

## 双曲群の境界について

東京大学大学院数理科学研究科 松田 能文 (Yoshifumi Matsuda)  
Graduate School of Mathematical Sciences,  
the University of Tokyo

本稿の目的は、双曲群の境界の性質について共形次元に関連するものを紹介することである。

### 1 双曲群とその境界

本節では双曲群およびその境界について復習する。双曲群の概念は Gromov[12] により導入されたものであり、その詳細についての参考文献としては [11], [12] などがある。また、双曲群の境界についての概説としては [6], [14] などがある。

$(X, d)$  を距離空間とする。

$\mathbb{R}$  の連結部分集合から  $X$  への等長的埋め込みまたはその像を測地線 (geodesic) という。  $X$  の任意の二点  $x, y$  に対して  $x$  と  $y$  を結ぶ測地線が存在するとき、  $(X, d)$  を測地空間 (geodesic space) であるという。

$(X, d)$  の任意の有界閉集合がコンパクトであるとき、  $(X, d)$  は固有 (proper) であるという。

$X$  の部分集合  $A$  および  $\varepsilon > 0$  に対して、  $X$  における  $A$  の  $\varepsilon$  近傍を  $N_\varepsilon(A)$  と記す。

距離空間の Gromov 双曲性は一般の距離空間に対して定義されるが、ここでは簡単のため測地空間に対してのみ定義する。

**定義 1**  $(X, d)$  を測地空間とする。  $(X, d)$  が **Gromov** 双曲空間 (Gromov hyperbolic space) であるとは、以下の条件を満たす実数  $\delta \geq 0$  が存在することをいう：

$X$  内の三角形の三辺  $\alpha, \beta, \gamma$  が測地線であるとき、  $\alpha \subset N_\delta(\beta \cup \gamma)$ ,  $\beta \subset N_\delta(\gamma \cup \alpha)$ ,  $\gamma \subset N_\delta(\alpha \cup \beta)$  が成り立つ。

Gromov 双曲空間の具体例としては、実双曲平面  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  が挙げられる。

次に、有限生成群の双曲性を定義する。

$G$  が有限生成群であり  $S$  が  $G$  の対称な (すなわち、  $S^{-1} = S$ ) 有限生成系であるとき、  $G$  の  $S$  に関する Cayley グラフ  $\Gamma(G, S)$  とは以下のように定義される一次元単体複体のことである：

$\Gamma(G, S)$  の頂点集合は  $G$  に等しく、  $x^{-1}y \in S$  であるときかつそのときに限り  $x$  と  $y$  は辺で結ばれる。

$\Gamma(G, S)$  の各辺の長さを 1 とすることにより定まる  $\Gamma(G, S)$  の距離を  $d_S$  と記す。

すと,  $(\Gamma(G, S), d_S)$  は固有な測地空間である.  $d_S$  の  $G$  への制限も  $d_S$  と表し,  $S$  に関する  $G$  の語距離という.

**定義 2**  $(X, d), (X', d')$  を距離空間とする.

写像  $f: X \rightarrow X'$  が擬等長写像 (*quasi-isometry*) であるとは, 次の (1), (2) が成り立つような実数  $\lambda \geq 1, C \geq 0$  が存在することをいう:

(1) 任意の  $x_1, x_2 \in X$  に対して,

$$\lambda^{-1}d(x_1, x_2) - C \leq d'(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) + C$$

が成り立つ.

(2)  $N_C(f(X)) = X'$ .

$(X, d)$  と  $(X', d')$  が擬等長的 (*quasi-isometric*) であるとは,  $(X, d)$  から  $(X', d')$  への擬等長写像が存在することをいう.

$G$  を有限生成群とし,  $S_1, S_2$  を  $G$  の有限生成系とすると, 包含写像  $i: G \rightarrow \Gamma(G, S_1)$  は  $(G, d_{S_1})$  から  $(\Gamma(G, S_1))$  への擬等長写像である. さらに, 写像

$G_1, G_2$  を有限生成群とし,  $S_1, S_2$  をそれぞれ  $G_1, G_2$  の有限生成系とする. このとき,  $(G_1, d_{S_1})$  と  $(G_2, d_{S_2})$  が擬等長的であることは  $S_1, S_2$  の取り方によらないので, 単に  $G_1$  と  $G_2$  が擬等長的であるということにする.

