数理解析研究所講究録
第1731巻 2011年 151-161

3次元CALABI-YAU多様体のモジュライに関する問題

吉川謙一（京都大学）

以下, 3次元Calabi-Yau多様体とは, 3次元連結コンパクトKähler多様体Mで, 条件

$$K_M \cong \mathcal{O}_M, \qquad h^q(\mathcal{O}_M) = 0 \quad (q = 1, 2)$$

を充たすものを意味する. これらの条件から, Mは射影的である. この文章では, 3次元Calabi-Yau多様体のBCOV不変量とモジュライに関する問題を幾つか解説する. 正確さに欠ける記述が見られたり, 既に知られている結果を問題として挙げたかも知れない. それらを直す事も問題として考えてもらえれば, 筆者としてはありがたい.

1. BCOV不変量

まず最初に, BCOV（Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa）不変量の定義を思い出す.

定義 1 ([2], [5]). Xを3次元Calabi-Yau多様体とし, γをX上のRicci平坦Kähler形式とする. X上の(p,q)-形式に作用するラプラシアンを$\square_{p,q}$で表し, $\zeta_{p,q}(s)$をそのスペクトル・ゼータ関数とする. このとき, 以下の実数をXのBCOV不変量という

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X) := \frac{\mathrm{Vol}(X,\gamma)^{\frac{\chi(X)}{12}-3}}{\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma])} \exp\left[-\sum_{p,q\geq 0}(-1)^{p+q}pq\,\zeta'_{p,q}(0)\right].$$

ここで, $\chi(X)$はXの位相的Euler数であり, $\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma])$は実トーラス$H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})$の$\gamma$から誘導される$L^2$計量に関する体積である.

事実 1 ([5]). $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$は*Ricci*平坦*Kähler*計量に依らず, Xの複素構造のみから定まるXの不変量である.

この事実から, τ_{BCOV}を3次元Calabi-Yau多様体のモジュライ空間上の関数と見なす事ができる.

2. ミラー対称性

BCOV予想は楕円曲線の数え上げと解析的捩率に関するミラー対称性予想である. BCOVの予想を解説するために, まず古典的なミラー対称性を思い出す [3], [4], [7], [17].

2.1. A モデルにおける 3 重線型形式. X を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とし, X の Kähler 錐を $\mathcal{K}_X$ で表す. $H^2(X,\mathbf{Z})$ の基底 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{h^{1,1}(X)}\}$ を固定し, その基底により定まる $H^2(X,\mathbf{C})$ の座標系を $t=(t_1,\ldots,t_{h^{1,1}})$ とする: $t=(t_i)=\sum_i t_i\mathbf{e}_i$ である. 複素 Kähler 錐 $H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X$ の接空間 $\Theta_{H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X}$ 上の 3 重線型形式を以下の式で定める:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t_\alpha},\frac{\partial}{\partial t_\beta},\frac{\partial}{\partial t_\gamma}\right\rangle_A (t) := (\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma)+\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} \frac{n_0(d)\,e^{2\pi i\langle d,t\rangle}}{1-e^{2\pi i\langle d,t\rangle}}\langle d,\mathbf{e}_\alpha\rangle\langle d,\mathbf{e}_\beta\rangle\langle d,\mathbf{e}_\gamma\rangle.$$

ただし, $(\cdot,\cdot,\cdot)$ は $H^2(X,\mathbf{Q})$ 上の 3 重交叉線型形式であり, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $H_2(X,\mathbf{C})$ と $H^2(X,\mathbf{C})$ の間の Poincaré 双対ペアリング, $n_0(d)$ は X の有理的インスタントン数 [19] である.

2.2. 極大冪単族と標準座標. $\pi\colon \mathcal{Y}^o\to S^o$ を 3 次元 Calabi-Yau 多様体のスムーズ族とする. ただし, $S^o\cong(\Delta^*)^n$ であり, この族の一般ファイバーを Y_s, $s\in S^o$ とする時, $n=h^{1,2}(Y_s)$ を仮定する. さらに, 族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o\to S^o$ が Morrison [9] の意味で極大冪単族 (maximally unipotent) または大複素構造極限 (large complex structure limit) であると仮定する. この時, $H_3(Y_s,\mathbf{Z})$ の整シンプレクティック基底 $\{A_0,\ldots,A_n,B_0,\ldots,B_n\}$ で, 以下の性質を充たすものが存在する [7]:

- 族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o\to S^o$ から定まる $H_3(Y_s,\mathbf{Q})$ のモノドロミー飾を $S_0\subset\cdots\subset S_6$ とする時, $S_{2k}=S_{2k+1}$ であり,
$$B_0\in S_0,\quad B_1,\ldots,B_n\in S_2,\quad A_1,\ldots,A_n\in S_4,\quad A_0\in S_6=H_3(Y_s,\mathbf{Q}).$$
- B_0 は全ての $\pi_1(S^o)$ の元の作用に対して不変なホモロジー類.

