

実閉体上のデファイナブル G 集合のデファイナブル強変位 G レトラクトについて

川上智博

640-8510 和歌山市栄谷 930
和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R, +, \cdot, <)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ において、デファイナブル G 集合のデファイナブル強変位 G レトラクトについて考察する。順序極小構造は、実数体 \mathbb{R} の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, \dots)$ に限っても、[7] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関しては、[3] などに性質がまとめられている。また、[8] では、実数体 \mathbb{R} の場合において、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ で考えるものとする。

2. 準備

稠密線形で端点をもたない順序 $<$ をもった体 $(R, +, \cdot, <)$ が順序体とは、以下の二つの条件をを満たすことである。

2010 *Mathematics Subject Classification*. 57S10, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, デファイナブル強変位 G レトラクト, デファイナブルリーコンパクト, デファイナブル群.

(1) 任意の $x, y, z \in R$ に対して、 $x < y$ ならば、 $x + z < y + z$ である。

(2) 任意の $x, y, z \in R$ に対して、 $x < y$ かつ $z > 0$ ならば、 $xz < yz$ である。

順序体 $(R, +, \cdot, <)$ が実体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

(1) R の元 x_1, \dots, x_n で、 $x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1$ となるものは存在しない。

(2) 任意の R の元 y_1, \dots, y_m に対して、 $y_1^2 + \dots + y_m^2 = 0$ ならば、 $y_1 = \dots = y_m = 0$ である。

実体 $(R, +, \cdot, <)$ が実閉体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

(1) [多項式に関する中間値定理] 任意の $f(x) \in R[x]$ に対して、 $a < b$ かつ $f(a) \neq f(b)$ ならば、 $f([a, b]_R)$ は、 $f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。ただし、 $[a, b]_R = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ とする。

(2) $R[i] = R[x]/(x^2 + 1)$ が代数閉体となる。

構造 $\mathcal{N} = (R, (f_i), (L_j), (c_k))$ とは、以下のデータで与えられるものである。

(1) 集合 R を \mathcal{N} の underlying set または universe という。

(2) 関数の集合 $\{f_i \mid i \in I\}$ 、ただし $f_i: R^{n_i} \rightarrow R, n_i \geq 1$ 。

(3) 関係の集合 $\{L_j \mid j \in J\}$ 、ただし $L_j \subset R^{m_j}, m_j \geq 1$ 。

(4) 特別な元の集合 $\{c_k \mid k \in K\} \subset R$ 。各 c_k を定数という。

添字集合 I, J, K は、空集合でもかまわない。

$f(L)$ が m 変数関数 (m 変数関係) とは、 $f: R^m \rightarrow R (L \subset R^m)$ となることである。

項とは、以下の3つの規則にしたがって得られる有限列ことである。

(1) 定数は項である。

(2) 変数は項である。

(3) f が m 変数関数かつ t_1, \dots, t_m が項ならば、 $f(t_1, \dots, t_m)$ は項である。

論理式とは、変数、関数、関係、論理記号、括弧、コンマ、 \exists, \forall からなる有限列で、以下の3つの規則にしたがって得られるものである。

(1) 任意の二つの項 t_1, t_2 に対して、 $t_1 = t_2$ と $t_1 < t_2$ は論理式である。

(2) L が m 変数関係かつ t_1, \dots, t_m が項ならば、 $L(t_1, \dots, t_m)$ は論理式である。

(3) ϕ と ψ が論理式ならば、 $\neg\phi, \phi \vee \psi$ と $\phi \wedge \psi$ は論理式である。 ϕ が論理式かつ v が変数ならば、 $(\exists v)\phi$ と $(\forall v)\phi$ は論理式である。

R^n の部分集合 X が \mathcal{N} においてデファイナブルとは、ある論理式 $\phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ と $b_1, \dots, b_m \in R$ が存在して、 $X = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^n \mid \phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)\}$ が \mathcal{N} で成り立つこととなることである。このとき、 X をデファイナブル集合という。

