

三角形要素上の補間誤差定数について

On the interpolation constants over triangular elements

小林健太 (金沢大学 理工研究域)

Kenta Kobayashi (Institute of Science and Engineering, Kanazawa University)

1 概要

補間誤差の見積もりは、近似理論における興味深い研究対象の一つであるが、一方で、有限要素法の誤差評価への応用上も重要である。従って、補間誤差を精度良く評価できる公式を作ることは非常に意味がある。補間誤差を評価するには、ある種のノルム不等式に現れる定数をいかに精密に評価するかが重要となる。この定数を補間誤差定数という。補間誤差定数の評価は、無限次元固有値問題における最大固有値の評価に帰着されるが、我々はこの問題を上手く離散化し、解くべき無限次元固有値問題の解を行列固有値問題の解を用いて評価することにより、効率の良い公式を作成し、かつ証明することに成功した。一般的に、連続問題の解を離散問題の解で近似することはよく行われているが、今回我々が行ったのは単なる近似ではなく、数学的に厳密な評価であるということを強調しておく。

2 主結果

二次元平面上の三角形 T に対し、関数空間 $V^{1,1}(T), V^{1,2}(T), V^2(T)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} V^{1,1}(T) &= \left\{ \varphi \in H^1(T) \mid \int_T \varphi \, dx dy = 0 \right\}, \\ V^{1,2}(T) &= \left\{ \varphi \in H^1(T) \mid \int_{\gamma_k} \varphi \, ds = 0, \quad k = 1, 2, 3 \right\}, \\ V^2(T) &= \left\{ \varphi \in H^2(T) \mid \varphi(p_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \right\}. \end{aligned}$$

ここで、 p_1, p_2, p_3 は T の頂点、 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は T の辺である。このとき、以下の定数 $C_1(T), C_2(T), C_3(T), C_4(T)$ が存在する:

$$\begin{aligned} C_1(T) &= \sup_{\varphi \in V^{1,1}(T) \setminus 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{\|\nabla\varphi\|_{L^2(T)}}, & C_2(T) &= \sup_{\varphi \in V^{1,2}(T) \setminus 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{\|\nabla\varphi\|_{L^2(T)}}, \\ C_3(T) &= \sup_{\varphi \in V^2(T) \setminus 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{|\varphi|_{H^2(T)}}, & C_4(T) &= \sup_{\varphi \in V^2(T) \setminus 0} \frac{\|\nabla\varphi\|_{L^2(T)}}{|\varphi|_{H^2(T)}}. \end{aligned}$$

これらの定数について、我々は以下のような上からの評価を得た:

主定理 三角形 T の三辺の長さを A, B, C , 面積を S とするとき, 以下の不等式が成り立つ:

$$(2.1) \quad C_1(T) < K_1(T) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{28} - \frac{S^4}{A^2 B^2 C^2}},$$

$$(2.2) \quad C_2(T) < K_2(T) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{54} - \frac{S^4}{2A^2 B^2 C^2}},$$

$$(2.3) \quad C_3(T) < K_3(T) = \sqrt{\frac{A^2 B^2 + B^2 C^2 + C^2 A^2}{83} - \frac{1}{24} \left(\frac{A^2 B^2 C^2}{A^2 + B^2 + C^2} + S^2 \right)},$$

$$(2.4) \quad C_4(T) < K_4(T) = \sqrt{\frac{A^2 B^2 C^2}{16S^2} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{30} - \frac{S^2}{5} \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} \right)}.$$

これらの公式は, ほとんどの三角形について, 今までに得られてきたどのような公式と比べても精度が良く, しかも三角形の頂点の座標が与えられれば四則演算と一回の平方根計算だけで値が求まるので, 使い易さという点でも有利である. 我々は, 理論解析と精度保証付き数値計算を併用することにより, これらの公式が**任意の三角形で成立する**ということを証明した.