族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o\to S^o$ の相対正則 3-形式を $\{\Xi_s\}_{s\in S^o}$ とする時, S^o 上の標準座標を以下の写像として定義する

$$M\colon S^o\ni s\to\left(\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\int_{B_1}\Xi_s}{\int_{B_0}\Xi_s}\right),\ldots,\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\int_{B_n}\Xi_s}{\int_{B_0}\Xi_s}\right)\right)\in(\Delta^*)^n.$$

M が S^o 上の座標系を与える事が知られており, S^o 上の標準座標と呼ばれる. 以下, q_i を次式で定める

$$q_i:=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\int_{B_i}\Xi_s}{\int_{B_0}\Xi_s}\right)\qquad(i=1,\ldots,n).$$

2.3. 有理曲線の数え上げに関するミラー対称性予想. X と S^o は上と同様とする. 3 次元 Calabi-Yau 多様体の族 $\pi\colon \mathcal{X}^\vee\to S^o$ が, 以下の性質を充たすと仮定する:

(i) $h^{1,1}(X)=h^{1,2}(X_s^\vee)$, $h^{1,2}(X)=h^{1,1}(X_s^\vee)$. ただし, $X_s^\vee=\pi^{-1}(s)$.
(ii) $\pi\colon \mathcal{X}^\vee\to S^o$ は極大冪単族.

S^o 上の正則接束 Θ_{S^o} 上の 3 重線型形式を以下の式で定める:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial q_\alpha},\frac{\partial}{\partial q_\beta},\frac{\partial}{\partial q_\gamma}\right\rangle_B (s) := \frac{\int_{X_s^\vee}\Xi_s\wedge(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\alpha}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\beta}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\gamma}}\Xi_s)}{(\int_{B_0}\Xi_s)^2}.$$

ここで, ∇ は Gauss-Manin 接続であり, Ξ_s は族 $\pi\colon \mathcal{X}^\vee\to S^o$ の至る所消えない相対正則 3-形式である. 右辺は Ξ_s の選び方に依らない.

定義 2. 族$\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$が$X$のミラー族であるとは, 上記条件 (i), (ii) が充たされ, さらに標準座標による$H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})+i\mathcal{K}_X$と$S^o$の同一視（ミラー写像）

$$(e^{2\pi i t_1},\dots,e^{2\pi i t_{h^{1,1}}})=(q_1,\dots,q_{h^{1,1}}).$$

の下で, 二つの3重線型形式$\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_A$と$\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_B$が一致する事を意味する:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t_\alpha},\frac{\partial}{\partial t_\beta},\frac{\partial}{\partial t_\gamma}\right\rangle_A(t)=\left\langle 2\pi i q_\alpha\frac{\partial}{\partial q_\alpha},2\pi i q_\beta\frac{\partial}{\partial q_\beta},2\pi i q_\gamma\frac{\partial}{\partial q_\gamma}\right\rangle_B(s).$$

予想 1 (ミラー対称性予想***). 3次元 Calabi-Yau 多様体Xに対して, そのミラー族が存在する.

問題 2 (***). 与えられた Calabi-Yau 多様体に対して, ミラー族の構成法を与えよ. この問題へのアプローチとして, Strominger-Yau-Zaslow 予想 [12] が知られている.

3. BCOV 予想 — 楕円曲線の数え上げに関するミラー対称性予想

3.1. 種数1振幅関数. 3次元 Calabi-Yau 多様体Xに対して, Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa は以下の形式的無限積を複素 Kähler 錐$H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})+i\mathcal{K}_X$上に導入した [1], [2]:

$$F_1^{\mathrm{top}}(q):=q^{c_2^\vee/24}\prod_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}}(1-q^d)^{n_0(d)/12}\prod_{k>0}(1-q^{kd})^{n_1(d)},\qquad q^d:=e^{2\pi i\langle d,t\rangle}.$$

ここで, $t\in H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X$, $n_g(d)$は種数gインスタントン数であり, $c_2^\vee\in H_2(X,\mathbf{Z})$は$X$の第2 Chern 類$c_2(X)\in H^4(X,\mathbf{Z})$の Poincaré 双対である.

