbb{R} = \tilde{z}^* + w^*\mathbb{R}$ .

*Proof.* 証明は明らか. □

$\phi_1, \psi_1$  のかわりに、

$$\phi_P, \psi_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_P(z) = \Im(z\bar{w})/\Im(\zeta^2), \quad \psi_P(z) = -\Im(z\bar{w}^*)/\Im(\zeta)$$

を考える。

Case 1 の場合、

$$D_S = (\phi_P \times \psi_P \times \text{id})(D_P) = \{(\phi_P(z), \psi_P(z^*), \nu(z)) : z \in \mathbb{Z}[\zeta]\},$$

$$\Omega_S = (\psi_P \times \text{id})(\Omega_P) = \bigcup_{j=1}^4 (\psi_P(P_j + \xi) \times \{j\}),$$

$$\Lambda_S = \phi_P(\Lambda_P) = \{\phi_P(z) : z \in \mathbb{Z}[\zeta], (z^*, \nu(z)) \in \Omega_P\}$$

とする。

**補題 2.**  $w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta] \neq 0$  とする。  $D_S$  は  $D_F \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$  の部分格子であり、  $\Lambda_S \subset \mathbb{Z}[\tau]$  が成立つ。

*Proof.*  $w = \sum_{j=0}^4 k_j \zeta^j, z = \sum_{j=0}^4 n_j \zeta^j$  と表す。記号を節約して  $k_{j\pm 5} = k_j$  とするとき、

$$\phi_P(z) = a(z) + \tau b(z), \quad \psi_P(z^*) = a(z) + \tau^* b(z),$$

$$a(z) = \sum_{j=0}^4 n_j (k_{j-2} - k_{j+2}), \quad b(z) = \sum_{j=0}^4 n_j (k_{j-1} - k_{j+1})$$

が成立つ。したがって  $\phi_P(z) \in \mathbb{Z}[\tau]$  であり、  $(\phi_P(z), \psi_P(z^*), \nu(z)) = (a(z) + \tau b(z), a(z) + \tau^* b(z), \nu(z)) \in D_F \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$  である。  $\square$

**補題 3.** Case 1 の場合、  $p|D_S : D_S \rightarrow \mathbb{R}$  は単射である。

*Proof.* 二点  $z, \tilde{z} \in \mathbb{Z}[\zeta]$  において  $\phi_P(z) = \phi_P(\tilde{z})$  とすると、  $a(z) = a(\tilde{z}), b(z) = b(\tilde{z}) \Rightarrow \psi_P(z^*) = \psi_P(\tilde{z}^*) \Rightarrow z + w\mathbb{R} = \tilde{z} + w\mathbb{R} \Rightarrow \tilde{z} - z = u, \exists u \in w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta] \Rightarrow \nu(\tilde{z}) - \nu(z) = \nu(u) = 0$  がしたがう。  $\square$

**命題 2.** Case 1 の場合、  $\Sigma = (\mathbb{R}, \mathbb{R} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}), D_S, \Omega_S, \Lambda_S, p, q)$  は切断射影スキームである。ただし  $p, q$  は自然な射影とする。とくに、

$$\Lambda(\Omega_S) = \{\phi_P(z) : z \in \mathbb{Z}[\zeta], (\psi_P(z^*), \nu(z)) \in \Omega_S\}$$

とするとき  $\Lambda_S = \Lambda(\Omega_S)$  が成立つ。

*Proof.*  $\Lambda_S \subset \Lambda(\Omega_S)$  のほうの包含関係は明らかである。反対向きの包含関係を示すために、  $y \in \Lambda(\Omega_S)$  とする。このとき、ある  $z \in \mathbb{Z}[\zeta]$  で  $y = \phi_P(z)$  と表すことができ、ある  $j$  で  $\psi_P(z^*) \in \psi_P(P_j + \xi), \nu(z) = j$  が成立つ。したがって  $(z^* + w^*\mathbb{R}) \cap (P_j + \xi) \neq \emptyset$  である。  $P_j$  は開集合だから、ある  $u \in w\mathbb{R}$  で  $\tilde{z}^* := z^* + u^* \in P_j + \xi$  となる。さらに、case 1 の仮定により  $\nu(\tilde{z}) = \nu(z) + \nu(u) = \nu(z) = j$  であるから、  $(\tilde{z}^*, \nu(\tilde{z})) \in \Omega_P$  である。したがって  $y = \phi_P(\tilde{z}) \in \Lambda_S$  であり、  $\Lambda(\Omega_S) \subset \Lambda_S$  が得られる。  $\square$

Case 2 の場合は,

$$\begin{aligned} D_{S'} &= (\phi_P \times \psi_P)(D_P) = \{(\phi_P(z), \psi_P(z^*)) : z \in \mathbb{Z}[\zeta]\}, \\ \Omega_{S'} &= \bigcup_{j=1}^4 \psi_P(P_j + \xi), \\ \Lambda_{S'} &= \phi_P(\Lambda_P) = \{\phi_P(z) : z \in \mathbb{Z}[\zeta], (z^*, \nu(z)) \in \Omega_P\} \end{aligned}$$

とする.

**命題 3.** Case 2 の場合,  $\Sigma' = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, D_{S'}, \Omega_{S'}, \Lambda_{S'}, p', q')$  は切断射影スキームである. ただし  $p', q'$  は自然な射影とする. とくに,

$$\Lambda(\Omega_{S'}) := \{\phi_P(z) : z \in \mathbb{Z}[\zeta], \psi_P(z^*) \in \bigcup_{j=1}^4 \psi_P(P_j + \xi)\}$$

とするとき  $\Lambda_{S'} = \Lambda(\Omega_{S'})$  が成立つ.

