

# 特殊関数の問題 — パンルヴェ性をめぐって

岩崎 克則 [北大理]

## 概要

ガウスの超幾何関数に代表される一連の古典的な特殊関数は、ある種の二階線型微分方程式をみたす。また、楕円関数も古典特殊関数の一つであるが、こちらはある種の代数的微分方程式をみたす。現代的な立場からは、これらの対象の非線型化が興味深い課題となる。そのような考察において鍵となるのは、パンルヴェ性という性質である。この記事では、パンルヴェ性やそれに関連する話題をめぐって種々の問題提起を行う。それらは、パンルヴェ系に留まらず、代数的非線型微分方程式論一般において重要となる示唆を含んでいる。

## 1 はじめに

特殊関数とは、数学や物理学に役立つ特別な関数のことであるが、この記事では、複素領域における微分方程式の解として定義されるものについて考える。

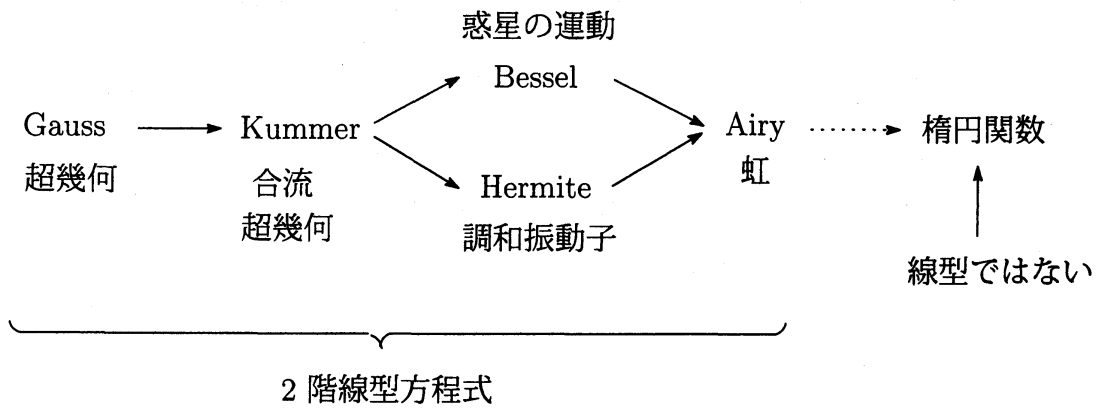


図 1: 古典特殊関数の世界

本題に入る前に、先ず、古典的な特殊関数の世界について見ておこう。19 世紀以来よく知られた**古典特殊関数**についてまとめると、図 1 のようになる。これらのうち、有名な数学者の名前を冠して呼ばれる 5 種類の特殊関数は、次のかたちの 2 階 線型 常微分方程式の解である。

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \quad ' = \frac{d}{dx}, \quad a(x), b(x), c(x) \in \mathbb{C}[x].$$

特にこれらの“親玉”である Gauss の超幾何方程式は、次の Fuchs 型方程式である。

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}y' - \alpha\beta y = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

図 1 における矢印  $* \rightarrow **$  は、方程式  $**$  が方程式  $*$  から合流操作と呼ばれる一種の極限操作によって得られることを意味する。一方、楕円関数のみならず微分方程式は 非線型 であって、

$$(y')^2 = 4y^3 - g_2y - g_3 \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C} \quad (1)$$

という形をしている。この方程式の一般解は  $y(x) = \wp(x+c)$  で与えられる。ただし  $\wp(x)$  は Weierstrass の  $\wp$  関数であり、 $c \in \mathbb{C}$  は積分定数である。

以上の微分方程式に共通の性質として、パンルヴェ性というものがある。パンルヴェ性とは何かについて説明するためには、微分方程式論の基本定理に遡る必要がある。

## 2 Cauchy の基本定理

常微分方程式の基本定理として二種類の Cauchy の定理がある。一つは線型方程式、もう一つは非線型方程式に関するものである。最初に前者について述べる。 $A(x)$  を領域  $D \subset \mathbb{C}$  上の  $n \times n$  行列値正則関数、 $y = y(x)$  を  $n$  次元ベクトル値関数とし、次の線型微分方程式を考える。

$$y' = A(x)y \quad (2)$$

**定理 1 (線形 ODE の基本定理)** 方程式 (2) の基点  $p$  における正則解芽全体を  $\mathcal{M}_p$  とする。

- (1) 解芽に対しその値を対応させる“芽値”写像  $\mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $y \mapsto y(p)$  は全単射となる。この全単射を通じて集合  $\mathcal{M}_p$  には線型空間という顕著な 幾何構造 が入る。
- (2) 任意の正則解芽  $y \in \mathcal{M}_p$  は、基点  $p$  を出る任意の路  $\gamma$  に沿って正則関数として大域的に解析接続できる。すなわち、解析接続が解芽によらず一斉に行われるという一種の 接続性 が存在する。これにより、任意の閉曲線  $\gamma \in \pi_1(D, p)$  に沿う モノドロミー写像  $\gamma_* : \mathcal{M}_p \circlearrowleft$  が well-defined となる。この事実は、解の大域解析において決定的に重要となる。

