数理解析研究所講究録
第 1726 巻 2011 年 33-38

縮小写像の離散不動点定理と展開形ゲーム

九州大学・大学院数理学研究院 川崎英文 (Hidefumi Kawasaki)
Faculty of Mathematics, Kyushu University
kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp
九州大学・大学院数理学府 吉良知文 (Akifumi Kira)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University
a-kara@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

Brouwer の不動点定理や角谷の不動点定理が Nash 均衡の存在を示す際に極めて強力であることは広く知られている．これらの不動点定理が連続変量の定理であることから，離散不動点定理を用いれば離散的な（純戦略）Nash 均衡の存在を保証できると期待できる．実際，離散不動点定理には次の 3 タイプがあり，それぞれゲーム理論に応用されている．

1. 縮小写像の不動点定理 Robert(86), Shih-Dong(05), Richard(08)，川崎 (09)
2. Brouwer の定理を利用するもの 飯村 (03), Yang(04), 飯村-室田-田村 (05)
3. 単調写像の不動点定理 Tarski(55), Topkis(79), 佐藤-川崎 (09).

例えば，川崎 [3] は整数区間上の縮小写像に対する離散不動点定理（定理 5）を与え，そのゲーム論的意味を述べた（定理 6）．しかしながら，その仮定は強く，実際のゲームに対して有効であるかどうか，2009 年の時点では不明であった．本稿では，展開形ゲームの分野でよく知られた Kuhn の定理が我々の離散不動点定理で説明できることを示す．

2 ブール代数上の縮小写像に対する離散不動点定理

本節では Robert[4] による古典的な結果を紹介する．まず，ブール代数 $\{0,1\}$ の順序と計算規則は以下の通りである．

$$0+0=0,\ 1+0=0+1=1+1=1,$$
$$0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1,\ 0\le 0\le 1\le 1,\quad \bar{1}=0,\ \bar{0}=1.$$

$x, y\in\{0,1\}^n$ と $\lambda\in\{0,1\}$ に対して，$x+y$ と λx を成分ごとの和と積で定義する．また，ブール代数 $\{0,1\}$ 上の行列を**ブール行列**とよぶ．行列の和や積は通常の計算規則と同じで，それらの成分の和や積はブール代数に従うものとする．また，固有値 $(\in\{0,1\})$ や固有ベクトルも普通に定義する．ブール行列 B の最大固有値を**スペクトル半径**とよび $\rho(B)$ と書く．

$$d(x,y):=\begin{pmatrix}|x_1-y_1|\\ \vdots\\ |x_n-y_n|\end{pmatrix}\in\{0,1\}^n \quad \text{for } x,y\in\{0,1\}^n.$$

写像 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ に対して，**関係行列** $B(f) := (b_{ij})$ を次で定義する．

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & f_i \text{ が } x_j \text{ に依存しない場合} \\ 1, & \text{その他}. \end{cases}$$

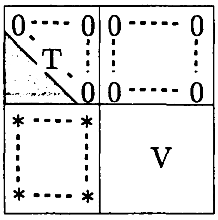
補題 1 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ とブール行列 M について，成分毎の不等式 $B(f) \le M$ は $d(f(x), f(x)) \le Md(x, y) \quad (\forall x, y \in \{0,1\}^n)$ と同値である．

e_i を第 i 成分が 1, それ以外が 0 のベクトルとするとき，置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を用いて $P = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ と表される行列を**置換行列**とよぶ．

補題 2 ブール行列 B について，(a)(b)(c) のいずれか，ただひとつが必ず成立する．

(a) B は零行をもたない．

(b) ある置換行列 P と強下半三角行列 T と零行をもたない部分行列 V を用いて，P^TBP は次のように表される．ただし，T も V も空でない．



(c) 置換行列 P が存在して，P^TBP は強下三角行列になる．

補題 3 ブール行列は固有値をもつ．また，$B \le C$ ならば $\rho(B) \le \rho(C)$.

定理 1 ブール行列 B に関して，次の条件は互いに同値である．

(1) $\rho(B) = 0$.

(2) どの主小行列も零行をもつ．(従って B の対角要素はすべて 0 になる.)

(3) 置換行列 P が存在して，P^TBP は強下三角行列になる．

(4) ある $k \le n$ があって $B^k = 0$.