**定義 3**  $G$  を有限生成群とする.  $G$  が双曲群 (*word-hyperbolic group*) であるとは,  $G$  のある有限生成系  $S$  に関する Cayley グラフ  $\Gamma(G, S)$  が Gromov 双曲空間であることをいう.

測地空間の Gromov 双曲性は擬等長不変であることが知られているので, 有限生成群の双曲性は有限生成系の取り方によらない.

次に, Gromov 双曲空間の Gromov 境界を定義する. 以後, 簡単のため固有な Gromov 双曲空間のみを考える.

$(X, d)$  を固有な Gromov 双曲空間とし,  $X$  の点  $x_0$  を固定する.

$R(X) := \{\gamma: [0, +\infty) \rightarrow X \mid \gamma \text{ は測地線, } \gamma(x_0)\}$  とおく.  $\gamma_1, \gamma_2 \in R(X)$  に対して, ある実数  $C \geq 0$  が存在して任意の  $t \in [0, +\infty)$  に対し  $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C$  が成り立つとき  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  と記すと,  $\sim$  は  $R(X)$  の同値関係である.

**定義 4**  $R(X)/\sim$  を Gromov 双曲空間  $(X, d)$  の **Gromov 境界** (*Gromov boundary*) といい,  $\partial X$  と表す.

$\partial X$  には  $R$  のコンパクト開位相の商位相  $\mathcal{O}$  を与える. このとき,  $\partial X$  はコンパクトかつ距離化可能である. 特に  $\partial X$  の視距離と呼ばれる次のような距離を考える.

**定義 5**  $a > 1$  とする.  $\partial X$  の距離  $d_a$  がパラメータ  $a$  に関する視距離 (*visual metric*) であるとは, 次の (1), (2) が成り立つことをいう.

(1)  $d_a$  が定める  $\partial X$  の距離位相は  $\mathcal{O}$  である。

(2) 以下が成り立つような実数  $C > 0$  が存在する:

任意の測地線  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$  に対して, 測地線  $\gamma_+, \gamma_-: [0, +\infty) \rightarrow X$  を  $t \in [0, +\infty)$  に対して  $\gamma_+(t) = \gamma(t)$ ,  $\gamma_-(t) = \gamma(-t)$  より定義すると,

$$C^{-1}a^{-d(o,\gamma)} \leq d_a([\gamma_+], [\gamma_-]) \leq Ca^{-d(o,\gamma)}$$

が成り立つ。

任意の固有な Gromov 双曲空間  $(X, d)$  に対してある実数  $a_0 > 1$  が存在して, 任意の実数  $a \in (1, a_0)$  に対してパラメータ  $a$  に関する  $\partial X$  の視距離が存在することが知られている。

Gromov 双曲空間の例として, 階数 1 の対称空間を紹介する。

**例 1** ([3] など参照)  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $n \geq 1$  とする。

$\mathbb{K}^n$  の元  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  に対して,

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$ ,  $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$  とおく.  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \|\mathbf{x}\| < 1\}$  と定義する。

$\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  の距離  $d_h$  を  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  に対して以下のように定義する:

$$\cosh d_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2} \sqrt{1 - \|\mathbf{y}\|^2}}.$$

このとき,  $(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n, d_h)$  は Gromov 双曲空間である。

$k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$  とおくと,  $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  の Gromov 境界  $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  は  $S^{kn-1} = \{\xi \in \mathbb{K}^n \mid \|\xi\| = 1\}$  と自然に同一視できる. 特に,  $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  は  $(kn-1)$  次元球面  $S^{kn-1}$  と同相である. さらに,  $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  の距離  $d_C$  を  $\xi, \eta \in \partial \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  に対して

$$d_C(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1 - \langle \xi, \eta \rangle}{2}}$$

と定義すると,  $d_C$  はパラメータ  $e$  に関する  $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  の視距離である。