非線形方程式に対する基本定理は、定理 1 よりずっと弱い。 $f(x, y)$  を  $D \times \mathbb{C}^n$  上の  $n$  次元ベクトル値正則関数、 $(p, z) \in D \times \mathbb{C}^n$  とする。このとき、次の非線型初期値問題を考える。

$$y' = f(x, y), \quad y(p) = z. \quad (3)$$

**定理 2 (非線型 ODE の基本定理)** 初期値  $(p, z)$  に依存する  $p$  の近傍  $U(p, z) \subset D$  が存在して、初期値問題 (3) の解が  $U(p, z)$  上で一意的に存在する。

非線型方程式に対して一般的に云えるのはこれぐらいであって、[最大延長] 解の存在領域は解の取り方に大きく依存する。すなわち、解芽をまとめて考えると、接続性 が消失する。

## 3 非線形方程式の例

非線型方程式では、一般に、解の振る舞いが解ごとに激しく変わることを例で見よう。

**例 3 (動く分岐点)**  $k \in \mathbb{N}$  に対して一階非線形方程式  $y' = y^{1+k}$  を考える. この方程式は一般解  $y(x) = k^{-1/k}(c-x)^{-1/k}$  をもつ. ただし  $c \in \mathbb{C}$  は積分定数である. 原点  $x=0$  を基点にとると, この解は  $x=c$  [分岐点] までしか接続できない. 分岐点の位置は解に依存して変わる.

**例 4 (動く真性特異点)** 二階非線形方程式  $\{yy'' - (y')^2\}^2 + 4y(y')^3 = 0$  を考える. この方程式は一般解  $y(x) = c_1 \exp\left(-\frac{1}{x-c_2}\right)$  をもつ. ただし  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  は積分定数である. この解は  $x=c_2$  [真性特異点] までしか接続できない. 真性特異点の位置は解に依存して変わる.

**例 5 (動く自然境界: Chazy 方程式)** 次の三階非線形方程式を考える.

$$y''' = 2yy'' - 3(y')^2 \quad [\text{独立変数は } x = \tau \text{ とする}] \quad (4)$$

この方程式は特解  $z(\tau) = 3\frac{d}{d\tau} \log \eta(\tau)$  をもつ. ただし  $\eta(\tau)$  は Dedekind のエータ関数である.

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad (q = e^{2\pi i \tau}).$$

$\eta(\tau)$  従って  $z(\tau)$  は上半平面  $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im } \tau > 0\}$  上正則であり, 実軸  $\text{Im } \tau = 0$  を自然境界にもつ. また方程式 (4) は  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  対称性をもつ. すなわち  $y(\tau)$  が (4) の解ならば,

$$y^g(\tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^2} y\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) - \frac{c}{2(c\tau + d)}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

も (4) の解である. よって  $y(\tau) = z^g(\tau)$  が方程式 (4) の一般解となる. ここで  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  が  $z^g(\tau)$  の積分定数の役割を果たす.  $g$  の取り方によって, 解の自然境界の位置が変わる. 特に, 基点を一つ決めるとき, その点のいくらでも近くに自然境界をもつ解が存在する.

これらの実例は, 非線型方程式においては, 解の挙動が解ごとにばらばらであることを如実に示している. しかし, これらの実例には次の弱点がある. すなわち, これらに対しては, たまたま一般解を具体的に表示することが可能であり, それ故に解のばらばら度がよく分るという点である. ところが現実には, ほとんどの非線型方程式は具体的には解けない. 従って, 非線型方程式一般において, 解の接続性の欠如がどれくらいかを想像することすら難しい.

## 4 非線形 ODE の一般論

非線形常微分方程式論は, 古色蒼然と見えて, 実は非常に難しい. 現時点では完成から程遠い, 将来の分野である. 実のところ代数幾何より格段に難しい. 代数的常微分方程式系

$$f_i(x; y, y', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

を考える. ここで  $f_i(x; y, y', \dots, y^{(m)})$  は  $y, y', \dots, y^{(m)}$  について多項式,  $x \in D$  について正則とする. 因みに方程式 (5) において  $x$  と  $y', \dots, y^{(m)}$  がないのが代数幾何である. ただし, こ

ここでは代数幾何を「多項式 = 0 で定義される図形を研究する分野」と素朴に捉えておく。そうすると、代数的常微分方程式 (5) に対しても、これが定義する「図形」とは何か？ という素朴で基本的な問題意識が生じる。ここで、代数幾何の基本的な考え方として、

局所論〔環論〕 → 接続性 → 層・コホモロジー → 大域論 (6)

という一連の流れがあることを思い出そう。われわれの問題意識を標語化すると次のようになる。

『代数的 ODE に対する“微分代数幾何学”を構築せよ。これは、代数幾何における〔代数方程式〕 ↔ 〔根全体の作る図形〕 という図式を〔代数的微分方程式〕 ↔ 〔解全体の作る図形〕 という図式に拡張するものである』

これは、いわゆる「微分代数」のことを言っているのではない。既成の、あるいはその延長線上にある微分代数ではまったく不十分である。なお、この問題意識は、線型の場合は偏微分方程式も込めて  $D$ -加群の理論として十分実現されていると考えられる。