警告 1. 論文や本によっては, $n_g(d)$を *Gromov-Witten* 不変量と書いているものもある. ここでは, *Zinger* の論文 [19] に従い, 上の式に現れた$n_g(d)$をインスタントン数と呼び, *Gromov-Witten* 不変量を$N_g(d)$で表す. *Zinger* の論文 [19] の *Appendix B* にある関係式を筆者が正しく理解しているとすれば, インスタントン数と *Gromov-Witten* 不変量の関係は一般に以下の式で与えられる:

$$\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}}N_0(d)q^d(\log q^d)^3=\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}}n_0(d)\frac{q^d}{1-q^d}(\log q^d)^3,$$

$$\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}}N_1(d)q^d=\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}}n_1(d)\sum_{k>0}\log(1-q^{kd})+\frac{1}{12}\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}}n_0(d)\log(1-q^d).$$

(これらの関係式は *Zinger* の論文にある公式 [19, (B.2), (B.11)] から一般の場合を類推したものであり, 間違っているかもしれません. 使用する場合には細心の注意が必要です.) インスタントン数の数学的な定義があるのかどうか, 筆者は知らない.

3.2. **BCOV 予想.** 標準座標による同一視

$$H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})+i\mathcal{K}_X\cong S^o$$

により, $F_1^{\mathrm{top}}(q)$ を S^o 上の形式的関数と見なす.

予想 3 (Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa 予想***). X を 3 次元 Calabi-Yau 多様体, $\pi\colon \mathcal{X}^\vee\to S^o$ をそのミラー族とすれば, S^o 上の関数の関数として以下の等式が（定数倍を除いて）成り立つ:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_s^\vee)=|F_1^{\mathrm{top}}(q)|^4\cdot\left\|\left(\frac{\Xi_s}{\int_{B_0}\Xi_s}\right)^{3+h_\vee^{1,2}+\frac{\chi_\vee}{12}}\otimes\left(q_1\frac{\partial}{\partial q_1}\wedge\cdots\wedge q_{h_\vee^{1,2}}\frac{\partial}{\partial q_{h_\vee^{1,2}}}\right)\right\|^2.$$

ただし, $h_\vee^{1,2}$, $\chi_\vee$ はそれぞれ $\pi\colon\mathcal{X}^\vee\to S^o$ の一般ファイバーの $(1,2)$ Hodge 数と位相的 Euler 数であり, Ξ_s と $\frac{\partial}{\partial q_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial q_{h_\vee^{1,2}}}$ の長さはそれぞれ L^2-計量と Weil-Petersson 計量で計測される. 特に, $F_1^{\mathrm{top}}(q)$ は原点の近傍で絶対収束する.

筆者の知る限り, この予想が確認された例は 5 次超曲面（A モデル）[19] とミラー 5 次超曲面（B モデル）[5] の組だけである. Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa の目的は, 高種数の Gromov-Witten 不変量の生成関数の充たす微分方程式系（正則アノマリー方程式）[1], [2] を与える事であった.

問題 4 (***). BCOV 正則アノマリー方程式を証明せよ.

ミラー対称性に従えば, 各種数 g の Gromov-Witten 不変量の生成関数に対応した 3 次元 Calabi-Yau 多様体の（複素構造のみに依存する）不変量が存在するはずである. 例えば, BCOV 不変量は種数 1-Gromov-Witten 不変量に対応した不変量である.

問題 5 (***). 種数 g-Gromov-Witten 不変量の生成関数に対応した 3 次元 Calabi-Yau 多様体の不変量を構成せよ.

以上は BCOV 予想に関連する一般的な問題であるが, 例を検証するだけでも現状では充分難しい. 古典的なミラー対称性では, 或る程度の範囲の Calabi-Yau 多様体に対して（さまざまなレベルで）ミラー対称性予想が検証されているようであるが, BCOV 予想については予想が成立する 3 次元 Calabi-Yau 多様体の適当なクラスは知られていない.

問題 6 (**). BCOV 予想の成り立つ 3 次元 Calabi-Yau 多様体とそのミラー族の例を与えよ.

4. 保型形式と BCOV 予想

$\pi\colon(\mathcal{Y},L)\to S$ を偏極 3 次元 Calabi-Yau 多様体のスムーズ族とし, その小平-Spencer 写像は S の一般の点で同型であると仮定する. Ω を有界対称領域の管状領域表示とし, $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(\Omega)$ を算術群とする. 以下の条件 (C1), (C2), (C3) を考える:

(C1) S は $\Gamma\backslash\Omega$ の Zariski 開集合に同型.

