

# A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR A METRIC SPACE TO BE COARSE EQUIVALENCE TO THE HALF REAL LINE

知念直紹 (NAOTSUGU CHINEN)  
広島工業大学 (HIROSHIMA INSTITUTE OF TECHNOLOGY)

## 1. 序章

トポロジーにおいて、空間を分類する主な道具として同相写像がある。つまり、空間どうしが同相写像で結ばれるならば、同じ空間としてみなそうということである。連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が同相写像とは、連続写像  $g: Y \rightarrow X$  が存在して  $g \circ f = \text{id}_X$  と  $f \circ g = \text{id}_Y$  を満たす ( $X \cong Y$  と書く)。ここで、 $\text{id}_X: X \rightarrow X$  と  $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$  は恒等写像とする。2つの空間が同相かそうでないかを判定する道具として、ホモトピー群あるいはホモロジー群がある。上述の群はホモトピー世界では保たれる群となっている。つまり、2つの空間  $X$  と  $Y$  がホモトピー同値とは ( $X \simeq Y$  と書く)、連続写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow X$  が存在して  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  と  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  を満たす。ここで、 $\simeq$  はホモトピックを表す。 $X \simeq Y$  はホモトピーの意味で同じ空間と思えることができる。また、 $X \cong Y$  ならば  $X \simeq Y$  がよく知られている。今まで、多くの研究者がコンパクトな距離空間を上述の意味において調べてきた。ただ、複雑な空間は難しく、同相かどうかを判断するのは容易くない。蛇足だが、同相より弱くホモトピーの概念を拡張した Shape 同値 (Shape の意味で同じ空間) というのもある ([11] を参照)。Shape 理論はより複雑なコンパクトな空間を大雑把に調べることを目的としている。

近年、Gromov の 1980 年代の研究をきっかけとしてコンパクトでないあるいは有界でない空間が盛んに調べられている。それ以前からコンパクトでないあるいは有界でない空間は、proper 写像を道具として多く研究されている。つまり、上述の写像を proper 写像に置き換えて空間を調べることである。写像  $f: X \rightarrow Y$  が proper であるとは、任意の  $Y$  のコンパクト集合  $Z$  に対して  $f^{-1}(Z)$  がコンパクトになることである。コンパクトでない空間を proper 写像を使って調べることはある意味コンパクト空間に類似した結果が導かれる。しかし、Gromov はこの方法と別な手法、Coarse 的な手法を用いて有界でない空間あるいは無限群を調べ、重要な結果を導きだした。(Gromov に関しては [16] などを参照)

**Definition 1.1** ([3] and [6]). Let  $(X, d)$  and  $(Y, \rho)$  be metric spaces, and let  $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  be two functions (not necessarily continuous).

- (1)  $f$  is *bornotopic* to  $g$ , written  $f \underset{b}{\sim} g$ , if there exists  $R > 0$  such that  $\rho(f(x), g(x)) < R$  for all  $x \in X$ , denoted by  $\rho(f, g) < R$ .
- (2)  $f$  is *metrically proper* if  $f^{-1}(C)$  is  $d$ -bounded for all  $\rho$ -bounded subset  $C$  of  $Y$ .
- (3)  $f$  is *uniformly expansive* if there exists a monotone increasing function  $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that  $\rho(f(x), f(x')) \leq \lambda(d(x, x'))$  for all  $x, x' \in X$ .
- (4)  $f$  is a *coarse map* if it is both metrically proper and uniformly expansive.

**Definition 1.2.**  $(X, d)$  and  $(Y, \rho)$  are *coarsely equivalent*, written  $(X, d) \underset{c}{\sim} (Y, \rho)$ , if there exist coarse maps  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  and  $g : (Y, \rho) \rightarrow (X, d)$  such that  $g \circ f \underset{b}{\sim} \text{id}_{(X, d)}$  and  $f \circ g \underset{b}{\sim} \text{id}_{(Y, \rho)}$ .