3 準備

三角形 T に対して $p_1(T), p_2(T), p_3(T)$ を T の頂点とする. また, $\gamma_1(T), \gamma_2(T), \gamma_3(T)$ を T の三辺とする. さらに, ∂T 上の外向き単位法線ベクトルを $n(T)$, ∂T に沿って反時計回りに取った方向ベクトルを $\nu(T)$, ∂T 上の線要素を $ds(T)$ をとする. また, 三角形 T の最小角を $\theta(T)$, 最大角を $\bar{\theta}(T)$ とし, $d(T) = \text{diam}(\tau)$, $\rho(T)$ を T の内接円の直径と定義する. 以降, 混乱の恐れが無い場合には“(T)”は省略する. また, k 次以下の多項式の集合を \mathcal{P}_k とする. $|\cdot|_{H^k(T)}$ は H^k セミノルムを表し,

$$|u|_{H^k(T)}^2 = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial x^j} \right\|_{L^2(T)}^2$$

と定義する. また, 下付きの添え字で偏微分を表すものとする. 三点 $(0, 0), (1, 0), (a, b)$ を頂点とする三角形を $T_{a,b}$ と書く. 我々の提案する公式はスケール不変性があるので,

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \leq 1$$

の範囲の $T_{a,b}$ において公式を証明すれば, 全ての三角形について証明したことになる. 更に, より条件を緩くし

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}, 0 < b \leq 1$$

の範囲で考えれば十分である.

4 補間誤差定数と補間誤差の関係

定数 $C_1(T) \sim C_4(T)$ は様々な補間の誤差評価に用いることができる. その一部の例を以下に示す.

応用例 1 $\varphi \in H^1(T)$ に対して

$$\int_T \Pi^{(P_0)} \varphi ds = \int_T \varphi ds, \quad \Pi^{(P_0)} \varphi \in \mathcal{P}_0,$$

となるように \mathcal{P}_0 補間を定めると,

$$\|\Pi^{(P_0)} \varphi - \varphi\|_{L^2(T)} \leq C_1(T) \|\nabla \varphi\|_{L^2(T)}$$

が成り立つ.

応用例 2 $\varphi \in H^2(T)$ に対して

$$\Pi^{(P_1)} \varphi(p_k) = \varphi(p_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad \Pi^{(P_1)} \varphi \in \mathcal{P}_1,$$

となるように \mathcal{P}_1 補間を定めると,

$$\|\Pi^{(P_1)} \varphi - \varphi\|_{L^2(T)} \leq C_3(T) |\varphi|_{H^2(T)}$$

および

$$\|\nabla(\Pi^{(P_1)} \varphi - \varphi)\|_{L^2(T)} \leq C_4(T) |\varphi|_{H^2(T)}$$

が成り立つ.

応用例 3 $\varphi \in H^2(T)$ に対する M. Crouzeix and P. A. Raviart 型補間 [10, 30]

$$\int_{\gamma_k} \Pi^{(CR)} \varphi ds = \int_{\gamma_k} \varphi ds, \quad k = 1, 2, 3, \quad \Pi^{(CR)} \varphi \in \mathcal{P}_1,$$

について

$$\|\Pi^{(CR)} \varphi - \varphi\|_{L^2(T)} \leq C_1(T) C_2(T) |\varphi|_{H^2(T)}$$

が成り立つ.

応用例 4 $\varphi \in H^3(T)$ に対する Morley 型補間 [23]

$$\begin{aligned} \Pi^{(M)} \varphi(p_k) &= \varphi(p_k), \quad k = 1, 2, 3, \\ \int_{\gamma_k} \nabla \Pi^{(M)} \varphi \cdot n ds &= \int_{\gamma_k} \nabla \varphi \cdot n ds, \quad k = 1, 2, 3, \quad \Pi^{(M)} \varphi \in \mathcal{P}_2, \end{aligned}$$

について

$$\|\nabla(\Pi^{(M)} \varphi - \varphi)\|_{L^2(T)} \leq C_1(T) C_2(T) |\varphi|_{H^3(T)}$$

が成り立つ.

5 有限要素法への応用

補間誤差定数は、有限要素法における有限要素解の誤差評価に応用することができる。誤差評価には大きく分けて、事前に与えられたデータのみを用いて数値解の精度を評価する事前誤差評価と、得られた数値解の情報を利用してその解の精度を評価する事後誤差評価があるが、ここでは事前誤差評価の最も簡単な場合である、Poisson 方程式の斉次 Dirichlet 問題に対する応用例を紹介するにとどめる。補間誤差定数の有限要素法への応用については多くの文献がある。事前誤差評価については [2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 16, 19, 20, 24] を、事後誤差評価については [1, 7, 11, 12, 15, 20] 等を参考にするとよい。