(C2) S 上の Weil-Petersson 計量 ω_{WP} は $\Gamma\backslash\Omega$ 上の Bergman 計量 ω_{Ω} に一致する:

$$\omega_{\mathrm{WP}} = \omega_{\Omega}.$$

ただし, Ω が既約でない時は, 右辺は Ω の各既約成分の Bergman 計量の適当な線形結合と理解する.

(C3) 以下の条件を充たす 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X が存在する.

- $H^2(X, \mathbf{R}) + i\mathcal{K}_X$ は Ω の開部分領域.
- $\Gamma\backslash\Omega$ の尖点の近傍において $\pi\colon \mathcal{Y} \to S$ は X のミラー族である.
- ミラー写像の逆 $M^{-1} \circ \exp(2\pi i(\cdot))$ は複素 Kähler 錐 $H^2(X, \mathbf{R}) + i\mathcal{K}_X$ に解析接続され, モジュラー射影に一致する. つまり, 次の図式は可換

$$\begin{tikzcd} H^2(X,\mathbf{R}) + i\mathcal{K}_X \arrow[r, "M^{-1}\circ\exp(2\pi i(\cdot))"] \arrow[d, "\iota"'] & S \arrow[d, "\iota"] \\ \Omega \arrow[r, "\Pi"'] & \Gamma\backslash\Omega \end{tikzcd}$$

ただし, ι は包含写像を表し, Π は自然な射影を表す.

これらの条件 (C1), (C2), (C3) が充たされる事は稀であるが, 少なくとも (C1), (C2) に関しては筆者の知る限り何個かの例が存在する [18].

S 上の関数 $\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/S)$ を以下の式で定める

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/S)(s) := \tau_{\mathrm{BCOV}}(Y_s), \qquad s \in S.$$

筆者は最近以下の定理を得た.

定理 7. 条件 (C1), (C2) の下で, Γ に関する Ω 上の (有理型) 保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/S}$ が存在して, 以下の等式が成り立つ

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/S) = \|\Psi_{\mathcal{Y}/S}\|, \qquad \mathrm{div}(\Psi_{\mathcal{Y}/S}) \subset \Omega \setminus \Pi^{-1}(S).$$

この定理と BCOV 予想から, 以下の様な観察をする事ができる.

観察 1. 条件 (C1), (C2), (C3) と BCOV 予想を仮定すれば, 保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/S}$ は $H^2(X, \mathbf{R}) + i\mathcal{K}_X$ の無限遠点 $+i\infty$ に対応した尖点の近傍で無限積展開を持つ. この意味で, BCOV 予想は Borcherds 積の拡張を導く.

上記定理と観察から, 以下の問題群は興味深い.

問題 8 (*). 3 次元 Calabi-Yau 多様体の族 $\pi\colon \mathcal{Y} \to S$ で, 条件 (C1), (C2) (及び (C3)) を充たすものを見つけよ. それらの族に付随する保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/S}$ を決定せよ.

問題 9 (*). 筆者が持っている例では, 条件 (C1), (C2) を充たす Calabi-Yau 多様体の例は全て $K3$ 曲面と楕円曲線の直積の適当な商のクレパント解消として得られる. この様な構成以外にも (C1), (C2) を充たす例はあるであろうか?

問題 10 (**). 条件 (C1), (C2) (及び (C3)) を充たす 3 次元 Calabi-Yau 多様体の族 $\pi\colon \mathcal{Y} \to S$ を全て決定せよ. それらの族に付随する保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/S}$ を決定せよ.

問題 11 (**). 条件 (C1), (C2), (C3) を充たす $\Gamma\backslash\Omega$ で, Ω が I 型対称領域でも IV 型対称領域でもない例が存在するか? この様な例がもし存在したとすれば, BCOV 予想の仮定の下に現在知られている Borcherds product の枠組みを真に超える無限積展開を持つ保型形式が存在する事になる. Borcherds product の理論を IV 型以外の対称領域に拡張させる可能性を持つという点で, 筆者には大変興味ある問題である. (実際はそのような例は存在しないという否定的な結末も大いに有り得ると思う.)

5. 3 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の標準束に関する問題

数年前, Gritsenko-Huleck-Sankaran により, 次数 $2d$ の偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間 $\mathcal{F}_{2d}$ の小平次元に関する大きな進歩があった [6]. 彼等によれば, $d > 61$ の時, $\kappa(\mathcal{F}_{2d}) = 19$. すなわち, $d > 61$ の時, $\mathcal{F}_{2d}$ は一般型である. そこで, 次の問題として 3 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の小平次元を考える事は自然であろう.