上述の Coarse 同値  $(X, d) \underset{c}{\sim} (Y, \rho)$  というのは、簡単にいえば、適当な均等において  $X$  と  $Y$  は同じであるといえる。つまり空間を大雑把に調べようということであり、特に局所的なことは無視し、グローバルに空間を捉えることである。上述の均等性とは距離に依存するので、Coarse 同値は距離に依存する。つまり、同相な空間でも距離のいれかたにより、Coarse 同値とはならない (2章を参照)。

昔から、空間の特徴付けが研究されてきた。有名なのは3次元多様体のホモトピー的な特徴付けであるポアンカレ予想である。つまり、3次元球面とホモトピー同値な3次元閉多様体は3次元球面と同相である。また1次元空間でよく知られている事実として、コンパクト連結な距離空間  $X$  が  $[0, 1]$  と同相である必要かつ十分条件は  $X$  の cut しない点は2点のみである ([13, p.96] を参照) (サークルに関しては [18, p.31]、 $\mathbb{R}$ -tree に関しての特徴付けは [12] を参照)。  $X$  をコンパクトでない局所連結な連結距離空間としたとき、  $[0, 1]$  の特徴付けと1点コンパクト化から、  $X$  が  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  と同相である必要かつ十分条件は  $X$  は one end をもち、さらに cut しない点は1点のみである。また、空間  $X$  の Stone-Čech コンパクト化を  $\beta X$  と書くことにする。 [17, pp.239-240] によって、以下のことが知られている。

**Proposition 1.3** ([17]). *Let  $X$  be a noncompact locally connected, locally compact connected metric space. Then  $\beta X \setminus X$  is homeomorphic to  $\beta \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_+$  if and only if  $X$  has strong complementation property.*

Coarse 同値は Higson コンパクト化と深い関係があることが知られている ([14] を参照)。また、Higson コンパクト化は Stone-Čech コンパクト化と深い関係があることが知られている ([9][10] を参照)。この論文において、Proposition 1.3 の結果からヒントに、距離空間  $(X, d)$  が  $(\mathbb{R}_+, d_+)$  と Coarse 同値になるための必要かつ十分条件を述べる。ここで、  $d_+$  は絶対値から導かれる  $\mathbb{R}_+$  の通常の距離とする。

**Theorem 1.4** (Characterization Theorem). *Let  $X$  be an unbounded chain connected separable metric space with a metric  $d$ . Then the following are equivalent:*

- (1)  $(X, d)$  is coarse equivalence to  $(\mathbb{R}_+, d_+)$ .
- (2)  $(X, d)$  is coarsely uniformly chain connected, is of the bounded geometry and has the coarse strong complementation property.

上述の定理の3つの性質は3章で述べることにする。

## 2. $\mathbb{R}_+$ の位相をかえない $\mathbb{R}_+$ の距離について

$d_n$  を  $\mathbb{R}^n$  の通常の距離とする。  $(\mathbb{R}_+, d_+)$  から  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  への coarse 写像が存在しないので、Coarse 同値の定義から、  $(\mathbb{R}_+, d_+)$  と  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  は Coarse 同値ではない (asymptotic 次元を知っていれば ([6] を参照)、 asymptotic 次元は Coarse 同値で保存されることと、  $\text{asdim}(\mathbb{R}_+, d_+) = 1$  で  $\text{asdim}(\mathbb{R}^2, d_2) = 2$  であることからわかる)。次に、  $\mathbb{R}_+$  の位相をか

えないように  $\mathbb{R}_+$  の距離を  $\rho$  に変えて、 $(\mathbb{R}_+, \rho)$  と  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  を Coarse 同値になるようにしよう。

まず、簡単な Coarse 同値の十分条件を述べる。

**Proposition 2.1.** [14] *Let  $(X, d_X)$  and  $(Y, d_Y)$  be metric spaces. If  $(Y, d_Y)$  is an  $\epsilon$ -dense subset of  $(X, d_X)$  for some  $\epsilon > 0$ , then  $(X, d_X) \underset{c}{\sim} (Y, d_Y)$ .*

