

Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology

矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

京都工芸繊維大学 工芸科学研究科

(Kyoto Institute of Technology)

非コンパクト多様体の同相群・微分同相群は、二つの典型的な位相を持つ。1つはコンパクト - 開 (C^∞) 位相, もう一つは Whitney (C^∞) 位相である。この論説では、共著論文 [2] において得られた非コンパクト多様体の同相群の Whitney 位相 及び非コンパクト C^∞ 多様体の微分同相群の Whitney C^∞ 位相の局所位相型に関する結果の概要を解説する。

Whitney 位相には Box 積が密接に関連する。まず第 1 節では、この Box 積の基本的な性質を説明する。この準備のもとに、第 2 節、第 3 節において同相群・微分同相群に関する主要結果を概説する。最後の第 4 節では、微分同相群の場合に主要結果の証明に関して概説する。

1. BOX 積 及び SMALL BOX 積

コンパクト - 開位相には、通常の Tychonoff 積が対応するが、Whitney 位相には Box 積が対応する。この節では、Box 積の基本的な性質を説明する。以下では、主に添字集合が非負整数の集合 ω の場合を考える。

定義 1. (1) 位相空間の列 $(X_n)_{n \in \omega}$ に対して、その Box 積 $\square_{n \in \omega} X_n$ は、積 $\prod_{n \in \omega} X_n$ に Box 位相 を与えたものである。ここで、Box 位相は、次の形の部分集合全体を基底とする位相である: $\prod_{n \in \omega} U_n$ (U_n は X_n の開集合)

(2) 基点付き位相空間の列 $(X_n, *_{n})_{n \in \omega}$ に対して、Small Box 積 $(\square_n X_n, (*_{n})_n)$ は 次の形の点全体から成る Box 積 $\square_{n \in \omega} X_n$ の部分空間である:

$$(x_0, x_1, \dots, x_k, *_{k+1}, *_{k+2}, \dots).$$

Small Box 積は、有限積の単調増加列の和として次の様に表す事が出来る:

$$\square_{n \in \omega} X_n = \bigcup_{n \in \omega} \left(\prod_{i \leq n} X_i \right).$$

以下では、Box 積と Small Box 積を組で考える事が多いので、しばしば次のような略記号を用いる: $(\square, \square)_n X_n = (\square_n X_n, \square_n X_n)$, $(\square, \square)^\omega X = (\square, \square)_{n \in \omega} X$.

例 1. 基本的な例は、 l_2 の Box - Small Box 積 $(\square, \square)^\omega l_2$ である。Box 積は、その位相が細かすぎ、 $\square^\omega l_2$ は局所連結でも正規でも無い。一方、P. Mankiewicz [13] による LF 空間

(Fréchet 空間の順極限) の分類に基づいて, $\square^{\omega} l_2 \approx l_2 \times \mathbb{R}^{\infty}$ である事が知られている. 但し, \mathbb{R}^{∞} は, 列 $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$ の順極限を表す.

Small Box 積のパラコンパクト性に関しては, 次が成り立つ [2, Proposition 2.2].

命題 1. 各 $n \in \omega$ に対して $\prod_{i \leq n} X_i$ がパラコンパクトならば, Small Box 積 $\square_{n \in \omega} X_n$ もパラコンパクトになる.

Tychonoff 積の場合と同様に, 連続写像の列 $f^n : X_n \rightarrow Y_n$ ($n \in \omega$) は, Box 積の連続写像

$$\square_n f^n : \square_n X_n \rightarrow \square_n Y_n : (x_n)_n \mapsto (f^n(x_n))_n$$

を定める. また, 基点を保つ連続写像の列 $f^n : (X_n, *_{n}) \rightarrow (Y_n, *_{n})$ ($n \in \omega$) は, $\square_n f^n$ の制限として Small Box 積の写像 $\square_n f^n : \square_n X_n \rightarrow \square_n Y_n$ を定める. 注意が必要なのは, ホモトピーの列の Box 積である. すなわち, 基点を保つホモトピーの列 $f_i^n : (X_n, *_{n}) \rightarrow (Y_n, *_{n})$ ($n \in \omega$) の Small Box 積 $\square_n f_i^n : \square_n X_n \rightarrow \square_n Y_n$ は基点を保つホモトピーを定めるが, Box 積 $\square_n f_i^n : \square_n X_n \rightarrow \square_n Y_n$ 自体は連続ホモトピーとはならない.