Ω を二次元の有界で凸な折線領域とする。このとき、Poisson 方程式の斉次 Dirichlet 問題を考える。すなわち、与えられた f に対して

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\Delta\varphi = f & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

なる φ を求める問題を考える。この方程式を弱定式化すると

$$(5.2) \quad (\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

となる。

Ω を三角形領域に分割し、それぞれの三角形を $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ とする。さらに、 Ω 内部の節点を p_1, p_2, \dots, p_m とする。このとき、各 τ_k 上で一次関数となり、 Ω で連続、かつ $\partial\Omega$ 上で零となるような区分一次関数の全体を S_h とする。さて、 S_h の基底関数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \in S_h$ を

$$\varphi_j(p_k) = \begin{cases} 1 & k = j, \\ 0 & k \neq j, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

となるようなものとする。このとき、有限要素解

$$\varphi_h = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j \in S_h$$

を (5.2) にならって

$$(\nabla\varphi_h, \nabla\varphi_j)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

を満たすように決める。このとき、以下の誤差評価が成り立つ。

定理 5.1 $f \in L^2(\Omega)$ とするとき、(5.1) の厳密解 φ と有限要素解 φ_h について

$$\begin{aligned} \|\nabla(\varphi_h - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \max_{1 \leq k \leq n} C_4(\tau_k) \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(\Omega)} &\leq \max_{1 \leq k \leq n} C_4(\tau_k)^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 φ に対し, φ の補間関数 $\varphi_h^* \in S_h$ を

$$\varphi_h^*(x, y) = \Pi_{\tau_k}^{(P_1)} \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \tau_k$$

で定める. ただし, $\Pi_{\tau_k}^{(P_1)} \varphi$ は φ の τ_k 上の P_1 補間関数を表す.

このとき, 有限要素解 φ_h は $H_0^1(\Omega)$ 空間における最良近似となるので [7, 9]

$$\|\nabla(\varphi_h - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \min_{w \in S_h} \|\nabla(w - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(\varphi_h^* - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ. さて, Ω が有界で凸な折線領域の場合には, (5.1) の解 φ は $H^2(\Omega)$ に属することが知られているので [13], 前章で述べた P_1 補間に対する誤差評価を用いると

$$\begin{aligned} \|\nabla(\varphi_h - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla(\varphi_h^* - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \|\nabla(\varphi_h^* - \varphi)\|_{L^2(\tau_k)}^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n C_4(\tau_k)^2 |\varphi|_{H^2(\tau_k)}^2} \leq \max_{1 \leq k \leq n} C_4(\tau_k) \sqrt{\sum_{k=1}^n |\varphi|_{H^2(\tau_k)}^2} \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} C_4(\tau_k) |\varphi|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

が得られ, Ω が有界な折線領域の場合には

$$|\varphi|_{H^2} \leq \|\Delta\varphi\|_{L^2}$$

が成り立つことも知られているので [13, 17], 事前誤差評価

$$\|\nabla(\varphi_h - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max_{1 \leq k \leq n} C_4(\tau_k) |\varphi|_{H^2(\Omega)} \leq \max_{1 \leq k \leq n} C_4(\tau_k) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

が得られる. さらに, Aubin-Nitsche の技巧 [4, 9, 26] を用いることにより L^2 評価

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \max_{1 \leq k \leq n} C_4(\tau_k)^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

も得られる. □

6 先行研究

適合有限要素法との関連から, 特に $C_4(T)$ の挙動について多くの研究が行われてきた. ここで, 凸で有界な折線領域 Ω のある三角形分割 \mathcal{F} に対し, 三角形要素 τ が \mathcal{F} に属することを $\tau \in \mathcal{F}$ と表す. また

$$\underline{\theta}_{\mathcal{F}} = \min_{\tau \in \mathcal{F}} \underline{\theta}(\tau), \quad \bar{\theta}_{\mathcal{F}} = \max_{\tau \in \mathcal{F}} \bar{\theta}(\tau),$$

と定義する. さらに

$$h_{\mathcal{F}} = \max_{\tau \in \mathcal{F}} d(\tau),$$

とする。さて、三角形分割の族を $\{\mathcal{F}_j\}$ とし、 $h_{\mathcal{F}_j} \rightarrow 0$ が成り立つとき、 $\{\mathcal{F}_j\}$ にどのような条件を課せば有限要素解 φ_h の厳密解 φ への収束が保証されるか、という問題が有限要素法発展の初期から興味の対象となっていた。