ここで、 $(X, d)$  を距離空間、 $\epsilon > 0$  として、 $Y \subset X$  が  $\epsilon$ -dense であるとは、

$$X = \{x \in X : d(x, y) < \epsilon \text{ for some } y \in Y\}$$

を満たすときである。

証明の概要.  $f : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$  とする。今、特に  $Y$  は可算集合としよう。つまり  $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  とする。 $g : X \rightarrow Y$  を  $g(\{y_n\} \cup B(y_n, \epsilon) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(y_i, \epsilon)) = y_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を満たすように定義する。すると、 $f$  と  $g$  は coarse 写像で、 $g \circ f \underset{b}{\sim} \text{id}_{(X, d)}$  と  $f \circ g \underset{b}{\sim} \text{id}_{(Y, \rho)}$  を満たすので、 $(X, d_X) \underset{c}{\sim} (Y, d_Y)$  となる。□

これを使って簡単な例を述べる。

**Example 2.2.**  $Y = \{(t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}_+\}$ 、 $d_2$  を  $Y$  に制限した距離を  $\rho = d_2|_Y$  とする。明らかに、 $(Y, \rho)$  は  $\mathbb{R}_+$  と同相で  $Y$  は  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  において 2-dense であることから、Proposition 2.1 より、 $(\mathbb{R}_+, \rho) \underset{c}{\sim} (\mathbb{R}^2, d_2)$

上述の例を鑑みると、どんな連結な距離空間も  $\mathbb{R}_+$  の位相をかえない  $\mathbb{R}_+$  の距離を選んで Coarse 同値にできそうである。その肯定的な結果は以下に述べる。

**Definition 2.3** ([1]). A metric space  $(X, d)$  is said to be *coarsely uniformly connected at  $\infty$* , if for any  $\epsilon > 0$  there exist a compact set  $K$  of  $X$  and a  $\delta > 0$  such that for any two points  $x, y \in X \setminus K$  with  $d(x, y) < \epsilon$  there exists a connected set  $Z$  in  $X$  satisfying  $x, y \in Z$  and  $\text{diam} Z < \delta$ .

**Theorem 2.4** ([2]). *Let  $(X, d)$  be a noncompact, connected proper metric space with coarsely uniformly connected at  $\infty$ . If  $\nu_d X$  is connected, then there exists a proper metric  $\rho$  on  $\mathbb{R}_+$  compatible with the topology of  $\mathbb{R}_+$  such that  $(X, d) \underset{c}{\sim} (\mathbb{R}_+, \rho)$ .*

ここで、 $\nu_d X$  は距離空間  $(X, d)$  の Higson corona (すなわち、Higson コンパクト化の remainder) とする ([2] あるいは [14] を参照)。 $(\mathbb{R}_+, d_+)$  から  $(\mathbb{R}, d_1)$  への coarse 写像が存在しないので、Coarse 同値の定義から、 $(\mathbb{R}_+, d_+)$  と  $(\mathbb{R}, d_1)$  は Coarse 同値ではないことがわかる。上述と  $\nu_{d_1} \mathbb{R}$  が非連結であることから  $\nu_d X$  が連結であることは必要条件であるがわかる。

否定的な結果として以下がある。

**Example 2.5** ([2]). There exists a locally connected, connected proper metric space  $(X, d)$  such that  $\nu_d X$  is connected and  $(X, d)$  and  $(\mathbb{R}_+, \rho)$  are not coarsely equivalent for all proper metric  $\rho$  on  $\mathbb{R}_+$  compatible with the topology of  $\mathbb{R}_+$ .