5.1. **3 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の標準類.** X を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とし, L を X 上の豊富な直線束とする. (X, L) の同型類を含む偏極 3 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間を $\mathcal{M}$ で表す [16]. (今の所, モジュライ空間は狭い意味に考え, $\mathcal{M}$ の点は非特異 Calabi-Yau 多様体の同型類とする.) X の倉西空間は非特異なので [13], [14], $\mathcal{M}$ は高々商特異点しか持たない. (偏極 Abel 多様体や偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間についても事情は同様である.) 偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間は高々標準特異点しか持たない事が知られている.

問題 12 (*). $\mathcal{M}$ は高々標準特異点しか持たないか? 或は, $\mathcal{M}$ が高々標準特異点しか持たないための判定法を (X, L) の条件として与えよ.

ω_{WP} を $\mathcal{M}$ 上の Weil-Petersson 計量の Kähler 形式とし, $\mathrm{Ric}\,\omega_{\mathrm{WP}}$ を ω_{WP} の Ricci 形式とする. Quillen 計量の曲率公式から, 以下の等式が $\mathcal{M}$ 上で成立する

$$-dd^c \log \tau_{\mathrm{BCOV}} = -\left(h^{1,2} + \frac{\chi}{12} + 3\right) \omega_{\mathrm{WP}} - \mathrm{Ric}\,\omega_{\mathrm{WP}}.$$

$[(X_0, L_0)] \in \mathcal{M}$ に対して, $\mathrm{Def}(X_0, L_0)$ を (X_0, L_0) の倉西空間とする. 解析空間芽の自然な写像 $\Pi_{[(X_0,L_0)]}\colon \mathrm{Def}(X_0, L_0) \to \mathcal{M}_{[(X_0,L_0)]}$ は射影 $\mathrm{Def}(X_0, L_0) \to \mathrm{Def}(X_0, L_0)/\mathrm{Aut}(X_0, L_0)$ と同一視される. そこで, $\mathcal{M}$ の軌跡 $\mathcal{R}$ をこの自然な射影の分岐軌跡として定める

$$\mathcal{R} := \{[(X, L)] \in \mathcal{M};\ \Pi_{[(X,L)]}\text{の分岐指数} \geq 2\}.$$

$[(X,L)]$ を $\mathcal{R}$ の生成点とすれば, $\Pi_{[(X,L)]}$ は局所的には写像

$$(z_1, z_2, \dots, z_{h^{1,2}}) \to (z_1^\nu, z_2, \dots, z_{h^{1,2}}) \qquad \nu > 1$$

により与えられ, 特に $\mathcal{M}$ は $\mathcal{R}$ の生成点 $[(X,L)]$ において非特異である.

問題 13 (*). 偏極 Abele 多様体のモジュライ空間に対して, $\mathcal{R} = \emptyset$ である. 一方, 偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間に対しては, 一般に $\mathcal{R} \neq \emptyset$ である [6]. 偏極 3 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間に対して, $\mathcal{R} = \emptyset$ であるか又は $\mathcal{R} \neq \emptyset$ であるかを決定せよ. $\mathcal{R} = \emptyset$ となるための判定法を (X,L) の条件として与えよ.

問題 14 (*). $\mathcal{R} \neq \emptyset$ の時, $\mathcal{R}$ の各既約成分 $\mathcal{R}_i$ における分岐指数 ν_i を評価せよ.

$\mathcal{R} \neq \emptyset$ の時, $\mathcal{R}$ は $\mathcal{M}$ の因子を定める. 上と同様 $\mathcal{R}_i$ を $\mathcal{R}$ の既約成分とし $\nu_i \geq 2$ をその分岐指数とすれば, $\mathcal{R}_i$ の重複度は $\nu_i - 1$ で与えられる. 従って, モジュライ空間の非特異部分 $\mathcal{M}_{\mathrm{reg}} := \mathcal{M} \setminus \operatorname{Sing}\mathcal{M}$ において, 以下のカレントの等式が成り立つ:

$$c_1(K_{\mathcal{M}}, \det g_{\mathrm{WP}}^{-1}) = -\operatorname{Ric}\omega_{\mathrm{WP}} - \sum_{i\in I}\left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right)\delta_{\mathcal{R}_i}.$$

カレントの自明な拡張を考えれば, この方程式が $\mathcal{M}$ 上で成立しているとして良い.

問題 15 (*). 高々標準商特異点しか持たない $\mathcal{M}$ の射影的なコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}$ が存在するか？

偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間の場合には, 上の問題は肯定的である. 以下, 上記問題の解が肯定的であると仮定し, 高々標準商特異点しか持たない $\mathcal{M}$ の射影的なコンパクト化を $\overline{\mathcal{M}}$ とする. そして

$$\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M} =: \mathcal{D} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{D}_j$$

を境界の既約成分への分解とする. 以下, 因子 $\mathcal{R}$ とその $\overline{\mathcal{M}}$ における閉包を同一視する.