次に位相群の Box - Small Box 積について考察する ([2, Section 2]). 位相群の列 $(G_n)_{n \in \omega}$ の Box 積 $\square_n G_n$ は座標ごとの積で自然に位相群になり, Small Box 積 $\square_n (G_n, e_n)$ はその部分位相群になる. 但し, 位相群に対しては, 常に単位元を基点にとる.

G を単位元 e を持つ位相群とし, $(G_n)_{n \in \omega}$ は G の部分群の列で次の条件を満たすとする:

$$G_n \subset G_{n+1} \quad (n \in \omega), \quad G = \bigcup_n G_n.$$

このとき, 積写像 $p : \square_n G_n \rightarrow G$ が次式で定義される:

$$p(x_0, x_1, \dots, x_k, e, e, \dots) = x_0 x_1 \cdots x_k$$

命題 2. 積写像 p は次の性質を持つ:

(1) p は連続全射である.

(2) もし p が (基点 $(e)_n$ で) 開写像ならば, G は位相群の列 $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$ の位相群の圏における順極限になる. (これを記号 $G = \text{g-lim}_n G_n$ で表す.)

(3) もし p が e で局所セクションを持てば, 次が成り立つ:

(i) 各 G_n が局所可縮ならば, G も局所可縮.

(ii) G の部分群 H が次の条件を満たせば, H は G においてホモトピー稠密になる:

各 $n \in \omega$ について $H \cap G_n$ は G_n においてホモトピー稠密で, G はパラコンパクト

ここで, 位相空間 X の部分空間 A が X でホモトピー稠密であるとは, X 上のホモトピー $\varphi_t : X \rightarrow X$ ($0 \leq t \leq 1$) で $\varphi_0 = \text{id}_X$ かつ $\varphi_t(X) \subset A$ ($0 < t \leq 1$) を満たすものが存在することである.

2. WHITNEY 位相を持つ多様体の同相群

この節では, Whitney 位相を持つ非コンパクト多様体の同相群の位相的性質を概説する. M を連結 σ -コンパクト n 次元多様体 (境界を持って良い) とする. $\mathcal{H}(M)$ は M の同相群 (Whitney 位相) を表す. 各 $h \in \mathcal{H}(M)$ は次の形の基本近傍系を持つ:

$$\mathcal{U}(h) = \{g \in \mathcal{H}(M) : (h, g) \prec \mathcal{U}\} \quad (\mathcal{U} \in \text{cov}(M))$$

但し, $\text{cov}(M)$ は M の開被覆全体の族を表す. $\mathcal{H}(M)$ は位相群を成す. $\mathcal{H}(M)_0$ は $\mathcal{H}(M)$ における id_M の連結成分を表し, $\mathcal{H}_c(M)$ はコンパクト台を持つ M の同相写像全体の成す $\mathcal{H}(M)$ の部分群を表す. $\mathcal{H}_c(M)$ の任意のコンパクト部分集合 \mathcal{K} は共通のコンパクト台を持つ, すなわち, M のあるコンパクト部分集合 K があって, 任意の $h \in \mathcal{K}$ に対して $\text{supp } h \subset K$ となる.

M が n 次元 PL 多様体 (境界を持って良い) のときには, M の PL 同相群 $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$, すなわち, M の PL 同相写像全体の成す $\mathcal{H}(M)$ の部分群 を考える事が出来る.

2.1. M がコンパクトの場合.

M がコンパクトの場合, Whitney 位相はコンパクト-開位相と一致し, $\mathcal{H}(M)$ は可分完備距離化可能で局所可縮である ([6], [7]). さらに, 次が予想されている.