$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ が順序極小 (o-minimal) とは、 R の任意のデファイナブル集合が点と开区間の有限和となることである。ここで、开区間とは、 (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。

実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ は、順序極小であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

R の位相は、开区間を開基とする位相とする。 R^n の位相は、積位相とする。

ここでは、特に断らない限り、実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ で考察する。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$ 、すなわち、 $\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}$, $k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 \mathbb{R} 、 $\mathbb{R}_{alg} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上代数的である}\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. (1) 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、 2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル写像とは、 f のグラフ ($\subset R^n \times R^m$) がデファイナブル集合となることである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル関数 $f: [0, 1]_R \rightarrow X$ に対して、極限点 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ が X 内に存在することである。ただし、 $[0, 1]_R = \{x \in R \mid 0 \leq x < 1\}$ とする。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリー連結とは、 X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y, Z で、 $X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクトであるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクトとは限らない。連結デファイナブル集合は、デファイナブリー連結であるが、デファイナブル連結集合は、連結とは限らない。たとえば、 $R = \mathbb{R}_{alg}$ ならば、 $[0, 1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブリー連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.3 (Peterzil and Steinhorn [6]). R^n のデファイナブル集合 X に対して、 X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

コンパクト集合、連結集合の連続写像による像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.4. $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合、 $f: X \rightarrow Y$ をデファイナブル写像とする。 X がデファイナブリーコンパクト (デファイナブリー連結) ならば、 $f(X)$ はデファイナブリーコンパクト (デファイナブリー連結) である。

デファイナブル関数に対して、中間値の定理が成り立つ。

定理 2.5 (中間値の定理). $[a, b]_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ に対して、 $a < b$ かつ $f(a) \neq f(b)$ ならば、 $f([a, b]_{\mathbb{R}})$ は、 $f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。

定義 2.6. (1) \mathbb{R}^n のデファイナブル部分集合 G がデファイナブル群とは、 G が群であって、群演算 $G \times G \rightarrow G$ と $G \rightarrow G$ がデファイナブルとなることである。

(2) デファイナブル群 G がデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とは、 G がデファイナブリーコンパクトとなることである。

定義 2.7. G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。 G から $O_n(\mathbb{R})$ への群準同型が表現とは、それがデファイナブルであることである。ただし、 $O_n(\mathbb{R})$ は、 \mathbb{R} の n 次直交群とする。 G の表現空間とは、 G の表現から誘導される直交作用をもった \mathbb{R}^n のことである。デファイナブル G 集合とは、 G の表現空間の G 不変デファイナブル部分集合のことである。

$X \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とし、 $f: X \rightarrow Z$ をデファイナブル写像とする。 f がデファイナブル同相写像とは、デファイナブル写像 $h: Z \rightarrow X$ が存在して、 $f \circ h = id_Z$ かつ $h \circ f = id_X$ となることである。また、 f がデファイナブリー固有とは、 Z の任意のデファイナブリーコンパクト部分集合 C に対して、 $f^{-1}(C)$ がデファイナブリーコンパクトとなることである。

$X \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル開集合とし、 $f: X \rightarrow Z$ をデファイナブル写像とする。 f がデファイナブル C^r 写像とは、 f が C^r 写像となることである。デファイナブル C^r 写像 f がデファイナブル C^r 微分同相写像とは、 f が C^r 微分同相写像となることである。

定義 2.8. (1) r を非負整数または ∞ とする。Hausdorff 空間 X が n 次元デファイナブル C^r 多様体とは、 X の有限開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 、 \mathbb{R}^n の有限個の開集合 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と有限個の同相写像 $\{\phi_\lambda: U_\lambda \rightarrow V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して、 $U_\lambda \cap U_\nu \neq \emptyset$ となる λ, ν に対して、 $\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu)$ が

デファイナブルかつ $\phi_\nu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu) \rightarrow \phi_\nu(U_\lambda \cap U_\nu)$ がデファイナブル C^r 微分同相写像となることである。

このとき、 $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ をデファイナブル C^r 座標近傍系という。