定理 2 (Robert 1986) 縮小写像 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ は唯一の不動点 a をもつ．また，$\exists k \le n$ *s.t.* $f^k(x) \equiv a$. したがって，f の反復グラフはただ一つの連結成分からなる．

3 Richard-Shih-Dong の不動点定理

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ に対して，$\bar{x}^j := (x_1, \ldots, \bar{x}_j, \ldots, x_n)$. $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ に対して，**離散微分** $f'(x) := (f_{ij}(x))$ を次のように定義する．

$$f_{ij}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } f_i(x) \ne f_i(\bar{x}^j) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 3 (Shih-Dong [6]) 写像 $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ が全ての点 $x \in \{0,1\}^n$ で $\rho(f'(x))=0$ を満たすならば，f は唯一の不動点をもつ.

離散微分は，現在の x から 1 変数だけを動かしたときに f が変化するかどうかを表すもので，局所的な情報である．一方，関係行列 $B(f)$ は大域的な情報である.

Robert の不動点定理は，大域的な条件 $\rho(B(f))=0$ から「唯一の不動点の存在」と言う大域的な性質を導く．一方，Shih-Dong の不動点定理は，局所的な条件 $\rho(f'(x))\equiv 0$ から「唯一の不動点の存在」を導いたもので，数学的に深いと言える.

ところで，これらの不動点定理をゲーム理論に適用しようとすると，ひとつの問題が起きる．それは，ブール代数上の写像であるため，各プレイヤーの選択肢が 2 つしかないということである．そのため，不動点定理を整数区間に拡張する必要がある．Richard[7] は Shih-Dong の不動点定理の拡張に成功した.

X_i $(i=1,\dots n)$ を整数の有限区間で $|X_i|\geq 2$ なるものとし，$X:=X_1\times\cdots\times X_n$ とする．$x\in X$ に対して，$\{x\pm e_i \,|\, i=1,\dots,n\}\cap X$ を x の**直近傍**とよぶ．$x+v\in X$ なる $v\in\{\pm 1\}^n$ に対して，**離散ヤコビ行列** $f'(x,v):=(f_{ij}(x,v))_{1\leq i,j\leq n}$ を次で定義する.

$$f_{ij}(x,v):=\begin{cases} 0, & (f_i(x)-x_i-\frac{v_i}{2})(f_i(x+v_je_j)-x_i-\frac{v_i}{2})\geq 0,\\ 1, & (f_i(x)-x_i-\frac{v_i}{2})(f_i(x+v_je_j)-x_i-\frac{v_i}{2})<0.\end{cases} \tag{1}$$

X がブール代数 $\{0,1\}^n$ の場合は,

$$x+v\in X \;\Leftrightarrow\; v_i=\begin{cases} -1 & \text{if } x_i=1,\\ \;\;1 & \text{if } x_i=0\end{cases}$$

なので v は x に対して一意に決まり，離散ヤコビ行列を $f'(x)$ と書くことができる.

定理 4 (Richard[7]) $f:X\to X$ が次の条件を満たすならば，唯一の不動点をもつ.

$$\rho(f'(x,v))=0 \quad \textit{if}\; x+v\in X. \tag{2}$$

Richard は整数区間のサイズに関する帰納法で定理を証明した．その最初のステップ $|X_1|=\cdots=|X_n|=2$ が Shih-Dong の不動点定理であり，Richard の不動点定理は Shih-Dong の不動点定理に強く依存している．この意味で，本稿では定理 4 を Richard-Shih-Dong の不動点定理とよぶことにする.

4 整数区間上の縮小写像に対する離散不動点定理

Richard-Shih-Dong の不動点定理を用いれば，Robert の不動点定理を整数区間の直積 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ に拡張することはた易い.

定理 5 (川崎 [3]) $f=(f_1,\dots,f_n)$ を X から X への写像とする．ある置換 σ があって，どの $i=1,\dots n$ についても $f_{\sigma(i)}$ が $x_{\sigma(j)}$ $(j\geq i)$ に依存しなければ，f は唯一の不動点をもつ.

証明．番号をつけかえておくことにより，一般性を失うことなく $\sigma = id$ としてよい．このとき，仮定から，関係行列 $B(f)$ は強下三角行列になる．従って $\rho(B(f)) = 0$ である．$x+v \in X$ なる任意の $x \in X$, $v \in \{\pm 1\}^n$ に対して，離散ヤコビ行列は $f'(x,v) \leq B(f)$ を満たすから，$\rho(f'(x,v)) \leq \rho(B(f)) = 0$. よって Richard-Shih-Dong の不動点定理により，f は唯一の不動点をもつ．■

これを n 人非協力ゲームに適用する．戦略 $s_{-i} \in S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ に対するプレイヤー i の最適応答集合を $F_i(s_{-i})$ とする．