同相群予想. $\mathcal{H}(M)$ は l_2 -多様体になる.

この予想は, $\mathcal{H}(M)$ が ANR であるという主張と同値であり ([16]), $n = 1, 2$ のとき成り立つ事が知られているが ([12]), $n \geq 3$ のときは, 未解決のままである.

M がコンパクト n 次元 PL 多様体 のとき, M の PL 同相群 $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$ は l_2^f -多様体になる事が知られている. また, $n = 1, 2$ のときには $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$ は $\mathcal{H}(M)$ においてホモトピー稠密になり, $n \geq 3$ のときには 包含写像 $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)_0 \subset \mathcal{H}(M)_0$ が弱ホモトピー同値である事が知られている ([8]). 同相群予想が肯定的に解決されれば, $n \geq 3$ のときでも $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)_0$ が $\mathcal{H}(M)_0$ においてホモトピー稠密になることがわかる.

2.2. M が非コンパクトの場合.

命題 3. (1) $\mathcal{H}_c(M)$ はパラコンパクトで局所可縮である.

(2) $\mathcal{H}(M)_0$ は $\mathcal{H}_c(M)$ の開正規部分群であり, $\mathcal{H}(M)_0$ は「 $h \in \mathcal{H}(M)$ で id_M とコンパクト台を持つイソトピーで結べるもの全体」と一致する.

(3) 写像類群 $\mathcal{M}_c(M) = \mathcal{H}_c(M)/\mathcal{H}(M)_0$ (離散位相) を考えると, 位相空間として $\mathcal{H}_c(M) \approx \mathcal{H}(M)_0 \times \mathcal{M}_c(M)$ となる.

(4) $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は M のコンパクト部分集合の列で次を満たすとする:

$$M_i \subset \text{Int}_M M_{i+1}, \quad M = \cup_i M_i.$$

$G(M_i) = \{h \in \mathcal{H}_c(M) \mid \text{supp } h \subset M_i\}$ と置くと, 積写像 $p : \prod_i G(M_i) \rightarrow \mathcal{H}_c(M)$ が定まる. このとき p は局所セクションを持つ. 特に $\mathcal{H}_c(M) = \text{g-lim}_i G(M_i)$ となる.

次に, $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}_c(M))$ の局所位相型について考察する. 論文 [1] において $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), \mathcal{H}_c(\mathbb{R})) \approx (\square^\omega, \square^\omega)_{l_2}$ が示されている. 従って, 一般の非コンパクト多様体 M の同相群 $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}_c(M))$ の局所位相型のモデルとして $(\square^\omega, \square^\omega)_{l_2}$ を取るのは自然である. 本論説では, 空間の組の局所同相を次で定義する:

- (1) $(X, A) \approx_\ell (Y, B)$ at $a \in A \iff X$ における点 a の開近傍 U と Y の開集合 V が存在して, $(U, U \cap A) \approx (V, V \cap B)$.
- (2) $(X, A) \approx_\ell (Y, B) \iff$ 各 $a \in A$ に対して $(X, A) \approx_\ell (Y, B)$ at $a \in A$.

予想 1. $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}_c(M)) \approx_\ell (\square^\omega, \square^\omega)_{l_2}$.

定理 1. $n = 1, 2$ のとき予想は成り立つ.

$\square^\omega l_2 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$ だから, $n = 1, 2$ のとき $\mathcal{H}_c(M)$ は, パラコンパクト $(l_2 \times \mathbb{R}^\infty)$ -多様体になる. $n \geq 3$ の場合, 予想は未解決である.

PL 同相群に関しては, 次がわかる.

命題 4. M が n 次元 PL 多様体で $n = 1, 2$ のとき, $\mathcal{H}_c^{\text{PL}}(M)$ は $\mathcal{H}_c(M)$ においてホモトピー稠密になる.

$n = 2$ の場合の $\mathcal{H}_c(M)$ の位相型に関しては, プレプリント [3] において次の結論を得ている.