有限生成群を擬等長に関して分類することは重要な問題である. 双曲群の擬等長に関する分類を境界の言葉で与えることを考える。

**定義 6**  $(Z, d)$ ,  $(Z', d')$  を距離空間とする。

同相写像  $h: Z \rightarrow Z'$  が擬対称写像 (quasisymmetric map) であるとは, 以下の条件を満たす同相写像  $\eta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  が存在することをいう:

$z_1 \neq z_3$  を満たす任意の  $z_1, z_2, z_3 \in Z$  に対して,

$$\frac{d'(h(z_1), d'(z_2))}{d'(h(z_1), d'(z_3))} \leq \eta \left( \frac{d(z_1, z_2)}{d(z_1, z_3)} \right)$$

が成り立つ。

$(Z, d)$  と  $(Z', d')$  が擬対称的 (quasi-symmetric) であるとは,  $(Z, d)$  から  $(Z', d')$  への擬対称写像が存在することをいう。

$G$  を双曲群,  $a_1, a_2 > 1$  とし,  $d_{a_1}, d_{a_2}$  をそれぞれパラメータ  $a_1, a_2$  に関する  $\partial G$  の視距離とすると, 恒等写像  $\text{id}_{\partial G}$  は  $(\partial G, d_{a_1})$  から  $(\partial G, d_{a_2})$  への擬対称写像である。

よって,  $G, G'$  を双曲群,  $a, a' > 1$ ,  $d_a$  をパラメータ  $a$  に関する  $\partial G$  の視距離,  $d_{a'}$  をパラメータ  $a'$  に関する  $\partial G'$  の視距離とすると,  $(\partial G, d_a)$  と  $(\partial G', d_{a'})$  が擬対称的であることは視距離  $d_a, d_{a'}$  の取り方によらないので, 単に  $\partial G$  と  $\partial G'$  が擬対称的であるということにする.

Paulin[20] の定理より次の定理が従う.

**定理 1**  $G, G'$  を双曲群とする. このとき,  $G_1$  と  $G_2$  が擬等長的であることと  $\partial G$  と  $\partial G'$  が擬対称的であることが同値である.

したがって, 双曲群の擬等長類を考えることは双曲群の境界の擬対称類を考えることと同じであり, 双曲群の境界の擬対称不変量を考えることが重要である.

この節の最後に, 双曲群の境界を調べる上で有用な補題を紹介する.

群  $G$  の距離空間  $(X, d)$  への作用が固有不連続 (properly discontinuous) であるとは,  $X$  の任意の点  $x$  および任意の実数  $r > 0$  に対して,  $d(x, gx) < r$  が成り立つ  $G$  の元  $g$  が高々有限個であることをいう.

群  $G$  の距離空間  $(X, d)$  への作用が等長的かつ固有不連続であり  $X/G$  がコンパクトであるとき,  $G$  の  $(X, d)$  への作用は幾何学的 (geometric) であるという.

**補題 2 (Svarc, Milnor)** 群  $G$  が固有な測地空間  $(X, d)$  に幾何学的に作用しているとする. このとき,  $G$  は有限生成であり, さらに  $G$  の任意の有限生成系  $S$  に対して,  $(G, d_S)$  は  $(X, d)$  と擬等長的である.

この補題により, 群  $G$  が固有な Gromov 双曲空間  $(X, d)$  に幾何学的に作用しているとする,  $G$  は双曲群であり,  $\partial G$  と  $\partial X$  は擬対称的であることが分かる. 例えば,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  とし,  $M$  を  $\dim_{\mathbb{K}} = n$  なる双曲閉多様体とすると,  $M$  の基本群  $\pi_1(M)$  は  $(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n, d_h)$  に幾何学的に作用するので,  $\pi_1(M)$  は双曲群であり, さらに, その Gromov 境界  $\partial\pi_1(M)$  は  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$  と擬対称的である. 特に,  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = k$  とおくと,  $\partial\pi_1(M)$  は  $(kn - 1)$  次元球面  $S^{kn-1}$  と同相である.

## 2 共形次元

本節では, 距離空間の擬対称不変量である共形次元について復習する. 詳細は [13], [18] を参照せよ.