以上のことから、Coarse 同値とは距離に依存することがよくわかる。以上のことをふまえて、次の章において  $(\mathbb{R}_+, d_+)$  と Coarse 同値であるための必要かつ十分条件を探して行こう。

### 3. 3つの性質

$(\mathbb{N}, d_+|_{\mathbb{N}}) \underset{c}{\sim} (\mathbb{R}_+, d_+)$  であるように、 $(\mathbb{R}_+, d_+)$  と Coarse 同値な空間は連結であることを期待できないので、まず連結の Coarse 的な定義を導入しよう。

**Definition 3.1.** Let  $(X, d)$  be a metric space and let  $r > 0$ .

- (1) A sequence  $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  in  $X$  is said to be an  $r$ -chain in  $(X, d)$  between  $x_0$  and  $x_n$  if  $d(x_{i-1}, x_i) \leq r$  for each  $i = 1, \dots, n$ . For  $0 \leq k_0 \leq k_1 \leq n$ ,  $T = \{x_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots, x_{k_1}\}$  is said to be an  $r$ -subchain of  $S$ .
- (2)  $(X, d)$  is said to be  $r$ -chain connected, chain connected for brevity, if for any two points  $x, y$  of  $X$  there exists an  $r$ -chain in  $(X, d)$  connecting between  $x$  and  $y$ .

*Remark 3.2.* Let  $(X, d)$  and  $(Y, \rho)$  be metric spaces and let  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  be uniformly expansive. If  $(X, d)$  is chain connected,  $(f(X), \rho|_{f(X)})$  is so.

$(\mathbb{R}_+, d_+)$  と Coarse 同値な空間は局所連結を期待できないので、定義 2.3 を参考に以下の 1 つ目の定義 (性質) を導入しよう。

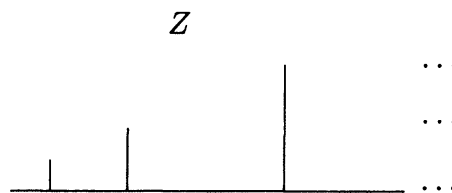
**Definition 3.3.** A metric space  $(X, d)$  is said to be *coarsely uniformly chain connected*, write *cuc-connected* for short, if there exists  $r > 0$  satisfying the following: for any  $\epsilon > 0$  there exists  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  such that for any two points  $x, y$  of  $X$  with  $d(x, y) < \epsilon$  there exists an  $r$ -chain  $S$  in  $(X, d)$  connecting between  $x$  and  $y$  satisfying  $\text{diam}_d S < \delta$ .

以下、簡単な例を紹介する。

**Example 3.4.** (1)  $(\mathbb{R}^n, d_n)$  は coarsely uniformly chain connected になる。

(2) 定義 2.3 の coarsely uniformly connected at  $\infty$  であれば、coarsely uniformly chain connected になる。

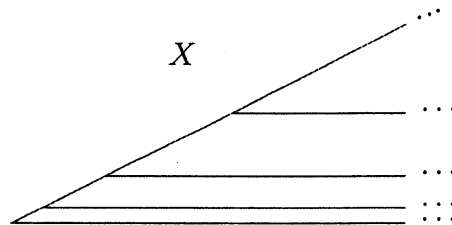
(3)  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $Z_n = \{(2^n, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2^n\}$ 、 $Z = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \cup \bigcup_n Z_n$ 、 $\rho = d_2|_Z$  とする。 $(Z, \rho)$  は coarsely uniformly chain connected になる。



$\text{BdB}(Z, 1)$  を  $\mathbb{R}^2$  での  $Z$  の 1-近傍  $B(Z, 1)$  の境界とし、 $X = \mathbb{R}_+^2 \cap \text{BdB}(Z, 1)$ 、 $d = d_2|_X$  とする。 $(X, d)$  は coarsely uniformly chain connected だが、coarsely uniformly connected at  $\infty$  ではない。

Proposition 2.1 より、 $(Z, d) \underset{c}{\sim} (B(Z, 1), d_2|_{B(Z, 1)}) \underset{c}{\sim} (X, \rho)$  がわかる。

(4)  $X_0 = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ 、 $X_\infty = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}_+\}$ 、 $X_n = \{(t, 2^n) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 2^n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )、 $X = X_\infty \cup X_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ 、 $d = d_2|_X$  とする (下図参照)。このとき、 $(X, d)$  は coarsely uniformly chain connected ではない。