**問題 6 (\*\*\*)** 代数的常微分方程式系 (5) において、

- (1) 各点  $p \in D$  における“局所解”すなわち解芽全体  $\mathcal{M}_p$  とは何か？ 何であるべきか？ [正則解芽のみを考えるのは安直過ぎる.] また  $\mathcal{M}_p$  にどのように“空間構造”を入れるのか？
- (2) それら全体を連なり合わせて“大域挙動”を研究する方策を打ち立てよ。

上述のように、非線型方程式の解の振る舞いは、解ごとにてんでバラバラで接続性がないために、図式 (6) のような流れを描くことがとても難しい。問題 6 において、問 (1) と問 (2) は互いに関連しあっている。すなわち、問 (2) が well-posed になるためには、問 (1) で構成される空間  $\mathcal{M}_p$  が、解析接続に関して閉じていなければならない。従って  $\mathcal{M}_p$  として正則解芽のみを採るのは安直すぎる。いかなる意味でもっと一般の芽を採るかが問題である。〔図 2 参照〕

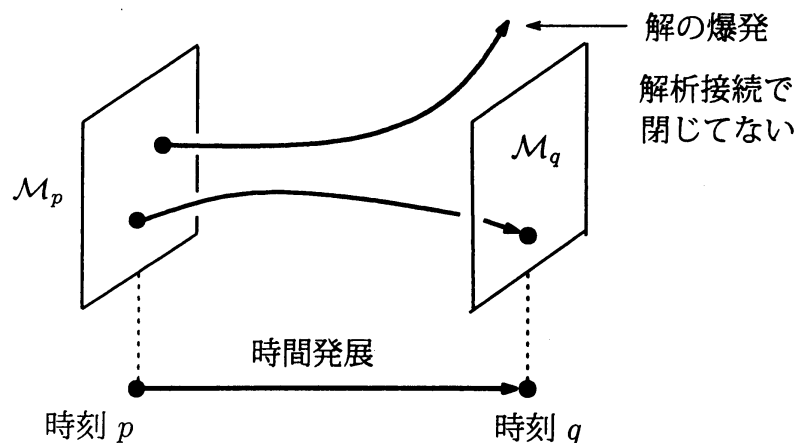


図 2: 解の爆発

問題 6 の問 (1) は、後述のパンルヴェ第 VI 方程式、およびその多変数化であるガルニエ系に対しては手がついている。それは安定放物接続のモジュライ理論に基づく代数幾何学的なものである〔第 6 節を参照〕。しかし、一般の方程式に対しては、未だ道遠しという現状にある。

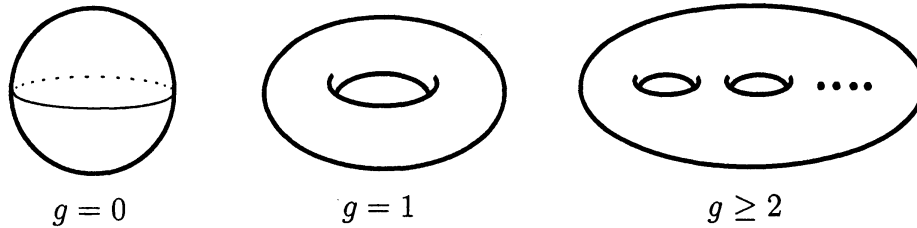


図 3: Fuchs-Poincaré の定理と代数曲線

## 5 パンルヴェ性

問題 6 を一般的に攻略することは、現在の数学には荷が重いと考えられるので、次のような良い性質を導入して、問題の射程をかなり制限する。

**定義 7** 方程式 (5) が領域  $D$  においてパンルヴェ性をもつとは、任意の基点  $p \in D$  における任意の有理型解芽  $y(x)$  は  $p$  を出発する  $D$  内の任意の路  $\gamma$  に沿って有理型関数として  $\gamma$  の端まで大域的に解析接続できるということである。

**例 8** 任意の線型方程式、二階線型方程式の射影化である Riccati 方程式、および楕円関数の方程式 (1) はパンルヴェ性をもつ。特に古典特殊関数の微分方程式はパンルヴェ性をもつ。

一階の微分方程式に対しては、次の結果が基本的である。

**定理 9 (Fuchs-Poincaré)** 単独一階方程式  $f(x; y, y') = 0$  ( $x \in D$ ) がパンルヴェ性をもつとすると、双有理同値を除いて次の三種類に帰着される。

- (0) Riccati 方程式  $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$  [ $g = 0$ ]
- (1) 楕円関数の方程式 (1) :  $(y')^2 = 4y^3 - g_2y - g_3$  [ $g = 1$ ]
- (2) 求積法で解くことができる方程式 [ $g \geq 2$ ]

上記の分類は代数曲線の種数に関係する。すなわち、一般の点  $p \in D$  における代数曲線  $C_p: f(p; y, z) = 0$  の種数  $g$  の値に応じて場合分けがなされている [図 3 参照]。上記の分類に現れる方程式は、確かにパンルヴェ性をもつことが示される。