H を $\mathcal{M}$ 上の Hodge 束とする. 即ち, $\mathfrak{p}\colon \mathfrak{X} \to \operatorname{Def}(X_0)$ を倉西族, $\mu\colon \operatorname{Def}(X_0) \to \mathcal{M}$ を自然な写像とする時,

$$\mu^* H = \mathfrak{p}_* K_{\mathfrak{X}/\operatorname{Def}(X_0)}.$$

Hodge 束上の L^2-計量を h_{L^2} とすれば, Weil-Petersson 形式 ω_{WP} は (H, h_{L^2}) の Chern 形式である. Abel 多様体や $K3$ 曲面の場合の類推から, 以下の問題群には肯定的な解があると思われる. (多分, 既に知られていると思います. 文献を探すのが面倒だったので, 問題としました.)

問題 16 (*). H (の適当なテンソル冪) は $\overline{\mathcal{M}}$ 上の正則直線束 $\overline{H}$ に拡張するか？

問題 17 (*). $\overline{H}$ は $\overline{\mathcal{M}}$ 上のネフかつ巨大な直線束か？

問題 18 (*). Weil-Petersson 形式 ω_{WP} とその Ricci 形式 $\mathrm{Ric}\,\omega_{\mathrm{WP}}$ は境界因子 $\mathcal{D}_i$ の近くで Poincaré 増大度を持つか？

問題 19 (*). $\overline{H}$ 上の計量 h_{L^2} と $K_{\overline{\mathcal{M}}}$ 上の計量 $\det g_{\mathrm{WP}}^{-1}$ は Mumford の意味 [10] で良い計量か？

以下, これらの問題が全て肯定的な解を持つと仮定し, カレント ω_{WP} と $\mathrm{Ric}\,\omega_{\mathrm{WP}}$ を $\mathcal{M}$ から $\overline{\mathcal{M}}$ への自明拡張と同一視する. この時, 次の事が言える. 各 $i \in I$ に対して, $a_i \in \mathbf{Q}$ が存在して, 以下のカレントの等式が $\overline{\mathcal{M}}$ 上で成り立つ:

$$
\begin{aligned}
-dd^c \log \tau_{\mathrm{BCOV}} &= -\left(h^{1,2} + \frac{\chi}{12} + 3\right) \omega_{\mathrm{WP}} - \mathrm{Ric}\,\omega_{\mathrm{WP}} + \sum_{i \in I} a_i \delta_{\mathcal{D}_i} \\
&= -\left(h^{1,2} + \frac{\chi}{12} + 3\right) c_1(\overline{H}, h_{L^2}) + c_1(K_{\mathcal{M}}, \det g_{\mathrm{WP}}^{-1}) \\
&\quad + \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) \delta_{\mathcal{R}_i} + \sum_{j \in I} a_j \delta_{\mathcal{D}_j}
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathcal{D}_j$ が因子でなければ $a_j = 0$ であり, $\mathcal{D}_j$ の一般の点に対応するファイバーが n_j 個の通常二重点のみを特異点集合に持つ 3 次元 Calabi-Yau 多様体ならば, $a_j = n_j/6$ である.

問題 20 (**). $a_i \in \mathbf{Q}$ を求めよ.

この問題は以下の様に 3 次元 Calabi-Yau 多様体の一変数（半安定）退化の分類の問題と解析的捩率の特異性を決定する問題に翻訳される.

問題 21 (**). 境界因子 $\mathcal{D}_i$ に対応する 3 次元 Calabi-Yau 多様体の一変数（半安定）退化を決定せよ.

問題 22 (*). $\mathcal{D}_i$ の一般の点に対応する 3 次元 Calabi-Yau 多様体の一変数（半安定）退化 $f\colon (\mathcal{X}, X_0) \to (\Delta, 0)$ に対して, BCOV 不変量の Lelong 数

$$
a_i = \lim_{t \to 0} \frac{\log \tau_{\mathrm{BCOV}}(X_t)}{\log |t|^2}
$$

を決定せよ.