連結な空間  $X$  が *the strong complementation property* を持つとは、以下の条件を満たす:  $X$  の連結部分空間  $U$  に対して、 $\text{Cl}U$  がコンパクトでなければ、 $\text{Cl}(X \setminus U)$  はコンパクトとなる ([17, p.236] を参照)。この定義を参照し、chain connected を取り入れて Coarse に解釈した定義が以下の通りになる。つまり、2つ目の定義 (性質) を導入しよう。

**Definition 3.5.** A metric space  $(X, d)$  is said to have *the coarse strong complementation property*, write the *csc-property* for short, for every  $r > 0$  and every unbounded  $r$ -chain connected subset  $(U, d|_U)$  of  $(X, d)$  there exists  $\gamma > 0$  such that  $B_d(U, \gamma) = X$ , thus,  $(X, d) \underset{c}{\sim} (U, d|_U)$  by Proposition 2.1.

最後に 3つ目の定義 (性質) を導入しよう。

**Definition 3.6** ([4]). Let  $(X, d)$  be a metric space. For  $r > 0$ , the *r-capacity* of  $(X, d)$ , denoted  $\text{cap}_r X$ , is the maximal cardinality of an  $r$ -discrete subset of  $X$ . A metric space  $(X, d)$  is of *bounded geometry* if there exist  $r > 0$  and a function  $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  such that for every  $\epsilon > 0$  and every  $x \in X$  the  $r$ -capacity of  $B(x, \epsilon)$  does not exceed  $N(\epsilon)$ , i.e.,  $\text{cap}_r B(x, \epsilon) \leq N(\epsilon)$ .

**Example 3.7.** (1)  $(\mathbb{R}^n, d_n)$  は bounded geometry をもつ。

(2) bounded geometry を持つ空間の部分空間は bounded geometry をもつ。よって Example 3.4(3)(4) の例は bounded geometry をもつ。

(3) Hilbert 空間 ([7, pp.252-253] を参照) は bounded geometry をもたない。

明らかに、 $(\mathbb{R}_+, d_+)$  は上述の 3つの性質を持っている。下の結果からの 3つの性質は Coarse 写像によって保たれることがわかる。

**Lemma 3.8.** Let  $(X, d)$  and  $(Y, \rho)$  be metric spaces, let  $R > 0$  and let  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  and  $g : (Y, \rho) \rightarrow (X, d)$  be uniformly expansive such that  $\max\{d(g \circ f, \text{id}(X, d)), \rho(f \circ g, \text{id}(Y, \rho))\} < R$ .

(1) If  $(X, d)$  is chain connected, then  $(Y, \rho)$  is so.

(2) If  $(X, d)$  has the csc-property, then  $(Y, \rho)$  has so.

(3) If  $(X, d)$  is cuc-connected, then  $(Y, \rho)$  is so.

(4) If  $(X, d)$  is of bounded geometry, then  $(Y, \rho)$  is so.

#### 4. 主定理と例

もう一度、主定理を述べる。

**Theorem 4.1** (Characterization Theorem). *Let  $X$  be an unbounded chain connected separable metric space with a metric  $d$ . Then the following are equivalent:*

- (1)  $(X, d)$  is coarse equivalence to  $(\mathbb{R}_+, d_+)$ .
- (2)  $(X, d)$  is coarsely uniformly chain connected, is of the bounded geometry and has the coarse strong complementation property.