さて、定理 9 を二階の方程式に拡張する試みの中で、次の結果が導出された。

**定理 10 (Painlevé-Gambier)** 二階正規型の方程式  $y'' = f(x; y, y')$  がパンルヴェ性をもつならば、それは次の 4 種類の場合に帰着される。ただし  $f(x, y, y') \in \mathcal{O}_x(D)(y, y')$  とする。

- (1) 線型方程式
- (2) 楕円関数  $y'' = 6y^2 - \frac{1}{2}g_2$  [ $g_2 \in \mathbb{C}$  は定数。これは方程式 (1) を一回微分して得られる]
- (3) 求積法で解くことができる方程式
- (4) ある 6 種類の非線型微分方程式 [パンルヴェ方程式と呼ばれるもの]

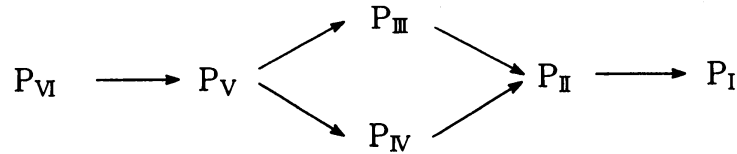


図 4: パンルヴェ方程式とそれらの合流図式

パンルヴェ方程式は 6 種類あり、そのうちの“親玉”にあたるのが第 VI 方程式である。そこから、順次、合流操作と呼ばれる極限操作により、図 4 の要領で他型のパンルヴェ方程式が導かれていく。図 4 と図 1 が平行していることに注意しよう。それぞれの型のパンルヴェ方程式は、これらの図式において対応する古典特殊関数を特殊解として含んでいる。またその他の種々の性質にも鑑みて、それらはそれぞれの古典特殊関数の非線型化であると考えられる。

例 11 6 種類のパンルヴェ方程式をすべて書き下すだけの場所はないので、二種類だけ書いておく。P\_I は簡単に書いて  $y'' = 6y^2 + x$  である。楕円関数の方程式  $y'' = 6y^2 - \frac{1}{2}g_2$  とよく似ているが、非自励化されている点が違う。この違いは大きく、パンルヴェ第 I 関数は楕円関数よりはるかに超越的な特殊関数を定義している。P\_VI を書き下すと、若干複雑であるが、

$$y'' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) (y')^2 - \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left\{ \alpha + \beta \frac{x}{y^2} + \gamma \frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right\}.$$

ただし  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  はパラメータである。パンルヴェ方程式は非自励ハミルトン系として表せる。

Painlevé と Gambier が定理 10 を導いた方法は、いわゆる  $\alpha$ -method と呼ばれる方法であるが、非現代的であり計算は晦渋を極める。そこで次の問題をおく。

**問題 12 (\*)** 定理 10 を現代的な立場から見直し、見通しのよい証明を与えよ。

もちろん、より一般に次の問題を考えることができる。

**問題 13 (導出 \*\*\*)** 高階あるいは多変数のパンルヴェ性をもつ方程式を導け。

この問題は「これこれのクラスの微分方程式がパンルヴェ性をもつならば、しかじかの形ではなければならない」という形に方程式の候補を絞り込むことである〔必要条件〕。この方向では既に、パンルヴェ性をもつ三階方程式の導出に関する議論があるが、非現代的な手法を踏襲しており、満足のいくものではない。何か根本的に新しいアイデアが望まれる。

さて、方程式の導出〔必要性〕と、導出した方程式が確かにパンルヴェ性をもつことの証明〔十分性〕とは別のことである。関係する数学も大分異なる。パンルヴェ方程式がパンルヴェ性をもつことの“証明”が、従来からいろいろ行われてきた。しかし、それらの中には数学的に問題のあるものが少なからず見受けられる。また、正しいと思われるものも難解であり、事の本質がなかなか見えない証明になっている。これは、パンルヴェ性という現象が根本的には未だ理解できていないことの証しであろう。そこで、次は修士論文の立派な課題になる。

**問題 14 (十分性 \*)** 従来のパンルヴェ方程式がパンルヴェ性をもつことの“証明”を検討し直し、問題があるものについては問題点を指摘し、正しいものについては証明の本質を明快に決りだすような総合報告を作成せよ。

パンルヴェ方程式は、種々の見地から高階版や多変数版など、さまざまな“一般化”が行われており、現在ではパンルヴェ系と呼ぶべき一つの世界を形成している。しかし、これらはパンルヴェ性の成立を要求することによって得られた一般化ではない。従って、実のところ、これらの“一般化”が本当にパンルヴェ性をもっているのか否かは明らかではない。そこで、

**問題 15 (十分性 \*\*\*)** パンルヴェ方程式の種々の“一般化”に対して、それらのパンルヴェ性を厳密に証明せよ。

この問題は、一般的には三つ星 (\*\*\*) であろうが、考察の対象によっては二つ星 (\*\*) にもなりうると思われる。この問題の意味については、第 6 節と第 7 節で改めて論じる。〔後述の問題 18 や注意 26 の辺りを参照のこと。〕

## 6 パンルヴェ系の諸相

第 5 節の最後で述べたように、現在では一般化された種々のパンルヴェ型方程式が考えられており、パンルヴェ系の世界を形成している。この節ではその諸相について触れよう。もちろん、短いスペースで論じられる内容ではないので、非常に簡単な叙述で済ませることにする。

