数理解析研究所講究録
第 1731 巻 2011 年 191-198

Kähler-Einstein 幾何の問題; Donaldson-Tian-Yau の予想の解決に向けて

大阪大学大学院理学研究科 満渕俊樹 (Toshiki Mabuchi)
Graduate School of Science, Osaka University

2010 年 10 月 31 日

1 背景その 1 (Calabi 予想)

・ S.-T.Yau は，Kähler-Einstein 計量の存在に関し，Calabi や Aubin らの先行結果を踏まえ，リッチ曲率が零または負の場合の Calabi 予想を肯定的に解決し，こうした業績等によって 1982 年にフィールズ賞を受けた.

・リッチ曲率が正の場合の Calabi 予想は，未解決問題として残った.

2 背景その 2 (小林-ヒッチン対応)

・コンパクト Kähler 多様体上の indecomposable な正則ベクトル束に対し，Hermitian-Einstein 計量が存在することと (Mumford-竹本の意味で) 安定であることは同値である.

・この事実は，小林-ヒッチン対応とよばれ，小林 (昭七)，Lübke らの安定性定理から始まって，最終的には 1980 年代の Donaldson，Uhlenbeck-Yau らの存在定理によって確立された.

3 2つの背景の融合

・リッチ曲率が正の場合の Calabi 予想の未解決部分を，小林-ヒッチン対応の多様体へのアナロジーから説明しようという Yau の予想が知られている．

・この問題に最初に取り組んだのは，Tian [8] と Donaldson [1] である．彼らは多様体版における新たな安定性として，以下の K-安定性を考察した：

・偏極代数多様体 (M, L) が **K-安定**であるとは，(M, L) の各テスト配置 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ を考えたときに，その Donaldson-二木不変量 $F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が

$$F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \leq 0$$

を常にみたし，かつ等号成立は $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が積配置の場合に限るときにいう．この新たな安定性を用いて，以下の予想が考えられている．

4 Donaldson-Tian-Yau 予想

・偏極類が $c_1(M)$ である場合には定スカラー曲率 Kähler 計量であることと Kähler-Einstein 計量であることは同値であるので，一般の偏極類に対する次の予想は Kähler-Einstein 計量の存在問題の自然な拡張とみなせる：

Donaldson-Tian-Yau 予想： 偏極代数多様体 (M, L) が K-安定 $\Leftrightarrow$ 偏極類 $c_1(L)$ に定スカラー曲率 Kähler 計量が存在する．

・Kähler-Einstein 計量の拡張概念である定スカラー曲率 Kähler 計量を，さらに一般化したものが extremal Kähler 計量であるということから，Donaldson-Tian-Yau 予想を extremal Kähler 計量を用いて，さらに広い枠組みで定式化することができる．これは次章に述べる．

5 Donaldson-Tian-Yau 予想の研究状況

・Donaldson-Tian-Yau 予想に関しては，欧米や中国では，Chen-Donaldson, Phong-Sturm，Tian，Zhu らの各グループ，日本では二木や我々のグループが研究を行っている．我々は，より一般的な次の予想を研究している：

Extremal Kähler 版の予想： 偏極代数多様体 (M, L) が K-相対安定 $\Leftrightarrow$ 偏極類 $c_1(L)$ に extremal Kähler 計量が存在する．

・この予想については，Székelyhidi [S] を参照．ただし (M, L) の K-相対安定性を定義するには，M の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ の代数的トーラス T で，extremal Kähler 正則ベクトル場の生成する代数的トーラス $T_{\min}$ を含むものをひとつ定める必要がある．また T を含む $\mathrm{Aut}(M)$ の極大代数的トーラス $T_{\max}$ をひとつ固定しよう．そして以下のように定義する：

・偏極代数多様体 (M, L) が **K-相対安定**であるとは，そのテスト配置 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ で T に直交するものは常に

$$F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \le 0$$

をみたし，かつ等号成立は $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が積配置の場合に限るときに言う． この定義から明らかに，$T_{\min} = \{1\}$ という特別な場合は，$T = T_{\min}$ とおくと，K-相対安定性は K-安定性に他ならないことに注意せよ．

・Extremal Kähler 版の予想の解決には，もちろん $(\Leftrightarrow)$ の両方向を示す必要があるが，実は $(\Leftarrow)$ の方向については，以下のように既知である：

(1) $T = T_{\max}$ の場合に正しい (Székelyhidi-Stoppa [SS]).

(2) 一般の T に対して正しい ([M1]).