定理 6 (川崎 [3]) 適当にプレイヤーの番号をつけかえたのち，ある $f_i(s_{-i}) \in F_i(s_{-i})$ が i より若い番号のプレイヤーの戦略にしか依存しない，即ち，

$$f_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) = f_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \Box, \ldots, \Box)$$

ならば，純戦略 *Nash* 均衡が存在する．また，$F_i(s_{-i})$ が一点集合の場合は，純戦略均衡は一意に定まる．

証明．f_i はプレイヤー $i+1, \ldots, n$ の選択に依存せず自分自身は変数から排除されているので，定理 5 により，$f = (f_1, \ldots, f_n)$ は唯一の不動点をもつ．それを $s^* \in S$ とすると，プレイヤー i の利得関数 r_i は

$$r_i(s^*_{-i}, s^*_i) = \max_{s_i \in S_i} r_i(s^*_{-i}, s_i)$$

を満たす．これは s^* が Nash 均衡であることを意味する．■

定理 6 の仮定は強いが，完全情報展開形ゲームの最適応答写像はこの仮定を満たす．このことから，「完全情報ゲームは純戦略均衡をもつ」と言う Kuhn の定理を導くことができる．

5 完全情報展開形ゲームへの応用

展開形ゲームとは，ゲームの木を用いて記述されるゲームであり，有限の有向木（**ゲームの木**とよぶ）K, プレイヤー集合 P, 偶然手番の確率分布 p, 情報分割 U, 利得関数 h の 5 つの要素からなり，それらをまとめて**ゲームのルール**とよぶ．

- **ゲームの木**は根 O をもつ有限な有向木で，その葉（**頂点**とよぶ）集合を W とかく．また，節点 $x \neq y$ について，O から x への経路上に y があるとき，$y < x$ と定義する．葉以外の点を**手番**といい，手番全体を X で表す．手番 x とその直後の点を結ぶ枝を x の**選択肢**といい，x の選択肢全体を $A(x)$ で表す．また，根と葉を結ぶひとつの経路を**プレイ**とよぶ．

- **プレイヤー分割**：プレイヤーの集合を $N := \{1, \ldots, n\}$. 手番全体の分割 $X = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ を**プレイヤー分割**という．$i \in N$ に対し，$P_i (\neq \emptyset)$ はプレイヤー i の手番集合を表す．P_0 は**偶然手番**の集合で，n 人のプレイヤーは制御できないものとする．

- **偶然手番の確率分布**：各 $x \in P_0$ に対して，選択肢集合 $A(x)$ 上に確率分布 p_x が与えられている．

- **情報分割**とは，プレイヤー分割の細分で，次の条件 (i)(ii) を満たすものである．

  (i) 情報集合 u は同じプレイと 2 回以上交差しない．

  (ii) $x, y \in u$ ならば，$A(x) = A(y)$ である．

  各 $i \in N \cup \{0\}$ に対して，$U_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{im_i}\}$ が P_i の分割 $P_i = u_{i1} + \cdots + u_{im_i}$ のとき，U_i を**プレイヤー** i **の情報分割**，u_{ij} を**プレイヤー** i **の情報集合**とよぶ．

- **利得関数**は，葉 w に n 人のプレイヤーの利得 $h(w) = (h_1(w), \ldots, h_n(w))$ を対応させるベクトル値関数である．

全ての情報集合がただひとつの手番からなるとき，**完全情報ゲーム**とよぶ（図 1 左）．

展開形ゲームの基本的な戦略が行動戦略である．即ち，プレイヤー i は各情報集合 $u \in U_i$ でどの選択肢を選ぶかを決めなければならないが，選択肢の集合 $A(u)$ 上の確率分布（**局所戦略**とよぶ）b_{iu} を与える戦略をプレイヤー i の**行動戦略**といい，b_i と書く．特に，$A(u)$ のひとつの選択肢に確率 1 を与える行動戦略を**純戦略**という．純戦略は $u \in U_i$ に $A(u)$ の元を対応させる写像 π_i ととらえることができる．

行動戦略の組 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ が与えられたとき，葉 w に到達する確率が定まる．それを実現確率といい $p(w|b)$ と書く．この実現確率でプレイヤー i の利得 $h_i(w)$ の期待値をとったものを $H_i(b)$ と書き，次の不等式を満たす行動戦略 $b^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ を**均衡**とよぶ．

$$H_i(b^*) \geq H_i(b_i, b_{-i}^*) \quad \forall b_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