この問題に対し、Zlámal[31] は最小角条件を示した。すなわち、 $\varepsilon > 0$ に対して ε のみに依存する定数 C_ε が存在し、 $\theta(T) \geq \varepsilon$ を満たすような全ての三角形 T に対して

$$(6.1) \quad C_4(T) \leq C_\varepsilon d(T)$$

が成立することを示した。この事実を用いると、三角形分割の族 $\{\mathcal{F}_j\}$ が

$$(6.2) \quad \liminf_j \theta_{\mathcal{F}_j} > 0$$

を満たすならば、定理 5.1 より

$$\|\nabla(\varphi_h - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} = O(h_{\mathcal{F}_j}), \quad \|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(\Omega)} = O(h_{\mathcal{F}_j}^2)$$

なる収束が保証されることがわかる。ここで (6.2) を満たすような三角形分割を正則であると言う。

その後、Arcangeli & Gout[3] は、最小角条件 (6.1) を表す以下の具体的な評価を得た。すなわち

$$(6.3) \quad C_4(T) \leq \frac{3d(T)^2}{\rho(T)}$$

が成り立つことを示した。彼らはさらに $C_3(T)$ に対しても

$$(6.4) \quad C_3(T) \leq 3d(T)^2$$

なる評価を示している。

その後、Babuška & Aziz[5] は、角度に関する条件は最大角条件にまで緩められることを示した。すなわち、 $\eta < \pi$ に対して η のみに依存する定数 C_η が存在し、 $\bar{\theta}(T) \leq \eta$ を満たすような全ての三角形 T に対して

$$C_4(T) \leq C_\eta d(T)$$

が成立することを示した。この事実を用いると、三角形分割の族 $\{\mathcal{F}_j\}$ が

$$\limsup_j \bar{\theta}_{\mathcal{F}_j} < \pi$$

を満たせば、

$$\|\nabla(\varphi_h - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} = O(h_{\mathcal{F}_j}), \quad \|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(\Omega)} = O(h_{\mathcal{F}_j}^2)$$

なる収束が保証される。

Meinguet & Descloux[21] は Arcangeli & Gout[3] の結果を改良し、理論的に

$$(6.5) \quad C_4(T) \leq \frac{1.21d(T)^2}{\rho(T)}$$

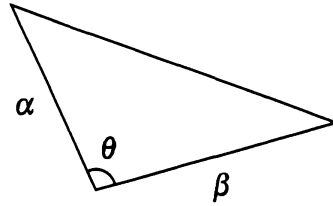


図 1: α, β and θ for triangle T

を示した.

Natterer[25] は, Affine 変換を用いることにより, 一般の三角形に対する $C_4(T)$ の値は, 三辺の長さが $1, 1, \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形 $T_{0,1}$ についての値 $C_4(T_{0,1})$ を用いて

$$(6.6) \quad C_4(T) \leq C_4(T_{0,1}) \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}}{\sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4})}}$$

と押さえられることを示し, さらに $C_4(T_{0,1}) \leq 0.81$ を示した. ここで, α, β, θ は図 1 のように, T の二辺の長さとその二辺に挟まれる角の角度である. ただし, α, β としては, 一番短い辺と二番目に短い辺を採用する.

その後, Arbenz[2] は数値計算により

$$C_4(T_{0,1}) \approx 0.4888$$

を示した.

Nakao & Yamamoto[24] は, 精度保証付き数値計算を用いることにより, 離散化誤差や丸め誤差を全て厳密に考慮した上で

$$C_4(T_{0,1}) \leq 0.4939$$

を示した.

さらに, Kikuchi & Liu[14] は, $C_4(T_{0,1})$ が μ に関する超越方程式:

$$\frac{1}{\mu} + \tan \frac{1}{\mu} = 0$$

の最大の正値解で押さえられることを証明し

$$(6.7) \quad C_4(T_{0,1}) \leq 0.49293$$

を示した. さらに Liu & Kikuchi[20] は, 一般の三角形 T について

$$(6.8) \quad C_4(T) \leq C_4(T_{0,1}) \cdot \frac{1 + |\cos \theta|}{\sin \theta} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}}{2}}$$

が成り立つことを示した.