定理 2. $n = 2$ のとき

- (1) $\mathcal{H}(M)_0 \approx \square^\omega l_2 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$;
- (2) $\mathcal{H}_c(M) \approx \mathcal{H}(M)_0 \times \mathcal{M}_c(M)$, $\mathcal{M}_c(M) \approx \begin{cases} \text{加算離散空間} & (M : \text{一般型}) \\ \text{一点} & (M : \text{例外型}). \end{cases}$

ここで, M が例外型であるとは, M が次の形をしていることを意味する:

$M \approx X - K$, 但し X はアニュラス, 円板 又は メービウスの帯;
 K は X の一つの境界円の空でないコンパクト部分集合.

3. WHITNEY C^∞ 位相をもつ微分同相群

M を連結 σ -コンパクト C^∞ n 次元多様体で境界を持たないとする. $\mathcal{D}(M)$ は M の微分同相群 (Whitney C^∞ -位相) を表す. 各 $h \in \mathcal{D}(M)$ は, 次の形の基本近傍系を持つ:

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}(h, (U_\lambda, x_\lambda), (V_\lambda, y_\lambda), K_\lambda, r_\lambda, \varepsilon_\lambda)$$

但し $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M で局所有限である. コンパクト - 開 C^∞ 位相の場合には, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は有限に取る.

$\mathcal{D}(M)_0$ は $\mathcal{D}(M)$ における id_M の連結成分を表し, $\mathcal{D}_c(M)$ は M のコンパクト台を持つ微分同相写像全体の成す $\mathcal{D}(M)$ の部分群を表す.

3.1. M がコンパクトの場合.

この場合には, Whitney C^∞ 位相はコンパクト - 開 C^∞ 位相と一致し, $\mathcal{D}(M)$ は可分完備距離化可能であり, 滑らかな Fréchet 多様体 (cf. [11, 10]), 従って位相的 l_2 -多様体になることが知られている.

3.2. M が非コンパクトの場合.

定理 3. $(\mathcal{D}(M), \mathcal{D}_c(M)) \approx_\ell (\square^\omega, \square^\omega) l_2$. 特に, $\mathcal{D}_c(M)$ はパラコンパクト $(l_2 \times \mathbb{R}^\infty)$ -多様体になる.

論文 [4] において, $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}_c(\mathbb{R})) \approx (\square^\omega, \square^\omega) l_2$ が示されている.

命題 5. (1) $\mathcal{D}(M)_0$ は $\mathcal{D}_c(M)$ の開正規部分群であり, $\mathcal{D}(M)_0$ は「 $h \in \mathcal{D}(M)$ で id_M とコンパクト台を持つイソトピーで結べるもの全体」と一致する.

(2) 写像類群 $\mathcal{M}_c^\infty(M) = \mathcal{D}_c(M)/\mathcal{D}(M)_0$ (離散位相) を考えると, 位相空間として $\mathcal{D}_c(M) \approx \mathcal{D}(M)_0 \times \mathcal{M}_c^\infty(M)$ となる.

(3) $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は M のコンパクト C^∞ n 次元部分多様体の列で, 次を満たすとする.

$$M_i \subset \text{Int}_M M_{i+1}, \quad M = \cup_i M_i.$$

$G(M_i) = \{h \in \mathcal{D}_c(M) \mid \text{supp } h \subset M_i\}$ と置くと, 積写像 $p: \square_i G(M_i) \rightarrow \mathcal{D}_c(M)$ が定まる. このとき p は局所セクションを持つ. 特に $\mathcal{D}_c(M) = \text{g-lim}_i G(M_i)$ となる.

$\mathcal{D}_c(M)$ の位相型に関しては, プレプリント [5] において次の結論を得ている.

定理 4. (1) $n = 1, 2$ のとき, $\mathcal{D}(M)_0 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$.

(2) $n = 3$ で M が向き付け可能かつ既約 (M 中の任意の球面が M 中で 3 次元球体を囲んでいる) のとき, $\mathcal{D}(M)_0 \approx l_2 \times \mathbb{R}^\infty$.