以後の便宜のために、パンルヴェ系のかかなり大雑把な見取り図を、図 5 として与えておく。パンルヴェ系の研究は大きく分けて、**可積分系理論**の視点からの研究と**定性理論**的な研究に分けられる。前者は、例えば次のような内容からなる。〔図 5 の破線から上がこれに相当する。〕

- ・アフィン・ワイル群対称性と Bäcklund 変換
- ・ソリトン方程式やアインシュタイン方程式からの相似簡約
- ・特殊解：超幾何関数解や代数解
- ・ラックス対や双線型形式
- ・モノドロミー保存変形の可積分系的側面

これらは、具体的計算を主体とした、比較的形式的な数学から成っている〔そこがこの立場の良い点でもある〕。一方、定性的研究の方は、必然的に、より根源的で深い数学に立ち入ることが必要になる。例えば、パンルヴェ性の証明〔問題 15〕などは定性的研究の一つである。

また、第 4 節の問題 6 をパンルヴェ系に対して考えることもこの範疇に入る。パンルヴェ系においては、問題 6 の集合  $M_p$  は点  $p \in D$  における 有理型解芽の全体 として定式化される。そして  $M_p$  に自然な代数多様体の構造を入れることが課題となる。パンルヴェ第 VI 方程式およびその多変数化であるガルニエ系に対しては、確定特異点型安定放物接続のモデュライ空間 として  $M_p$  を実現することにより、この問題に一つの解答が与えられた [8, 9]。そこで、