$\delta_{\mathcal{R}_i} \equiv c_1(\mathcal{O}(\mathcal{R}_i))$ であり, コホモロジー群 $H^2(\overline{\mathcal{M}}, \mathbf{Q})$ において $\delta_{\mathcal{D}_j} \equiv c_1(\mathcal{O}(\mathcal{D}_j))$ なので, 上の問題が解決されれば以下のコホモロジー類の等式が得られる

$$
c_1(K_{\overline{\mathcal{M}}}) = \left(h^{1,2} + \frac{\chi}{12} + 3\right) c_1(\overline{H}) - \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) c_1(\mathcal{O}(\mathcal{R}_i)) - \sum_{i \in I} a_i\, c_1(\mathcal{O}(\mathcal{D}_i)).
$$

コホモロジー類の等式から直線束の等式を得るために, 次の問題に答える必要がある.

問題 23 (*). 標準商特異点しか持たない射影的コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}$ で, $H^1(\overline{\mathcal{M}}, \mathbf{Q}) = 0$ を充たすものが存在するか？

以下の弱い問題で充分かもしれない.

問題 24 (*). $H^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = 0$ が恒に成り立つか？

偏極 Abel 多様体や偏極 $K3$ 曲面では, 上の問題は算術群の 1 次コホモロジー群の計算から肯定的である.

問題 25 (*). L を $\overline{\mathcal{M}}$ 上の正則直線束とする. L が $\mathcal{M}$ 上で自明ならば, ある $m_i \in \mathbf{Q}$, $i \in I$ が存在して $L \cong_{\mathbf{Q}} \mathcal{O}(-\sum_{i \in I} m_i \mathcal{D}_i)$ となるか？

上の問題群の解が肯定的ならば, 次の主張が成り立つ. もし $H^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = 0$ で $\{c_1(\mathcal{O}(\mathcal{D}_i))\}_{i \in I}$ が $H^2(\overline{\mathcal{M}}, \mathbf{Q})$ において線形独立ならば, 以下の $\mathbf{Q}$-直線束の同型が存在する:

$$\begin{aligned} K_{\overline{\mathcal{M}}} &\cong_{\mathbf{Q}} \overline{H}^{h^{1,2}+\frac{\chi}{12}+3} \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i \in I}(1-\frac{1}{\nu_i})\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{O}(-\sum_{j \in J} a_i \mathcal{D}_i) \\ &= \overline{H}^{\frac{5h^{1,2}+h^{1,1}}{6}+3} \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i \in I}(1-\frac{1}{\nu_i})\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{O}(-\sum_{j \in J} a_j \mathcal{D}_j). \end{aligned}$$

5.2. 3 次元 **Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の小平次元.**

問題 26 (**). $\mathcal{M}$ は恒に非負の対数的小平次元を持つか？

問題 27 (***). $\overline{H}$ が巨大であると仮定し, さらに以下の $\mathbf{Q}$-直線束の同型を仮定する:

$$K_{\overline{\mathcal{M}}} \cong_{\mathbf{Q}} \overline{H}^{\otimes(h^{1,2}+\frac{\chi}{12}+3)} \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i \in I}(1-\frac{1}{\nu_i})\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{O}(-\sum_{j \in J} a_j \mathcal{D}_j).$$

次の条件 (i), (ii) を充たす有理数 $a \in \mathbf{Q}_{>0}$ が存在するための判定法を (X, L) の条件として与えよ:

(i) $0 < a < h^{1,2}(X) + \frac{\chi(X)}{12} + 3$.

(ii) $\overline{H}^{\otimes a} \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i \in I}(1-\frac{1}{\nu_i})\mathcal{R}_i) \otimes \mathcal{O}(-\sum_{j \in J} a_j \mathcal{D}_j)$ は有効 $\mathbf{Q}$-直線束.

もし条件 (i), (ii) を充たす有理数 $a > 0$ が存在すれば, $\overline{\mathcal{M}}$ は一般型である.

Remark 1. 偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間に対して, Gritsenko-Huleck-Sankaran[6] は以下の等式を示した:

$$\Gamma(K_{\overline{\mathcal{M}}}^{m}) \cong \Gamma((\overline{H}^{19} \otimes \mathcal{O}(-\frac{1}{2}\mathcal{R}) \otimes \mathcal{O}(-\mathcal{D}))^m), \qquad m > 0.$$

$d > 61$ の時, 彼等は $\mathcal{R} \cup \mathcal{D}$ で消える $\overline{H}^a$, $a < 19$ の正則切断の存在を 26 次元 Borcherds Φ-関数の擬引き戻しを用いて示した. その結論として, 次数 $2d$, $d > 61$ の偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間が一般型である事が示された.

モジュライ空間が一般型である事は, 或る意味で否定的な結果である. 何故なら, モジュライ空間が一般型の時, そのモジュライの一般の点に対応する 3 次元 Calabi-Yau 多様体は簡単な方程式系では書けないからである. 筆者の知る限り, モジュライ空間が一般型になるような偏極 Calabi-Yau 多様体の例はまだ知られていないので, 以下の問題も意味があると思う.