定義 2.9. デファイナブル C^r 多様体 G がデファイナブル C^r 群とは、 G が群であって、群演算 $G \times G \rightarrow G$ と $G \rightarrow G$ がデファイナブル C^r 写像となることである。

定理 2.10. (1) 任意の自然数 r に対して、デファイナブル群は、デファイナブル C^r 群同型を除いて、ただひとつのデファイナブル C^r 群構造をもつ。

(2) \mathcal{N} が実数体 \mathbb{R} の順序極小拡張かつ C^∞ セル分解性質をもつならば、(1)において、 $r = \infty$ とすることができる。

R^n のデファイナブル部分集合 X に対して、オイラー数 $\chi(X)$ をデファイナブルホモロジー的にも定義することができる。

定理 2.11 ([1]). G が無限位数デファイナブリーコンパクトデファイナブル群ならば、 $\chi(G) = 0$ である。

定理 2.11 において、無限位数の条件は必要である。 G が位数 k の有限群ならば、 $\chi(G) = k$ となる。

系 2.12. $R = \mathbb{R}$ かつ G が 1 次元以上のコンパクト Lie 群ならば、 $\chi(G) = 0$ である。

定理 2.13. (1) (デファイナブル三角形分割). $S \subset R^n$ をデファイナブル集合、 S_1, \dots, S_k を S のデファイナブル部分集合とする。このとき、 R^n の有限単体複体 K とデファイナブル写像 $\phi : S \rightarrow R^n$ が存在して、 ϕ は、 S と各 S_i を K の開単体の和集合にデファイナブル同相的に写す。 S がデファイナブリーコンパクトならば、 $K = \phi(S)$ とできる。

(2) (部分的デファイナブル自明性). X, Z をデファイナブル集合とし、 $f : X \rightarrow Z$ をデファイナブル写像とする。このとき、 Z のデファイナブル集合への有限分割 $\{T_i\}_{i=1}^k$ とデファイナブル同相写像 $\phi_i : f^{-1}(T_i) \rightarrow T_i \times f^{-1}(z_i)$ が存在して、 $f|_{f^{-1}(T_i)} = p_i \circ \phi_i$, ($1 \leq i \leq k$) とできる。ただし、 $z_i \in T_i$, $p_i : T_i \times f^{-1}(z_i) \rightarrow T_i$ は射影とする。

(3) (デファイナブル商空間の存在). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とし、 X をデファイナブル G 集合とする。このとき、軌道空間 X/G はデファイナブル集合であって、射影 $\pi : X \rightarrow X/G$ は全射デファイナブルリー固有デファイナブル写像である。

定義 2.14. デファイナブル群 G の部分群 H がデファイナブル部分群とは、 H がデファイナブル集合となることである。

デファイナブル群の任意のデファイナブル部分群は、閉部分群である。ところが、デファイナブル群の閉部分群は、デファイナブル部分群とは限らない。たとえば、 \mathbb{R} の閉部分群 \mathbb{Z} は、デファイナブル部分群でない。

定義 2.15. デファイナブル G 集合間のデファイナブル写像 (デファイナブル同相写像) f がデファイナブル G 写像 (デファイナブル G 同相写像) とは、 f が G 写像となることである。

定義 2.16. G をデファイナブル群とする。デファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合とは、デファイナブル集合 X と群作用 ϕ の組 (X, ϕ) であって、 $\phi: G \times X \rightarrow X$ がデファイナブル写像となるものである。

定義 2.16 の G 作用は、線形とは限らない。しかし、同様にして、デファイナブル G 写像 (デファイナブル G 同相写像) を定義することができる。

定理 2.13 (3) を用いることにより、 H がデファイナブリーコンパクトデファイナブル群 G のデファイナブル部分群ならば、 G/H はデファイナブル集合となり、 $(g, g'H) \mapsto gg'H$ で定義される標準的な作用によって、 G/H はデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合となる。