**問題 16 (\*\*)** 合流型 パンルヴェ方程式の有理型解芽の空間を、不確定特異点型安定放物接続 のモデュライ空間として実現せよ。

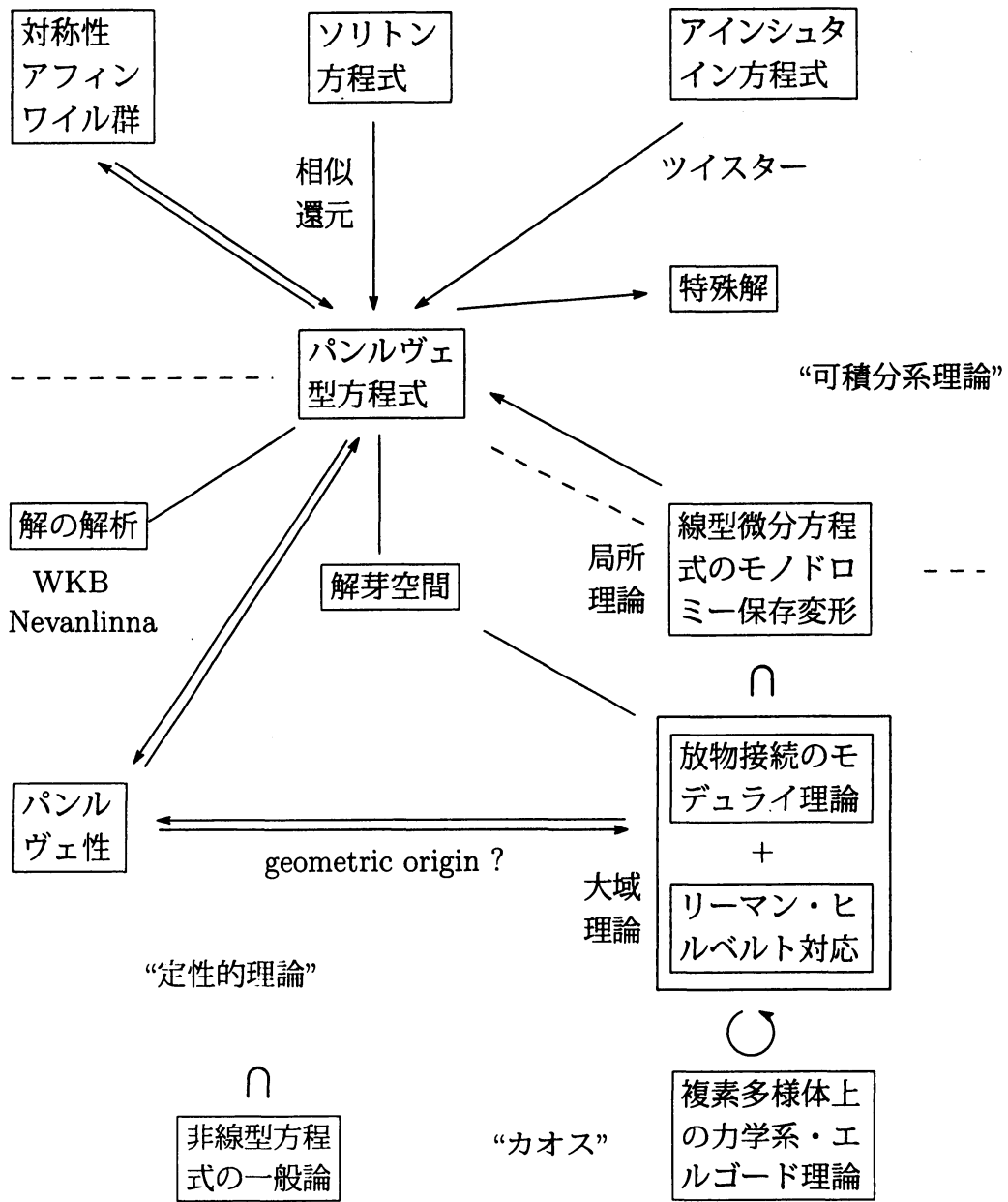


図 5: パンルヴェ系の諸相

破線より上は“可積分系理論”的な側面を，下は“定性理論”的な側面を表す



この問題へのアプローチは、稲場道明氏や齋藤政彦氏などによって進められている。

モデュライ理論の展開とともに、パンルヴェ系の定性的研究において最も重要な道具の一つとなるのが、リーマン・ヒルベルト (RH) 対応である。従来のパンルヴェ系研究では、モノドロミー保存変形の理論が使われてきたが、この手法は局所論的に過ぎる。大域理論も込めたパンルヴェ系の完全理解のためには、RH 対応のモデュライ理論的な確立が肝要である。これは、安定放物接続のモデュライ空間から指標多様体への固有全射で解析的特異点解消を与えるものとして定式化されるべきである。その確立は、パンルヴェ第 VI 方程式やガルニエ系に対しては論文 [8, 9] において行われた。そこで、問題 16 に対応するものとして次を提示する。

**問題 17 (\*\*)** 合流型パンルヴェ方程式に対するリーマン・ヒルベルト対応を確立せよ。

この場合の指標多様体は、不確定特異点型放物接続のモノドロミー表現とストークス現象のモデュライ空間である。またこの場合の RH 対応は、不確定特異点とストークス現象の関係を論じた Birkhoff の名前も入れて、リーマン・ヒルベルト・バーコフ (RHB) 対応と呼ばれる。

一たび RH 対応や RHB 対応が確立すると、そこからいろいろな問題が派生してくる。

**問題 18 (\*\*\*)** [この問題は、考える対象によっては (\*\*\*) にもなる。]

- (1) RH 対応を利用して、パンルヴェ系のパンルヴェ性を証明せよ。
- (2) パンルヴェ系の対称性を RH 対応による被覆変換として統一的に特徴づけよ。
- (3) パンルヴェ系の特殊解の理論を RH 対応による特異点解消の理論として統一的に展開せよ。

問 (1) については、既にパンルヴェ第 VI 方程式やガルニエ系に対して実行されている [8, 9]。この方法は代数幾何の大道具を使うが、厳密であり、かつパンルヴェ性の成立理由が概念的に明白になるという長所がある。一方、古典的なパンルヴェ方程式に対する厳密な証明である [19, 23] も優れた仕事であるが、微分方程式の具体形に依拠する不等式解析であるために、高階や多変数のパンルヴェ系に一般化するのは難しい。それに比べて、RH 対応の方法は、将来的に広大な一般化に耐えうる普遍的な方法であると思われるので、その発展が望まれる。

問 (2), (3) の主題である対称性や特殊解は、図 5 では“可積分系理論”の範疇に分類されているが、これは従来の取り扱いに基づく便宜的なものにすぎない。本来は、これらの主題も RH 対応という超越写像の定性的研究を通して、より深い理解と一般化に至ることができると考えられる。パンルヴェ第 VI の場合は、問 (1) は [7] で、問 (2) は [8, 11, 12, 15] など論じられている。これらの研究をより一般のパンルヴェ系に拡張することが問題 18 の目標である。

パンルヴェ性をもつ方程式に対しては、非線型モノドロミーの概念が well-defined となる。すなわち、任意の閉路  $\gamma \in \pi_1(D, p)$  に沿うモノドロミー写像  $\gamma_*$  が定義される。

$$\gamma_* : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_p, \quad Q \mapsto \gamma_* Q.$$

ただし  $\gamma_* Q$  は有理型解芽  $Q \in \mathcal{M}_p$  の  $\gamma$  に沿う解析接続の結果である。このとき、モノドロミー写像の反復合成の複素力学系が面白い研究対象になる [図 6 参照]。

パンルヴェ VI 型方程式に対しては、先述のモデュライ理論 [8, 9] と、代数曲面上の双有理写像のエルゴード理論 [1, 3, 4, 5] および周期点の一般論 [14] とを、リーマン・ヒルベルト対応

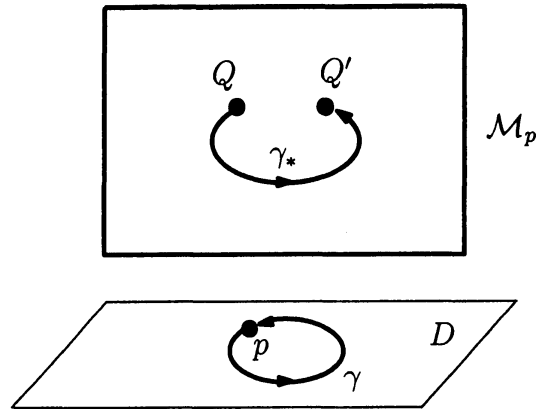


図 6: モノドロミー

を介して結びつけることによって、モノドロミー写像の**カオス性**が論じられた [10, 12, 13, 15]. そのでの主要結果は、混合的で双曲的な最大エントロピー不変確率測度の構成, エントロピーの計算アルゴリズムの確立, 孤立周期点の個数の周期に関する指数的増大性などであった. ここでは, 研究対象を二変数化して, 次の問題を提示する.