6　相対安定性に付随する直交概念

・前章の K-相対安定性の定義からも分かるように，適切な直交概念が必要となる．実は，K-相対安定性を扱う場合と，漸近 Chow 相対安定性を扱う場合のそれぞれにおいて，別個の直交概念を定めることが必要となる．

・以下では，偏極代数多様体 (M, L) によって，コンパクト連結複素多様体 M と，その上の very ample 正則直線束 L の対 (M, L) を表すことにする．また前章と同様に，$\mathrm{Aut}(M)$ の代数的トーラス T で $T_{\min} \subseteq T \subseteq T_{\max}$ をみたすものを任意にひとつ固定する．各自然数 m に対して

$$V_m = H^0(M, L^m)$$

とおくと，T の適当な unramified cover T_m が V_m に $\mathrm{SL}(V_m)$ の代数部分群として作用し，T の Lie 代数 $\mathfrak{t} := \mathrm{Lie}(T)$ は $\mathfrak{sl}(V_m)$ の Lie 部分代数

$$\mathfrak{t}_m := \mathrm{Lie}(T_m)$$

とみなせる．ここで，$\mathfrak{h}_m$ を $\mathfrak{t}_m$ の $\mathfrak{sl}(V_m)$ 内での centralizer とするとき，

(1)　漸近 Chow 相対安定性を定義するために，各 m に対して $\mathfrak{h}_m$ 内での $\mathfrak{t}_m$ の直交補空間 $\mathfrak{t}_m^{\perp}$ を定義する必要があり；

(2)　K-相対安定性を定義するためには，$m = 1$ の場合に制限して，$\mathfrak{h}_1$ 内での $\mathfrak{t}_1$ の直交補集合 $\mathfrak{t}_1^{\perp'}$ を定義する必要がある．

7　漸近 Chow 相対安定性における直交概念

・Lie 代数 $\mathfrak{z}_m$ 上で，内積 $\mathfrak{z}_m \ni A, B \mapsto \mathrm{Tr}(A\,{}^t\bar{B}) \in \mathbb{C}$ を考え，$\mathfrak{t}_m$ の $\mathfrak{h}_m$ 内での直交補空間を $\mathfrak{t}_m^{\perp}$ とする．そして $T_m^{\perp}$ によって，$\mathfrak{t}_m^{\perp}$ を Lie 代数にもつような $\mathrm{SL}(V_m)$ の連結部分代数群を表すことにする．

・M の複素次元を n とし，M を完備線形系 $|L^m|$ で $\mathbb{P}^*(V_m)$ 内に埋め込んだときの像の次数を $d(m)$ で表すとき，V_m のテンソル空間

$$W_m := \{S^{d(m)}(V_m)^*\}^{\otimes n+1}$$

には $T_m^\perp$ が $\mathrm{SL}(V_m)$ の代数部分群として自然に作用する．W_m の零でない元 $\mathrm{CH}_m(M)$ で，$\mathbb{P}^*(V_m)$ の既約かつ被約な代数的サイクル M の Chow form を表すと，射影化して得られる点 $[\mathrm{CH}_m(M)] \in \mathbb{P}(W_m)$ は M の Chow point となる．そして漸近 Chow 相対安定性を以下のように定義する．

・偏極代数多様体 (M, L) が**漸近 Chow 相対安定**であるとは，$m \gg 1$ のとき軌道 $T_m^\perp \cdot \mathrm{CH}_m(M)$ が常に W_m の閉集合であるときにいう．

8 K-相対安定性における直交概念

・代数的トーラス T_1 の V_1 への作用についてのウエイト分解を考えるとき，乗法的指標 $\chi_k \in \mathrm{Hom}(T_1, \mathbb{C}^*)$ が存在して

$$V_1 = \oplus_k V(\chi_k)$$

と書ける．ここで $V(\chi_k)$ は，T_1 の各元 g の作用がちょうど $\chi_k(g)$ 倍で特徴付けられる V_1 の元全体を表す．また $\mathfrak{sl}(V_1)$ の Lie 部分代数 $\mathfrak{s}_1$ を

$$\mathfrak{s}_1 := \oplus_k \mathfrak{sl}(V(\chi_k))$$

で定めると，これは $\mathfrak{h}_1$ の Lie 部分代数であることに注意する．ただし，各 $\mathfrak{sl}(V(\chi_k))$ は $V(\chi_\ell)$, $\ell \neq k$, に自明に作用するものとする．一方，Lie 代数 $\mathfrak{h}_1$ の中心を $\mathfrak{z}_1$ とするとき，テスト配置ごとに（すなわち $\mathfrak{z}_1$ の元を定めるごとに） Székelyhidi [S] が定義した $\mathfrak{z}_1$ の各元と $\mathfrak{t}_1\,(=\mathfrak{t})$ とのペアリングが，実は各区分毎に $\mathbb{Q}$ 上定義された，連続な区分的双線形形式

$$\theta : \mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{t}_1 \to \mathbb{C}$$