問題 28 (**). モジュライ空間が一般型になるような偏極3次元 Calabi-Yau 多様体は存在するか？存在するならその例を構成せよ．この場合 Calabi-Yau 多様体を方程式で書く事は難しいので，3次元 Calabi-Yau 多様体を特異多様体の平滑化として構成する川又-並河 [8] の方法がヒントになるかもしれない．

5.3. 3次元 **Calabi-Yau** 多様体のモジュライ空間に関するその他の問題. Abel 多様体や $K3$ 曲面ではモジュライ空間の双有理型が実際に偏極の選び方に依存する．ところが，ミラー5次超曲面の場合を考えると [15]，3次元 Calabi-Yau 多様体では必ずしも同様の現象は成り立っていないように筆者には思われる．(筆者が考え違いをしているのかも知れません.)

問題 29 (*). 偏極ミラー5次超曲面のモジュライ空間（のコンパクト化）は，偏極の選び方によらず $\mathbf{P}^1$ に同型か？

より一般に，以下の問題を問いたい．

問題 30 (**). 3次元偏極 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の双有理型や小平次元は，どの程度偏極の選び方に依存するかを調べよ．

偏極 $K3$ 曲面の判別式軌跡では，通常二重点のみを持つ偏極 $K3$ 曲面のモジュライ点が稠密に存在していた．この様な点はモノドロミーが有限位数を持つ点（I 型退化）として特徴付けられている．同様の事が3次元偏極 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間に対して成り立つかどうかも（少なくとも筆者には）興味深い問題である．

問題 31 (*). 孤立特異点のみを特異点に持つ3次元 Calabi-Yau 多様体 X が非特異3次元 Calabi-Yau 多様体に変形できると仮定する．この時，X の倉西空間 $\mathrm{Def}(X)$ の判別式軌跡 $\mathfrak{D}$ において，通常二重点のみを特異点に持つ3次元 Calabi-Yau 多様体の軌跡は稠密か？言い換えると，$\mathfrak{D}$ の各既約成分は通常二重点のみを特異点に持つ3次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ点を含むか？この問題については，論説 [11] が参考になるかもしれない．

References

[1] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. *Holomorphic anomalies in topological field theories*, Nuclear Phys. B **405** (1993), 279–304.

[2] ——— *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 311–427.

[3] Candelas, P., de la Ossa, X., Green, P., Parkes, L. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly solvable superconformal field theory, Nuclear Physics **B407** (1993), 115–154.

[4] Cox, D.A., Katz S. *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Amer. Math. Soc. Providence (1999)

[5] Fang, H., Lu, Z., Yoshikawa, K.-I. *Analytic torsion for Calabi–Yau threefolds*, J. Diff. Geom. **80** (2008), 175–259.

[6] Gritsenko, V.A., Huleck, K., Sankaran, G.K. *The Kodaira dimension of the moduli of $K3$ surfaces*, Invent. Math. **169** (2007), 519-567.

[7] Gross, M., Huybrechts, D., Joyce, D. *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Universitext, Springer (2003).

[8] Kawamata, Y., Namikawa, Y. *Logarithmic deformation of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties*, Invent. Math. **118** (1994), 395–409.

[9] Morrison, D. *Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry*, Astérisque **218** (1993), 243–271.

[10] Mumford, D. *Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case*, Invent. Math. **42** (1977), 239-272.

[11] Namikawa, Y. *Calabi-Yau threefolds and deformation theory*, Sugaku Exposition **15** (2002), 1–29.

[12] Strominger, A., Yau, S.-T., Zaslow, E. *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Physics **B479** (1996), 243–259.

[13] Tian, G. *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric*, Mathematical Aspects of String Theory, World Scientific (1987), 629–646.

[14] Todorov, A. *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds I*, Commun. Math. Phys. **126** (1989), 325–346.

[15] Usui, S. *Generic Torelli theorem for quintic-mirror family*, Proc. Japan Acad. **84** Ser. A (2008), 143–146.

[16] Viehweg, E. *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds*, Springer, (1995).

[17] Voisin, C. *Mirror Symmetry*, Amer. Math. Soc., Providence (1999).

[18] Yoshikawa, K.-I. *Calabi–Yau threefolds of Borcea–Voisin, analytic torsion, and Borcherds products*, Astérisque **328** (2009), 355–393

[19] Zinger, A. *The reduced genus 1 Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 691–737.