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2) Lemma 3.8 からすぐにわかる。

(2) $\Rightarrow$ (1) [5] を参照。 □

次に、3つの例を挙げる。以下の例より、上述の(2)の3つ性質は独立な性質であることがわかる。つまり、3つ性質のどれが欠けても上述の定理は成立しないことがわかる。

**Example 4.2.** cuc-connected を満たし、bounded geometry を持つが、csc-property を持たない  $\mathbb{R}_+$  に同相な距離空間  $(X, d)$  が存在する。つまり、Lemma 3.8 から  $(X, d) \not\sim_c (\mathbb{R}_+, d_+)$  がわかる。

Example 3.4(3) の距離空間を  $(X, d)$  とする。Example 3.4(3) から  $(X, d)$  は cuc-connected であり、Example 3.7 から  $(X, d)$  は bounded geometry を持つことがわかる。また、すぐに  $(X, d)$  は  $\mathbb{R}_+$  に同相がわかる。

しかし、 $(X, d)$  は csc-property を持たない。なぜなら、Definition 3.5 の  $U$  を  $X \cap (\mathbb{R}_+ \times \{1\})$  とすると、どんな  $\gamma > 0$  に対しても、 $B(U, \gamma) \neq X$  となるからである。

**Example 4.3.** bounded geometry と csc-property を持つが、cuc-connected を満たさない  $\mathbb{R}_+$  に同相な距離空間  $(X, d)$  が存在する。よって、Lemma 3.8 から  $(X, d) \not\sim_c (\mathbb{R}_+, d_+)$  がわかる。

任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して、 $z_n = (n, 0) \in \mathbb{R}^2$ 、 $\theta(m, n) \in (0, 2\pi)$  を以下を満たすようにとる：

$$z'_{m,n} = (n \cos \theta(m, n), n \sin \theta(m, n)) \in \mathbb{R}^2 \text{ とすると、} d_2(z_n, z'_{m,n}) = m \text{ となる。}$$

また、無限列  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  を以下のようにとる。

$$1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, \dots$$

さらに、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $b_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 、 $\theta_n = \theta(a_n, b_n)$ 、 $\xi_0 = 0$ 、 $\xi_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i$  とする。 $\mathbb{R}^2$  の部分空間を以下のように決める。

$$X_n = \{(b_n \cos(\xi_{n-1} + (-1)^{n-1}t), b_n \sin(\xi_{n-1} + (-1)^{n-1}t)) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 2\pi - \theta_n\}$$

$$Y_n = \{(r \cos \xi_n, r \sin \xi_n) : b_n \leq r \leq b_{n+1}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \cup Y_n), \quad d = d_2|_X.$$

すぐに、 $X$  は  $\mathbb{R}_+$  と同相だとわかる。また、Example 3.7 から  $(X, d)$  は bounded geometry を持つことがわかる。作り方より、 $(X, d_2|_X)$  は cuc-connected でないことがわかる。[5] から、 $(X, d)$  が csc-property を持つことがわかる。

**Example 4.4.** cuc-connected を満たし、csc-property を持つが、bounded geometry を持たない  $\mathbb{R}_+$  に同相な距離空間  $(X, d)$  が存在する。よって、Lemma 3.8 から  $(X, d) \not\sim_c (\mathbb{R}_+, d_+)$  がわかる。

2 以上の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$x_{n,i,j} = (0, \dots, 0, \overset{j\text{-th}}{i}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

$$X_{n,i} = \{tx_{n,i,j} + (1-t)x_{n,i,j+1} \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1] \text{ and } j = 1, \dots, n-1\}$$

とすると、 $\text{diam}_d X_{n,i} = \sqrt{2}i$  を満たすことがすぐにわかる。また、同様にして

(\*) 任意の  $x, x' \in X_{n,i}$  に対して、 $X_{n,i}$  の中で  $x$  と  $x'$  を結ぶ弧  $P_{x,x'}$  があって、 $\text{diam}_{d_n} P_{x,x'} \leq \sqrt{2}d_n(x, x')$  を満たす。