距離空間  $(Z, d')$  のハウスドルフ次元を  $\text{Hdim}(Z, d')$  と表す.

**定義 7**  $(Z, d)$  を距離空間とする.  $(Z, d)$  の共形次元 (conformal dimension)  $\text{Cdim}(Z, d)$  を以下で定義する:

$\text{Cdim}(Z, d) := \inf\{\text{Hdim}(Z, d') \mid \text{id}_Z : (Z, d) \rightarrow (Z, d') \text{ は擬対称写像}\}.$

共形次元の概念は Pansu [19] により階数 1 の対称空間の研究のために導入された. 距離空間の共形次元を求めることは一般に難しいが, Pansu により双曲空間の Gromov 境界の共形次元が決定された.

**定理 3 (Pansu [19])**  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $n \geq 1$  とし,  $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$  とおくととき,

$$\text{Cdim}(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n, d_C) = kn + k - 2$$

が成り立つ.

特に,  $\text{Cdim} \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 = 3$ ,  $\text{Cdim} \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = 4$  であるから,  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$  と  $\text{Cdim} \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  は同相であるが擬対称的でない.

このことから,  $M_1$  を実 4 次元双曲閉多様体,  $M_2$  を複素 2 次元双曲閉多様体とすると,  $\partial\pi_1(M_1)$  と  $\partial\pi_1(M_2)$  はともに 3 次元球面  $S^3$  と同相であるが,  $\pi_1(M_1)$  と  $\pi_1(M_2)$  は擬等長でないことが分かる.

一方, Gromov 境界が 2 次元球面と同相な双曲群について, 以下の Cannon の予想が有名である.

**予想 1 (Cannon の予想)** 双曲群  $G$  の Gromov 境界  $\partial G$  が  $S^2$  と同相であるならば,  $G$  は  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  に幾何学的に作用する.

Tukia[21] の結果を用いると, Cannon の予想は以下のように言い換えられる:

双曲群  $G$  の Gromov 境界  $\partial G$  が  $S^2$  と同相であるならば,  $\partial G$  と  $S^2$  が擬対称的である.

### 3 低次元の境界を持つ双曲群

本節では, 境界の次元が低い双曲群について知られている事実について述べる. 本節を通して,  $G$  は無限双曲群とする (双曲群が無限群であることとその Gromov 境界が空でないことが同値である).

$G$  の Gromov 境界  $\partial G$  が連結でないならば,  $G$  は有限群上の融合積に分解する, すなわち  $G = A *_C B$  ( $C$  は有限群) と表せる. よって, Gromov 境界が連結である場合が基本的である. ここでは, 特に  $\partial G$  の被覆次元が 1 次元である場合を考える.

Casson-Jungreis [8] と Gabai [10] により独立に証明されたいわゆる「収束群定理」の帰結として, 境界が円周と同相な双曲群は以下のように特徴づけられる.

**定理 4** 双曲群  $G$  の Gromov 境界  $\partial G$  が円周  $S^1$  と同相であるならば,  $G$  は  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$  に幾何学的に作用する.

Bowditch[7] は,  $G$  の代数的な性質と  $\partial G$  の位相的性質の間に以下のような関係があることを示した.

**定理 5 (Bowditch[7])** 双曲群  $G$  の Gromov 境界  $\partial G$  が連結でありかつ円周  $S^1$  と同相でないとする. このとき,  $\partial G$  は局所連結であるかつ切断点を (*cut point*) を持たない. さらに,  $\partial G$  が局所切断点 (*local cut point*) を持つことと  $G$  が有限指数無限巡回部分群を持つ群の上で分解する, すなわち  $G = A *_C B$  ( $C$  は有限指数無限巡回部分群を持つ群) と表せることが同値である.

したがって,  $\partial G$  が局所切断点を持たない場合が基本的であるが,  $\partial G$  の被覆次元が 1 次元であるという仮定の下ではそのような状況は限られていることを示すのが次の定理である.

**定理 6 (Kapovich-Kleiner [16])** 双曲群  $G$  の Gromov 境界  $\partial G$  が連結であるとする.  $\dim \partial G = 1$  であり  $\partial G$  が局所切断点を持たないならば,  $\partial G$  は *Sierpinski carpet* か *Menger curve* のいずれかと同相である.