3. デファイナブル強変位 G レトラクト

定義 3.1. G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。

(1) デファイナブル G CW 複体とは、有限 G CW 複体 $(X, \{c_i | i \in I\})$ であって、以下の 3 つの条件を満たすものである。

- (a) X の実現 $|X|$ は、デファイナブル G 集合である。
- (b) 各 G セルの特性写像 $f_{c_i}: G/H_{c_i} \times \Delta \rightarrow \bar{c}_i$ は、デファイナブル G 写像であり、 $f_{c_i}|_{G/H_{c_i} \times \text{Int } \Delta}: G/H_{c_i} \times \text{Int } \Delta \rightarrow c_i$ はデファイナブル G 同相写像である。ただし、 H_{c_i} は G のデファイナブル部分群、 Δ は閉単体、 \bar{c}_i は c_i の X における閉包、 $\text{Int } \Delta$ は Δ の内部とする。
- (c) F 各 c_i に対して、 $\bar{c}_i - c_i$ は、開 G セルの有限和である。

(2) X, Z をデファイナブル G CW 複体とする。胞体 G 写像 $f: X \rightarrow Z$ がデファイナブルとは、 $f: |X| \rightarrow |Z|$ がデファイナブルとなることである。

G と各閉単体はデファイナブリーコンパクトなので、任意のデファイナブル G CW 複体は、デファイナブリーコンパクトである。また、デファイナブル G CW 複体の G CW 部分複体は、それ自身がデファイナブル G CW 複体である。

定義 3.2. X をデファイナブル G 集合、 Y を X のデファイナブル G 部分集合とする。

(1) デファイナブル G 写像 $l: X \rightarrow Y$ が、 X から Y へのデファイナブル G レトラクションとは、 $l|_Y = id_Y$ となることである。

(2) X から Y へのデファイナブル強変位 G レトラクションとは、デファイナブル G 写像 $L: X \times [0, 1]_R \rightarrow X$ で、各 $x \in X$ に対して $L(x, 0) = x$ 、各 $y \in Y, t \in [0, 1]_R$ に対して $L(y, t) = y$ かつ $L(X, 1) = Y$ となることである。ただし、 $[0, 1]_R = \{x \in R | 0 \leq x \leq 1\}$ 上の G 作用は自明とする。

定理 3.3 ([4]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とし、 X をデファイナブル G 集合とする。このとき、 X から X のデファイナブリーコンパクトデファイナブル G 部分集合 Y へのデファイナブル強変位 G レトラクション L が存在する。

定義 3.4. G をデファイナブル群、 X, Y をデファイナブル G 集合、 $f, h: X \rightarrow Y$ をデファイナブル G 写像とする。

(1) f と h がデファイナブリー G ホモトピックとは、デファイナブル G 写像 $F: X \times [0, 1]_R \rightarrow Y$ が存在して、各 $x \in X$ に対して、 $F(x, 0) = f(x)$ かつ $F(x, 1) = h(x)$ となることである。ただし、 $[0, 1]_R = \{x \in R | 0 \leq x \leq 1\}$ 上の G 作用は自明とする。

(2) $[X, Y]_{def}^G$ ($[X, Y]^G$) は、 X から Y のデファイナブル G 写像 (連続 G 写像) のデファイナブル G ホモトピー類 (G ホモトピー類) 全体の集合を表すとする。デファイナブル G 写像 (連続 G 写像) f に対して、 $[f]_{def}^G$ ($[f]^G$) は、 f のデファイナブル G ホモトピー類 (G ホモトピー類) を表すとする。

\mathcal{N} が実数体 \mathbb{R} の順序極小拡張のとき、定理 3.3 の実数体版のときの結果 ([5]) を用いて、以下の定理を得る。

定理 3.5 ([5]). \mathcal{N} が実数体 \mathbb{R} の順序極小拡張で、 G をコンパクトデファイナブル群とし、 X, Y をデファイナブル G 集合とする。このとき、 $\phi: [X, Y]_{def}^G \rightarrow [X, Y]^G, \phi([f]_{def}^G) = [f]^G$ は全単射である。