(3) X が空でない境界を持つコンパクト連結 C^∞ n 次元多様体で $M = \text{Int } X$ のとき, $\mathcal{D}(M)_0 \approx \mathcal{D}(X, \partial X)_0 \times \mathbb{R}^\infty$.

4. 証明のアイデア — 微分同相群の場合

最後に, 主要結果の証明に関して概説する. 第2節, 第3節を見て気付いたと思うが, 主要な結果は, 群 $\mathcal{H}(M)$ と $\mathcal{D}(M)$ に関して並列になっている. 実際, これらは同じ議論から従う結果である. 論文 [2] では, 群 $\mathcal{H}(M)$, $\mathcal{D}(M)$ が M 上の変換群として捉えられることに着目して, すべての議論を M 上の一般の変換群 G に関して定式化し, Whitney 位相に対応する“強位相”に関して, 適当な付加条件の下で証明している. 従って, 第2節, 第3節の結果は, この一般的な結果の特別な場合として得られる事になる. 我々は, この一般的な結果・議論が $\mathcal{H}(M)$, $\mathcal{D}(M)$ の適当な部分群に関しても適応出来る事を期待している (cf. [17]).

以下では、微分同相群 $D(M)$ に関する定理 3 及び命題 5(3) の証明に関して、その要点を述べる。

M を非コンパクト C^∞ n 次元多様体とし境界は持たないとする。記号を簡略化し、さらに変換群への議論の一般化を示唆するため、 $(G, G_c) = (D(M), \mathcal{D}_c(M))$ と置く。 M の部分集合 K, N に対して、次の記号を用いる：

$$G_K = \{g \in G \mid g|_K = \text{id}_K\}, \quad G(N) = G_{M \setminus N}, \quad G_K(N) = G_K \cap G(N), \quad G_{K,c} = G_K \cap G_c.$$

埋め込み空間に関して、 M の C^∞ 部分多様体 L に対して

$$\mathcal{E}^G(L, M) = \{g|_L \mid g \in G\} \quad (\text{コンパクト - 開 } C^\infty \text{ 位相})$$

と置く。包含写像 $i_L : L \subset M$ を基点にとる。

M のコンパクト C^∞ n 次元部分多様体の列 $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ で、 $M_i \subset \text{Int}_M M_{i+1}$, $M = \cup_i M_i$ を満たすものを考える。 $L_i := M_i - \text{Int}_M M_{i-1}$ ($M_0 = \emptyset$) と置く。 $(G(M_i))_i$ は G_c の閉部分群の増加列を定め、積写像 $p : \square_i G(M_i) \rightarrow G_c$ が定まる。

命題 6. (1) $(G, G_c) \approx_\ell (\square, \square)_i \mathcal{E}^G(L_{2i}, M) \times (\square, \square)_i G(L_{2i-1})$ at id_M .

(2) $p : \square_i G(M_i) \rightarrow G_c$ は局所セクションを持つ。

各空間 $\mathcal{E}^G(L_{2i}, M), G(L_{2i-1})$ は l_2 と局所同相だから、定理 3 の結論 $(G, G_c) \approx_\ell (\square, \square)^\omega l_2$ が従う。

命題 6 の証明.

(1) M のコンパクト C^∞ n 次元部分多様体 N_{2i} で L_{2i} の小さな近傍となっているものにとる。列 $\mathcal{L} = (L_{2i})_i$, $\mathcal{K} = (L_{2i-1})_i$, $\mathcal{N} = (N_{2i})_i$ は、 M のコンパクト C^∞ n 次元部分多様体からなる離散列である。 $L = \cup_i L_{2i}$, $K = \cup_i L_{2i-1}$, $N = \cup_i N_{2i}$ と置く。

(2) 写像 $r_{\mathcal{L}}, \lambda_{\mathcal{N}}, \lambda_{\mathcal{K}}$ を次の様に定める：

(i) $r_{\mathcal{L}} : G \rightarrow \square_i \mathcal{E}^G(L_{2i}, M)$, $r_{\mathcal{L}}(g) = (g|_{L_{2i}})_i$.