**問題 19 (\*\*)** パンルヴェ第 VI 方程式に対する研究を拡張するかたちで, 二変数ガルニエ系に対して, モノドロミー写像  $\gamma_* : M_p \circlearrowleft$  の力学系理論・エルゴード理論を展開せよ.

この問題は  $n$  変数のガルニエ系, あるいはもっと一般のパンルヴェ系に対しても考えることができる (\*\*\*) . しかし, そのような一般化が可能になるのはずっと先のことになると思われるので, 問題 19 の趣旨はとりあえず二変数で考えてみようということである.

## 7 天体力学からの示唆

天体力学・多体問題は, 非線型微分方程式の解の爆発問題やパンルヴェ性に重要な示唆をもつと思われるので, 少し論じることにする.  **$n$  体問題**とは, 万有引力の法則に従う  $n$  個の質点系の運動を研究することである. 第  $i$  質点の質量を  $m_i$ , 時刻  $t$  における位置ベクトルを  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ , それらをまとめて  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$  とおくと, 運動方程式は

$$m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

ただし,  $U = U(\mathbf{r})$  は  $n$  質点系のポテンシャル・エネルギーであって, 次式で与えられる.

$$U = -\sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

ある有限の時刻  $T$  が存在して, 方程式 (7) のある解軌道  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  が  $t < T$  の範囲では存在するが  $t = T$  を越えては延長できないとき,  $t = T$  はこの解の特異点であるという. 特異点において  $n$  体のうちの少なくとも二体が衝突するとき, その特異点を**衝突特異点**と呼び, そうでないとき**非衝突特異点**と呼ぶ. 次の結果は古典的である.

**定理 20 (Painlevé)** 三体問題においては、すべての特異点は衝突特異点である。

Painlevé はこの結果を得たあと、四体問題以上については次の予想を提示した。

**問題 21 (パンルヴェ予想 \*\*\*)** 四体問題以上では、非衝突特異点に至る軌道が存在するだろう。

五体問題については、問題提示から約 90 年後に、非常に巧妙な方法で非衝突特異点解を構成することにより次が示された [24]。しかし、この問題の一般的な理解からは未だ程遠い。

**定理 22 (Xia)** 五体問題においては、確かに非衝突特異点に至る軌道が存在する。

非衝突特異点が生じる直前には、必然的に二体以上の天体がいくらかでも接近するという事態が起こるので、衝突解およびその無限小近傍の研究は重要である。そのような研究に資するために McGehee [16] 等により**衝突多様体** (collision manifold) の方法が開発されてきた。これは、衝突特異点の近傍で相空間をブローアップし、衝突特異点に至る軌道をブローアップの例外集合上に誘導して解析することにより、その近傍における軌道の挙動を詳しく分析する方法である。

同じ Painlevé という人物に起源をもち、また解の延長可能性という観点からは同種の主題と考えられるのに、パンルヴェ予想をめぐる天体力学の研究とパンルヴェ方程式のパンルヴェ性の研究は、不思議なことにこれまで没交渉であった。そこで、次の問題を提示する。

**問題 23 (\*\*)** 衝突多様体の方法を用いて、パンルヴェ方程式のパンルヴェ性を証明せよ。

さて、天体力学やパンルヴェ方程式のみならず、更には常微分と偏微分とによらず、もっと一般的に、次は微分方程式論における根本的な問題の一つである。

**問題 24 (\*\*\*)** 初期値全体の中で、どれくらいの割合の初期値に対して解が時間無限大まで存在し、またどれくらいの割合の初期値に対して解が特異点〔爆発〕を生じるのか？

例えば、有名な Navier-Stokes 方程式のミレニアム問題もこの範疇に属する。しかし、この種の問題が少しでもまともに論じられてきたのは、天体力学とパンルヴェ型方程式のごく一部に限られる。一般の非線型方程式に対しては、時間大域解の存在を保証するために、“小さな初期値” という人工的で安直な仮定を置くのが普通である。問題 24 の本質的理解は、未来の数学に属する課題であろう。一方、天体力学の多体問題に対しては、次が知られている [21, 22]。

**定理 25 (Saari)** 一般の  $n$  体問題において、衝突特異点に至る初期値の集合は初期値全体の中でルベーグ測度 0 である [Littlewood 予想の解決]。四体問題においては、非衝突特異点に至る初期値の集合も測度 0 である [五体以上については何か知られているのだろうか?]