証明には Anderson[1], [2] による *Sierpinski carpet* か *Menger curve* の位相的特徴付けが用いられている.

Gromov 境界が *Sierpinski carpet* と同相であるような双曲群の例としては, 実 3 次元双曲空間  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$  の空でない全測地的境界を持つ凸部分集合に幾何学的に作用するクライン群がある ([15] などを参照).

一方, Gromov 境界が *Menger curve* と同相であるような双曲群はよりありふれているといえる. Champetier[9] は, "ほとんど全ての" 双曲群の境界は *Menger curve* と同相であることを証明した. さらに, Bourdon[4], [5] は, Gromov 境界が *Menger curve* と同相である双曲群の族  $\{G_{p,q} \mid p \geq 5, q \geq 3\}$  であって,

$$\text{Cdim } \partial G_{p,q} = 1 + \frac{\log(q-1)}{\text{Arccosh} \frac{p-2}{2}}$$
 であるものを構成した.  $\{\text{Cdim } \partial G_{p,q} \mid p \geq 5, q \geq 3\}$  は  $(1, \infty)$  において稠密である.

最後に, 境界の共形次元が 1 次元である双曲群について考える. Mackay[17] の定理により以下の定理が従う.

**定理 7** 双曲群  $G$  に対して  $\text{Cdim } \partial G = 1$  であるとする. このとき,  $\partial G$  が  $S^1$  と同相であるかあるいは  $\partial G$  が局所切断点を持つ.

## 参考文献

- [1] R. D. Anderson, *A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity*, Ann. of Math. (2) 67 (1958), 313-324.
- [2] R. D. Anderson, *One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem*, Ann. of Math. (2) 68 (1958), 1-16.

- [3] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric space of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319, Springer, 1999.
- [4] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidite de Mostow*, Geom. Funct. Anal. 7 (1997), no. 2, 245-268.
- [5] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuchsien et leur type de quasi-isométrie*, Ergodic Theory Dynam. Systems 20 (2000), no. 2, 343-364.
- [6] M. Bourdon and H. Pajot, Quasi-conformal geometry and hyperbolic geometry, in *Rigidity in dynamics and geometry* (Cambridge, 2000), Springer, 2002, 1-17.
- [7] B. H. Bowditch, *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Acta Math. 180 (1998), no. 2, 145-186.
- [8] A. Casson and D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, Invent. Math. 118 (1994), 441-456.
- [9] C. Champetier, *Propriétés statistiques des groupes de présentation finie*, Adv. Math. 116 (1995), no. 2, 197-262.
- [10] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups*, Ann. of Math. (2) 136 (1992), 447-510.
- [11] E. Ghys and P. de la Harpe, *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progr. in Math. 83, Birkhäuser, 1990.
- [12] M. Gromov, Hyperbolic groups, in *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, 1987, 75-263.
- [13] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext. Springer, 2001.
- [14] I. Kapovich and N. Benakli, Boundaries of hyperbolic groups. *Combinatorial and geometric group theory* (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001), Contemp. Math., 296, Amer. Math. Soc., 2002 39-93.
- [15] M. Kapovich, Kleinian groups in higher dimensions, in *Geometry and dynamics of groups and spaces*, Progr. Math., 265, Birkhäuser, 2008, 487-564.
- [16] M. Kapovich and B. Kleiner, *Hyperbolic groups with low-dimensional boundary*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 33 (2000), no. 5, 647-669.

- [17] J. M. Mackay, *Spaces and groups with conformal dimension greater than one* , Duke Math. J. 153 (2010), no. 2, 211-227,
- [18] J. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal dimension: theory and application* , University Lecture Series, 54. Amer. Math. Soc., 2010.
- [19] P. Pansu, *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 14 (1989), no. 2, 177-212.
- [20] F. Paulin, *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord* , J. London Math. Soc. (2) 54 (1996), no. 1, 50-74.
- [21] P. Tukia, *On quasiconformal groups* , J. Analyse Math. 46 (1986), 318-346.