定理 7 （Kuhn 1953）完全情報ゲームには純戦略均衡が存在する．

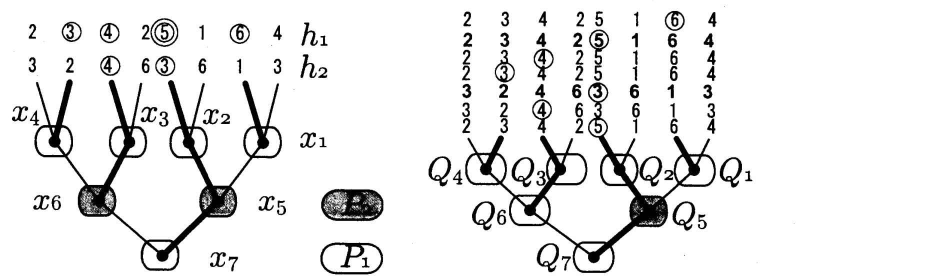


図 1: 左：P_1, P_2 の完全情報ゲーム．右：$Q_1, \ldots, Q_7$ の展開形ゲーム

証明．ゲームの木の手番について，半順序 $x < y$ の極大元を順次選ぶことにより，$x_1, \ldots, x_m$ と番号を振り，手番 x_j のプレイヤーを Q_j とする（図 1 右）．偶然手番を除けば，Q_j は本来のプレイヤーのどれかひとつ P_i と手番 x_j を共有するので，Q_j の先にある葉には Q_j の

利得として P_i と同じ利得を与える．この展開形ゲームにおいて，手番 x_j は $x_{j+1},\ldots,x_m$ より大きいか比較不可能なので，戦略 $s_{-j} \in S_{-j} = \prod_{k\neq j} S_k$ により手番 x_j に到達する場合，Q_j の最適応答は $Q_{j+1},\ldots,Q_m$ の戦略に依存しない．そのような最適応答のひとつを $f_j(s_{-j})$ とする．また，手番 x_j に到達しない場合は，Q_j の最適応答は S_j になる．よって，後者の場合も最適応答として $f_j(s_{-j})$ をとると，それは $Q_{j+1},\ldots,Q_m$ の戦略に依存しない．よって，定理 6 により，$Q_1,\ldots,Q_m$ の純戦略均衡 $s^* := (s_1^*,\ldots,s_m^*)$ が存在する．もし s^* がプレイヤー $P_1,\ldots,P_n$ にとっての均衡でなければ，あるプレイヤー P_i が別の戦略をとることにより，P_i の利得 H_{P_i} が真に増加する．ここで，P_i は複数のプレイヤーからなるが，そのうちの少なくとも 2 人 Q_j $(j = j_1, j_2)$ が戦略を変更することになる．もし $x_{j_1} < x_{j_2}$ ならば，Q_{j_1} の変更により手番 x_{j_2} には到達しないから，Q_{j_2} は利得の改善に寄与しない．したがって，x_{j_1} と x_{j_2} は比較不可能でなければならない．しかしこのときも，二人のどちらかは利得の改善に寄与しない．この要領で P_i を構成するプレイヤー Q_j $(j \in J_i)$ から利得の改善に寄与しないプレイヤーを除いてゆくと，最後は一人のプレイヤー Q_j だけになり，s^* が $Q_1,\ldots,Q_m$ の均衡であることに矛盾する．故に s^* は $P_1,\ldots,P_n$ の均衡である．■

参考文献

[1] T. Iimura, A discrete fixed point theorem and its applications, *J. Math. Econom.*, **39** (2003), 725–742.

[2] T. Iimura, K. Murota and A. Tamura, Discrete fixed point theorem reconsidered, *J. Math. Econom.*, **41** (2005), 1030–1036.

[3] 川崎英文，縮小写像の離散不動点定理とその応用，京都大学数理解析研究所講究録 1682「不確実・不確定性下での意思決定過程」，ed. 土肥正, (2010) 163-167.

[4] F. Robert, *Discrete Iterations: A Metric Study*, Springer, Berlin, (1986).

[5] J. Sato and H. Kawasaki, Discrete fixed point theorems and their application to Nash equilibrium, *Taiwanese J. Math.*, **13** (2009), 431–440.

[6] M.-H. Shih and J.-L. Dong, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Advances in Appl. Math.*, **34** (2005), 30–46.

[7] A. Richard, An extension of the Shih-Dong's combinatorial fixed point theorem, *Advances in Appl. Math.*, **41** (2008), 620–627.

[8] A. Tarski, A lattice-theoretical fixpont theorem and its applications, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 285–309.

[9] Z. Yang, Discrete fixed point analysis and its applications, FBA Working Paper No. 210, Yokohama National University, 2004.