*Proof.* 補題 2, 3 にならって,  $D_{S'}$  は  $D_F$  の部分格子であり,  $\Lambda_{S'} \subset \mathbb{Z}[\tau]$  であり,  $p|D_{S'} : D_{S'} \rightarrow \mathbb{R}$  は単射であることがわかる. あとは  $\Lambda_{S'} = \Lambda(\Omega_{S'})$  を示せばよい.

包含関係  $\Lambda_{S'} \subset \Lambda(\Omega_{S'})$  は明らかである.  $y \in \Lambda(\Omega_{S'})$  とする. ある  $z \in \mathbb{Z}[\zeta]$  で  $y = \phi_P(z)$  と表すことができ, ある  $j$  で  $\psi_P(z^*) \in \psi_P(P_j + \xi)$  である. ここで  $k := \nu(z)$  は  $j$  と異なるかもしれないが,  $N := \{z \in \mathbb{Z}[\tau] : \nu(z) = 0 \pmod{5}\} = (3 - \tau)\mathbb{Z}[\tau]$  は  $\mathbb{R}$  の稠密部分集合であり,  $\{\nu(u) : u \in w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta]\} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  が成立つ. さらに  $(z^* + w^*\mathbb{R}) \cap (P_j + \xi) \neq \emptyset$  であり,  $P_j + \xi$  は開集合であるから,  $u \in w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta]$  が存在して  $\nu(u) = j - k$  および  $\tilde{z}^* := z^* + u^* \in P_j + \xi$  が成立つ. したがって  $(\tilde{z}^*, \nu(\tilde{z})) \in (P_j + \xi) \times \{j\}$  であり  $y = \phi_P(\tilde{z}) \in \Lambda_{S'}$  である.  $\square$

定理 1 の証明. Case 1 の場合は  $\phi_P(\Lambda_P) = \Lambda_S = \Lambda(\Omega_S)$  であり, Case 2 の場合は  $\phi_P(\Lambda_P) = \Lambda_{S'} = \Lambda(\Omega_{S'})$  である.  $\square$

## 4 縞模様がついたペンローズスタイル

対  $(\Lambda_P, \Lambda_P + w\mathbb{R})$  を, ペンローズ集合が生成する縞模様と呼ぶ. 頂点  $\lambda \in \Lambda_P$  のまわりの, 縞模様がついた  $r$ -patch を  $S_r(\lambda) := (\Lambda_P + w\mathbb{R}) \cap \overline{B_r(\lambda)}$  で定義する. 縞模様つきで二点  $\lambda, \mu \in \Lambda$  のまわりの  $r$ -patch が平行同値であるとは,  $S_r(\mu) = S_r(\lambda) + (\mu - \lambda)$  が成立つときをいう. 定理 1 により, ペンローズ集合が生成する縞模様について以下が得られる.

**命題 4.**  $w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta] \neq 0$  とする.  $(\Lambda_P, \Lambda_P + w\mathbb{R})$  において  $r > 0$  を固定するとき, 縞模様のついた  $r$ -patch の平行同値に関する同値類は有限個である.

*Proof.*  $\phi_P(\Lambda_P) \subset \mathbb{R}$  も  $\Lambda_P \subset \mathbb{C}$  も Meyer 集合であるから, 命題 1 により, それぞれの  $r$ -patch の平行同値に関する同値類は有限個である.  $\square$

各タイル  $T \in \mathcal{T}$  に対して, 縞模様をついたタイルを  $s(T) := (T, T \cap (\Lambda_P + w\mathbb{R}))$  で定義する. 集合  $s(\mathcal{T}_1) := \{s(T) : T \in \mathcal{T}_1\}$ ,  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ , が縞模様つきプロトタイルであるとは, 各タイル  $T' \in \mathcal{T}$  に対して  $T \in \mathcal{T}_1$  と  $u \in \mathbb{C}$  が存在して  $T' = T + u$  および

$$(T \cap (\Lambda_P + w\mathbb{R})) + u = T' \cap (\Lambda_P + w\mathbb{R})$$

が成立つときをいう.

**命題 5.**  $w\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}[\zeta] \neq 0$  とするとき, 有限集合  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$  が存在して,  $s(\mathcal{T}_1)$  は縞模様つきプロトタイルである.

*Proof.* 縞模様をつける前のプロトタイルの集合  $\mathcal{T}_0$  は有限集合であり, 各プロトタイル上の縞模様のつけ方は命題 4 により有限通りである.  $\square$

謝辞. 本研究にあたり, 切断射影集合について小松和志先生, 秋山茂樹先生のご指導を仰ぎました. ここに感謝の意を表します.

## 参考文献

- [1] N.G. de Bruijn, Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane. I, II, *Indag. Math.* 43 (1981) 39–52, 53–66.
- [2] 日詰明男「線材を 6 重に組んだ非周期的空間組織」特許 3493499 号.
- [3] Michael Baake and Christian Huck, Discrete tomography of Penrose model sets, *Philosophical Magazine* 87:18 (2007) 2839-2846.
- [4] Robert V. Moody, Meyer Sets and their duals, in: *The Mathematics of long-range aperiodic order* (NATO ASI series ser C. Mathematical and physical sciences v.489, ed: Robert V. Moody) Kluwer (1997) 403-441.
- [5] Peter A. B. Pleasants, Designer quasicrystals: cut-and-project sets with pre-assigned properties, in: *Directions in Mathematical Quasicrystals*, (eds: Michael Baake and Robert M. Moody), CRM Monograph Series vol.13, AMS (2000) 95-141.
- [6] Peter A. B. Pleasants, Lines and planes in 2 and 3-dimensional quasicrystals, in: *Coverings of discrete quasiperiodic sets*, (eds: Peter Kramer and Zorka Papadopolos), Springer Tracts in Modern Physics vol.180 (2003) 185-225.