が示せる。2 以上の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、距離空間  $X_n$  は  $\bigoplus_{i \leq n} X_{n,i}$  の  $x_{n,i,n}$  と  $x_{n,i+1,1}$  ( $i < n$ ) をくっつけて得られる空間とし、距離空間  $X$  は  $\bigoplus_{n \geq 2} X_n$  の  $x_{n,n,n}$  と  $x_{n+1,1,1}$  ( $n \geq 2$ ) をくっつけて得られる空間とする。 $X_n$  の距離  $\rho_n$  を以下のように決める。

$$\rho_n(x, y) = \begin{cases} d_n(x, y) & \text{if } x, y \in X_{n,i} \\ d_n(x, x_{n,i,n}) + \sum_{i < k < j} d_n(x_{n,k,1}, x_{n,k,n}) & \text{if } x \in X_{n,i}, y \in X_{n,j} \\ \quad + d_n(x_{n,j,1}, y) & \text{with } i < j. \end{cases}$$

$X$  の距離  $d$  を以下のように決める。

$$d(x, y) = \begin{cases} \rho_n(x, y) & \text{if } x, y \in X_n \\ \rho_m(x, x_{m,m,m}) + \sum_{m < k < n} \rho_k(x_{k,1,1}, x_{k,k,k}) & \text{if } x \in X_m, y \in X_n \\ \quad + \rho_n(x_{n,1,1}, y) & \text{with } m < n. \end{cases}$$

すぐに  $X$  は  $\mathbb{R}_+$  と同相であることがわかる。また、 $(X, d)$  は bounded geometry を持たないこともわかる。作り方と (\*) より、

(\*\*) 任意の 2 点  $x, x' \in X$  に対して、 $\text{diam}_d[x, x'] \leq \sqrt{2}d(x, x')$  を満たす。

がわかる。このことから、 $(X, d)$  は cuc-connected であることがわかる。

$(X, d)$  が csc-property を持つことを示す。  $U$  を  $(X, d)$  の unbounded  $r$ -chain connected 部分集合とする。すると、 $(U, d|_U)$  の中の  $r$ -chain  $\{x_n \in U : n \in \mathbb{N}\}$  があって、 $x_n < x_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を満たす。(\*\*) より、 $\text{diam}_d[x_n, x_{n+1}] \leq \sqrt{2}d(x_n, x_{n+1}) \leq \sqrt{2}r$  を満たす。 $R = \max\{\text{diam}_d[x_{1,1,1}, x_1], \sqrt{2}r\}$  とすると、上述より、 $X = B_d(\{x_n \in U : n \in \mathbb{N}\}, R) \subset B_d(U, R)$  を満たす。

## REFERENCES

- [1] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Perfectness of the Higson and Smirnov compactifications*, Colloq. Math. 107 (2007), 89-98.

- [2] Y. Akaike, N. Chinen and K. Tomoyasu, *Controlling the dimensions of the Higson corona by coarse uniform connectedness*, preprint.
- [3] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology Appl. 155 (2008), 1265–1296.
- [4] S. Buyalo and V. Schroeder, *Elements of asymptotic geometry*, EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007.
- [5] N.Chinen, *A characterization of a metric space which is coarse equivalence to the half real line*, preprint.
- [6] A. N. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension*, Topology Appl. 140 (2004), 203–225.
- [7] R. Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin, 1989.
- [8] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, vol. 2 London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [9] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology. Proc. 19 (1994), 129-148.
- [10] J. Keesling, *Subcontinua of the Higson corona*, Topology Appl. 80 (1997), no. 1-2, 155-160
- [11] S. Mardešić and J. Segal, *Shape theory. The inverse system approach*, North-Holland Mathematical Library, 26. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.
- [12] J. C. Mayer, L. K. Mohler, L. G. Oversteegen, and E. D. Tymchatyn, *Characterization of separable metric  $R$ -trees*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), no. 1, 257–264.
- [13] S.B. Nadler, Jr., *Continuum theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [14] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, 2003.
- [15] 砂田 利一, 現代幾何学の流れ, 日本評論社, 2007.
- [16] R. C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.
- [17] R. L. Wilder, *Topology of manifolds*, Reprint of 1963 edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, 32. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979.

HIROSHIMA INSTITUTE OF TECHNOLOGY 2-1-1 MIYAKE, SAEKI-KU, HIROSHIMA 731-5193, JAPAN  
*E-mail address:* naochin@cc.it-hiroshima.ac.jp