**注意 26** 定理 25 から得られる教訓は、問題 15 において、パンルヴェ型方程式のパンルヴェ性を証明する際に要求される精密性である。よく、パンルヴェ性の証明が generic な解に対してのみ行われていたり、そもそも generic という用語の数学的意味が明らかにされていないといったことが見受けられるが、これでは駄目である。四体問題の場合でも、測度 0 を除くすべての解に対して無制限の延長可能性が示されるのであるから、パンルヴェ方程式の場合は、文字どおりすべての解に対して、この性質が示されなければならない。四体問題とパンルヴェ方程式は、無意識的・直観的には“明らかに”違う。その違いが本当に明らかになる程に、パンルヴェ方程式のパンルヴェ性の証明は精密でなければならない。そこに問題 15 の難しさがある。

## 8 おわりに

この記事は、主催者にいただいた「特殊関数の問題」という標題とはそぐわない内容になったかもしれない。特殊関数というと、何かしらの面白い関数があり、それが面白い関係式や漸近式を満たしたり、他の面白い関数と関係していたり、また数学や物理のさまざまなところで利用されたりといったイメージがある。そういうところで問題が出せればよかったのかもしれないが、実は、著者自身はそういったことにはあまり関心がない。

そこで、冒頭では古典特殊関数のことから始めて話のまくらとしたが、その後は風の向くままに自由に書かせていただいた。むしろ、非線型代数的微分方程式の一般論、それに伴う代数幾何や複素幾何、力学系・エルゴード理論といったところに関心がある。しかし、それでは話が大きくなりすぎるので、この記事ではパンルヴェ型の方程式を対象に据え、さらにパンルヴェ性という定性的性質に焦点をあてて考察を行った。パンルヴェ性は、パンルヴェ系を規定するもっとも主要な要件の一つであるにもかかわらず、その難しさの故なのか、まだまだ本格的に論じられることが少ないと思われる。これから先々の研究が望まれる。

## 参考文献

- [1] E. Bedford and J. Diller, *Energy and invariant measures for birational surface maps*, Duke Math. J. **128** (2005), no. 2, 331–368.
- [2] F. ディアク, P. ホームズ 著, 吉田春夫 訳, 天体力学のパイオニアたち, 上下, シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2004.
- [3] J. Diller and C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 6, 1135–1169.
- [4] T.-C. Dinh and N. Sibony, *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1637–1644.
- [5] R. Dujardin, *Laminar currents and birational dynamics*, Duke Math. J. **131** (2006), no. 2, 219–247.
- [6] V.I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura, *Painlevé differential equations in the complex plane*, de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
- [7] M. Inaba, K. Iwasaki and M.-H. Saito, *Bäcklund transformations of the sixth Painlevé equation in terms of Riemann-Hilbert correspondence*, Internat. Math. Res. Notices **2004:1** (2004), 1–30.
- [8] M. Inaba, K. Iwasaki and M.-H. Saito, *Dynamics of the sixth Painlevé equation*, Théorie asymptotique et équations de Painlevé, Séminaires et Congrès **14** (2006), 103–167.

- [9] M. Inaba, K. Iwasaki and M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. Part I*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), no. 4, 987–1089; *Part II*, Adv. Stud. Pure Math. **45** (2006), 387–432.
- [10] K. Iwasaki, *An area-preserving action of the modular group on cubic surfaces and the Painlevé VI equation*, Comm. Math. Phys. **242** (2003), no. 1-2, 185–219.
- [11] K. Iwasaki, *Finite branch solutions to Painlevé VI around a fixed singular point*, Adv. Math. **217** (2008), no. 5, 1889–1934.
- [12] K. Iwasaki, *Monodromy of Painlevé VI equation around classical special solutions*, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 数理解析研究所講究録 **1662** (2009), 136 – 147.
- [13] K. Iwasaki and T. Uehara, *An ergodic study of Painlevé VI*, Math. Ann. **338** (2007), no. 2, 295–345.
- [14] K. Iwasaki and T. Uehara, *Periodic points for area-preserving birational maps of surfaces*, Math. Z. **266** (2010), no. 2, 289–318.
- [15] K. Iwasaki and T. Uehara, *Singular cubic surfaces and the dynamics of Painlevé VI*, e-Print arXiv: 0909.5269 [math.AG] 29 Sep 2009, 34 pages.
- [16] R. McGehee, *Triple collisions in the collinear three-body problem*, Invent. Math. **29** (1974), 191–227.
- [17] 野海正俊, パンルヴェ方程式 – 対称性からの入門 –, 朝倉書店, 東京, 2000.
- [18] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 東京, 2009.
- [19] K. Okamoto and K. Takano, *The proof of the Painlevé property by Masuo Hukuhara*, Funkcial. Ekvac. **44** (2001), 201–217.
- [20] P. Painlevé, *Leçon sur la théorie analytique des équations différentielles*, Herman, Paris, 1897.
- [21] D.G. Saari, *Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 267–271; *ibid.* **181** (1973), 351–368.
- [22] D.G. Saari, *A global existence theorem for the four-body problem of Newtonian mechanics*, J. Diff. Eqs. **26** (1977), 80–111.
- [23] S. Shimomura, *Proofs of the Painlevé property for all Painlevé equations*, Japan. J. Math. (N.S.) **29** (2003), no. 2, 159–180.
- [24] Z. Xia, *The existence of noncollision singularities in the N-body problem*, Ann. Math. **135** (1992), 411–468.