(ii) $\lambda_{\mathcal{N}} : \square_i G(N_{2i}) \rightarrow G(N)$, $\lambda_{\mathcal{K}} : \square_i G(L_{2i-1}) \rightarrow G(K) = G_L$:

$\lambda_{\mathcal{N}}$ は $g = (g_{2i})_i \in \square_i G(N_{2i})$ に対して $\lambda_{\mathcal{N}}(g) = g_{2i}$ on N_{2i} により定義される。

$\lambda_{\mathcal{K}}$ も同様に定義される。

写像 $\lambda_{\mathcal{N}}, \lambda_{\mathcal{K}}$ は開埋め込みとなる。

(3) 写像 $\eta : \mathcal{V} \rightarrow G(N)$ を次の 3 つの写像の合成として定める：

$$\eta : \mathcal{V} \xrightarrow{r_{\mathcal{L}}|_{\mathcal{V}}} \square_i \mathcal{V}_i \xrightarrow{s} \square_i G(N_{2i}) \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{N}}} G(N).$$

但し、 \mathcal{V} は G における id_M の開近傍で、写像 s と共に次で定義される：

(i) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して、制限写像 $G \rightarrow \mathcal{E}^G(L_{2i}, M)$ は、包含写像 $i_{L_{2i}}$ において局所セクション $s_i : \mathcal{V}_i \rightarrow G(N_{2i})$ で $s_i(i_{L_{2i}}) = \text{id}_M$ となるものを持つ (cf. [10, 14, 15]). 写像 s を次式で定める：

$$s = \square_i s_i : \square_i \mathcal{V}_i \rightarrow \square_i G(N_{2i}), \quad s((f_i)_i) = (s_i(f_i))_i.$$

(ii) \mathcal{V} は, 写像 $r_L : G \rightarrow \square_i \mathcal{E}^G(L_{2i}, M)$ による逆像 $\mathcal{V} = r_L^{-1}(\square_i \mathcal{V}_i)$ として定める.

(4) 写像 φ を次式で定める:

$$\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \square_i \mathcal{V}_i \times G_L, \quad \varphi(g) = (r_L(g), \eta(g)^{-1}g).$$

この写像は well-defined であり, 次の組の同相写像を与える:

$$\varphi : (\mathcal{V}, \mathcal{V} \cap G_c) \approx (\square, \square)_i \mathcal{V}_i \times (G_L, G_{L,c}).$$

(5) 命題 6 (1) の局所同相は, 次の局所同相の合成として得られる:

$$(G, G_c) \xrightarrow{\varphi} (\square, \square)_i \mathcal{E}^G(L_{2i}, M) \times (G_L, G_{L,c}) \xrightarrow{\text{id} \times \lambda_{\mathcal{K}}^{-1}} (\square, \square)_i \mathcal{E}^G(L_{2i}, M) \times (\square, \square)_i G(L_{2i-1})$$

(6) 積写像 p の局所セクションを構成するために, まず次の写像 ρ が局所セクションを持つことを示す:

$$\rho : \square_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times \square_{i \in \mathbb{N}} G(L_{2i-1}) \longrightarrow G_c, \quad \rho((f_i)_{i \in \mathbb{N}}, (g_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \lambda_{\mathcal{N}}((f_i)_{i \in \mathbb{N}}) \lambda_{\mathcal{K}}((g_i)_{i \in \mathbb{N}})$$

写像 ρ は次の分解を持つ:

$$\rho : \square_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times \square_{i \in \mathbb{N}} G_L(L_{2i-1}) \xrightarrow{\text{id} \times \lambda_{\mathcal{K}}} \square_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times G_{L,c} \xrightarrow{\theta} G_c$$

写像 θ は, id_M において次の局所セクションを持つ:

$$\sigma_0 = (s \times \text{id})\varphi : \mathcal{V} \cap G_c \longrightarrow \square_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times G_{L,c}.$$

$\text{id} \times \lambda_{\mathcal{K}}$ は開埋め込みであり, その像は $\sigma_0(\text{id}_M)$ を含むので, $\mathcal{V} \cap G_c$ における id_M の十分小さな近傍 \mathcal{U} を選べば,

$$\sigma = (\text{id} \times \lambda_{\mathcal{K}})^{-1} \sigma_0|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow \square_{i \in \mathbb{N}} G(N_{2i}) \times \square_{i \in \mathbb{N}} G_L(L_{2i-1})$$

は, ρ の id_M における局所セクションを与える.