この定理の証明には、定理 3.3 の実数体版のときの結果以外に、多項式近似定理が必要である。多項式近似定理は、一般の実閉体では不成立である ([2])。

注意 3.6. 一般の実閉体では、定理 3.5 の G 作用を考えない場合でも不成立である。

定理 3.7 ([4]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とし、 Y をデファイナブル G 集合 X のデファイナブル閉 G 部分集合とする。このとき、 G の表現空間 Ξ 内のデファイナブル G CW 複体 Z 、 Z の G CW 部分複体 W とデファイナブル G 写像 $f: X \rightarrow Z$ が存在して、以下の 4 つの条件を満たす。

- (1) f は、 X, Y をそれぞれ Z, W からある開 G セルを除くことによって得られる G 不変デファイナブル部分集合 Z_1, W_1 にデファイナブル G 同相的に写す。
- (2) 射影 $\pi: Z \rightarrow Z/G$ はデファイナブル胞体写像である。
- (3) 軌道空間 Z/G は、 $\pi(Z_1)$ と $\pi(W_1)$ を分割する有限単体複体である。
- (4) Z の各開セル c に対して、 $\pi|_{\bar{c}}: \bar{c} \rightarrow \pi(\bar{c})$ は、デファイナブル切断 $s: \pi(\bar{c}) \rightarrow \bar{c}$ をもつ。ただし、 \bar{c} は、 c の Z における閉包を表すとする。

特に、 X がデファイナブリーコンパクトならば、 $Z = f(X), W = f(Y)$ とできる。

定理 3.7 の証明のために、次の三つの結果が必要である。

補題 3.8 ([4]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とし、 K, H を G のデファイナブル部分群で、 $K < H$ を満たすものとし、 X をデファイナブル K 集合とする。このとき、 $\phi: G \times_K X \rightarrow G \times_H (H \times_K X), \phi([g, x]) = [g, [e, x]]$ はデファイナブル G 同相写像である。ただし、 e は G の単位元を表すとする。

定理 3.9 ([4]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とするとき、任意のデファイナブル G 集合の軌道型は、有限である。

定理 2.13 (2) の同変版として、以下が成り立つ。

定理 3.10 (同変部分的デファイナブル自明性 ([4])). G をデファイナブリーコンパクト群、 X をデファイナブル G 集合、 Z をデファイナブル集合とし、 $f: X \rightarrow Z$ を G 不変デファイナブル写像とする。このとき、 Z のデファイナブル集合への有限分割 $\{T_i\}_{i=1}^k$ とデファイナブル G 同相写像 $\phi_i: f^{-1}(T_i) \rightarrow T_i \times f^{-1}(z_i)$ が存在して、 $f|_{f^{-1}(T_i)} = p_i \circ \phi_i$, ($1 \leq i \leq k$) とできる。ただし、 $z_i \in T_i$, $p_i: T_i \times f^{-1}(z_i) \rightarrow T_i$ は射影とする。

定理 3.3 の証明のアイデア。

定理 3.7 を用いて、 X をデファイナブル G CW 複体 C からある開 G セルを除くことによって得られる G 不変デファイナブル部分集合とみなす。 Y を X の開 G セル c で、 $\bar{c} \subset X$ となるもの全体の和集合とする。ただし、 \bar{c} は、 c の C における閉包を表すとする。このとき、 Y は X のデファイナブリーコンパクトデファイナブル G 部分集合である。 X から Y へのデファイナブル強変位 G レトラクションを構成して、証明を終える。

REFERENCES

- [1] A. Berarducci and M. Otero, *Intersection theory for o-minimal manifolds*, Ann. Pure Appl. Logic **107** (2001), 87–119.
- [2] J. Bochnak, M. Coste and M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Erg. der Math. und ihrer Grenz., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1987).
- [3] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [4] T. Kawakami, *A definable strong G retract of a definable G set in a real closed field*, preprint.
- [5] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. No. **54** (2004), 1–15.
- [6] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.
- [7] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.
- [8] M. Shiota, *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.