に拡張する (cf. [M1]). よって $\mathfrak{h}_1$ 内での $\mathfrak{t}_1$ の直交補集合 $\mathfrak{t}_1^{\perp'}$ が次のように定まるが，これは必ずしも $\mathfrak{h}_1$ の線形空間とは限らない.

$$\mathfrak{t}_1^{\perp'} := \mathfrak{s}_1 \oplus \{A \in \mathfrak{z}_1\,;\, \theta(A,B) = 0 \text{ for all } B \in \mathfrak{t}_1\}.$$

・T に直交する各テスト配置 $(\mathcal{M},\mathcal{L})$ とは，1 次元代数的トーラスを生成しうる $\mathfrak{t}_1^{\perp'}$ のすべての元に付随する各 DeConcini-Procesi family をさす.

9　存在問題解決へのプログラム

・Extremal Kähler 版の予想の $(\Rightarrow)$ の方向，すなわち存在問題を解決するために，我々は以下の３つのステップから成るプログラムを提起している.

(1) (cf. [MN]) K-相対安定性 $\Rightarrow$ 漸近 Chow 相対安定性；

(2) (cf. [M2]) 漸近 Chow 相対安定性
$\Rightarrow$ approximate balanced metric ω_m, $m \gg 1$, の存在；

(3) (cf. [M3]) 収束を示す：$\omega_m \to \omega_\infty\,(m \to \infty)$.

この３つのステップが完成すると，ω_∞ が自動的に extremal Kähler 計量になり，存在問題が解決することになる.

10　種々の問題

問題 1**: 各偏極代数多様体 (M,L) に対し，$T = T_{\max}$ として，区分的双線形形式 $\theta : \mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ を知りたいのであるが，具体的には M が非特異射影トーリックの場合に（特に M の次元が２や３の場合に）計算せよ.

問題 2***: 非特異トーリック Fano 多様体 (M, K_M^{-1}) は $T = T_{\max}$ のとき K-相対安定か？（もしこれが正しく, Donaldson-Tian-Yau 予想の extremal Kähler 版も正しければ，非特異トーリック Fano 多様体の anti-canonical class に必ず extremal Kähler 計量が存在することになる.）

問題 3（このトピックには，*から***まですべての難易度の問題がある）：偏極代数多様体 (M, L) に対し，$c_1(L)$ に，Kähler-Einstein 計量（または定スカラー曲率 Kähler 計量，さらには extremal Kähler 計量）の存在のもとに成り立つ種々の性質が，単に K-安定性や相対 K-安定性の仮定の下でも導き出されることを代数幾何学的な議論で示せ．（たとえば Arezzo-Pacard の結果との関連で，Donaldson が最近提起している $\bar{\mathrm{K}}$-安定性と K-安定性が同値であるかどうかを調べよ．）さらに導き出されない例がもしあれば，Donaldson-Tian-Yau 予想あるいはその extremal Kähler 版に反例が見つかることになり，予想の否定的解決が得られることになる．

問題 4***：Donaldson-Tian-Yau 予想を解決せよ．

問題 5***：Donaldson-Tian-Yau 予想の extremal Kähler 版を解決せよ．

問題 6***：非特異 Fano 多様体 M が Kähler-Ricci soliton をもつときに，その canonical bundle K_M に対応する S^1-bundle に Sasaki-Einstein 計量が必ずはいるかどうかを調べよ．（M がトーリックの場合は正しい．）

注意：(1) $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$ のとき，一般の L で M が非特異トーリックの場合の Donaldson-Tian-Yau 予想や K-安定性は， Donaldson や B.Zhou によって詳しく調べられている．(2) また，問題 3 について尾高-佐野は alpha-invariant の理論のかなりの部分を K-安定性の仮定から導き出した．

参考文献

[1] S.K. Donaldson: *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. **62** (2002), 289–349.

[2] T. Mabuchi: *Relative stability and extremal metrics*, submitted to JMSJ.

[3] T. Mabuchi: *Asymptotics of polybalanced metrics under relative stability constraints*, submitted to OJM.

[4] T. MABUCHI: *Donaldson-Tian-Yau's conjecture*, in preparation.

[5] T. MABUCHI AND Y. NITTA: *K-stability and asymptotic Chow stability*, in preparation.

[6] J. STOPPA AND G. SZÉKELYHIDI: *Relative K-stability of extremal metrics*, arXiv: math.DG/0912.4095 (2009).

[7] G. SZÉKELYHIDI: *Extremal metrics and K-stability*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 76-84.

[8] G. TIAN: Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math. **130** (1997), 1-37.