(7) 局所セクション σ は次の性質を持つ:

$\sigma(h) = ((f_i)_{i \in \mathbb{N}}, (g_i)_{i \in \mathbb{N}})$ ($h \in \mathcal{U}$) と置くととき,

(i) $h = \lambda_{\mathcal{N}}((f_i)_{i \in \mathbb{N}}) \lambda_{\mathcal{K}}((g_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (f_1 f_2 \cdots)(g_1 g_2 \cdots) = f_1 g_1 f_2 g_2 f_3 g_3 \cdots$;

(ii) $f_i \in G(N_{2i}) \subset G(M_{2i+1})$, $g_i \in G(L_{2i-1}) \subset G(M_{2i-1}) \subset G(M_{2i+2})$ ($i \in \mathbb{N}$);

(iii) $(\text{id}_M, \text{id}_M, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots) \in \square_{i \in \mathbb{N}} G(M_i)$, $h = p(\text{id}_M, \text{id}_M, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots)$.

(8) 最後に, 積写像 p の id_M における局所セクション s が次式で定義される:

$$s : \mathcal{U} \longrightarrow \square_{i \in \mathbb{N}} G(M_i), \quad s(h) = (\text{id}_M, \text{id}_M, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots).$$

REFERENCES

- [1] T. Banakh, K. Mine and K. Sakai, *Classifying homeomorphism groups of infinite graphs*, *Topology Appl.* **157** (2009), 108-122.
- [2] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki, *Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology*, *Topology Proceedings*, **37** (2011) 61 - 93 (e-published in April 30, 2010).

- [3] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki, *On homeomorphism groups of non-compact surfaces, endowed with the Whitney topology*, preprint (arXiv:1004.3015).
- [4] T. Banakh and T. Yagasaki, *The diffeomorphism groups of the real line are pairwise bihomeomorphic*, in: Proceedings of "Infinite-Dimensional Analysis and Topology, 2009", Special issue in Topology 48 (2009) 119 - 129.
- [5] T. Banakh and T. Yagasaki, *Diffeomorphism groups of non-compact manifolds endowed with the Whitney C^∞ -topology*, preprint (arXiv:1005.1789).
- [6] A. V. Černavskii, *Local contractibility of the group of homeomorphisms of a manifold*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 79 (121) (1969), 307–356.
- [7] R. D. Edward and R. C. Kirby, *Deformations of spaces imbeddings*, Ann. of Math. 93 (1971), 63–88.
- [8] R. Geoghegan and W. E. Haver, *On the space of piecewise linear homeomorphisms of a manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 145–151.
- [9] I. I. Guran and M. M. Zarichnyi, *The Whitney topology and box products*, Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A. 1984, no.11, 5–7.
- [10] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7:1 (1982), 65–222.
- [11] J. A. Leslie, *On a differential structure for the group of diffeomorphisms*, Topology 6 (1967), 263–271.
- [12] R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. 164 (1972), 275–285.
- [13] P. Mankiewicz, *On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces*, Studia Math. 52 (1974), 109–142.
- [14] R. S. Palais, *Local triviality of the restriction map for embeddings*, Comment. Math. Helv. 34 (1960), 305–312.
- [15] R. T. Seeley, *Extension of C^∞ functions defined in a half space*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 625–626.
- [16] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. 111 (1981), 247–262.
- [17] T. Yagasaki, *Weak extension theorem for measure-preserving homeomorphisms of noncompact manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 61 (2009) 687 - 721.

Tatsuhiko Yagasaki

Graduate School of Science and Technology,
 Kyoto Institute of Technology,
 Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585, Japan
 yagasaki@kit.ac.jp