最大角条件 [5] によれば, β と θ を固定して $\alpha \rightarrow 0$ とすると $C_4(T)$ は有界に留まることが期待できるが, (6.6) の右辺は発散する. 一方で (6.8) の右辺は一定の値に収束する.

$C_1(T)$ については, Payne & Weinberger[27]により

$$C_1(T) \leq \frac{d(T)}{\pi}$$

が示されている. この結果は, Laugesen & Siudeja[18]により

$$(6.9) \quad C_1(T) \leq \frac{d(T)}{j_{1,1}}$$

と改良された. ここで, $j_{1,1} = 3.83170597\dots$ は, Bessel 関数 J_1 の一つ目の正根である. また, 一方で Kikuchi & Liu[14]により

$$C_1(T_{0,1}) = \frac{1}{\pi}$$

が証明され, さらに

$$(6.10) \quad C_1(T) \leq C_1(T_{0,1})\sqrt{1 + |\cos \theta|} \max(\alpha, \beta)$$

が与えられている.

$C_2(T)$ については特に先行研究は見当たらないようだが, $C_2(T)$ は, Babuška & Aziz が [5, Lemma 2.1] で存在を証明した, いわゆる Babuška Aziz constant で上から押さえられることが容易にわかり, さらに Liu & Kikuchi[20]により与えられた Babuška Aziz constant の評価により

$$(6.11) \quad C_2(T) \leq 0.34856\sqrt{1 + |\cos \theta|} \max(\alpha, \beta)$$

が得られている.

先行研究の結果と我々が提案する公式の比較は 12 章で行うが, 一部のケースを除いて我々の公式の方が既存の結果より精密な結果を与えることがわかる.

7 証明の準備

主定理の証明の概略を述べる前に, さらに少し準備をしておく. 三角形 τ について二種類の二次補間 $\Pi_\tau^{(\alpha)}$ および $\Pi_\tau^{(\beta)}$ を定義する. まず, τ の頂点を p_1, p_2, p_3 とし, 辺を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とする. さらに

$$Q_\alpha = \left\{ a_1(x^2 + y^2) + a_2x + a_3y + a_4 \mid a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$Q_\beta = \left\{ a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 \mid a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R} \right\},$$

とする. さて, $\varphi \in H^1(\tau)$ に対して補間 $\Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi$ を, $\varphi \in H^2(\tau)$ に対して補間 $\Pi_\tau^{(\beta)}\varphi$ をそれぞれ以下のように定める.

$$\begin{cases} \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi \in Q_\alpha \\ \int_{\gamma_k} \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi ds = \int_{\gamma_k} \varphi ds, & k = 1, 2, 3, \\ \iint_\tau \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi dxdy = \iint_\tau \varphi dxdy, \\ \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi \in Q_\beta \\ \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi(p_k) = u(p_k), & k = 1, 2, 3, \\ \int_{\gamma_k} \nabla \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi \cdot n ds = \int_{\gamma_k} \nabla \varphi \cdot n ds, & k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

ここで, ds は辺上の線要素, n は外向き単位法線ベクトルとする. 自由度の数と拘束条件の数が等しいので, この補間は一意に定まる. このとき, $\Pi_\tau^{(\alpha)}$ および $\Pi_\tau^{(\beta)}$ は, ある意味での直交射影となり, 以下の二式が成り立つ:

$$(7.1) \quad \|\nabla \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi\|_{L^2(\tau)}^2 + \|\nabla(\varphi - \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi)\|_{L^2(\tau)}^2 = \|\nabla\varphi\|_{L^2(\tau)}^2,$$

$$(7.2) \quad |\Pi_\tau^{(\beta)}\varphi|_{H^2(\tau)}^2 + |\varphi - \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi|_{H^2(\tau)}^2 = |\varphi|_{H^2(\tau)}^2.$$

この二式は Gauss の発散定理を用いて示すことができる.

8 証明の概略

三角形 T を図 2 のように n^2 個の相似な小三角形 $\tau_1, \dots, \tau_{n^2}$ に分割する. ただし τ_k は開集合とし, 境界は含めないものとする. さらに

$$T' = \bigcup_{k=1}^{n^2} \tau_k$$

と置く. ここで, $u \in V^{1,1}(T)$ もしくは $u \in V^{1,2}(T)$ に対して $\Pi^{(\alpha)}u$ を, $u \in V^2(T)$ に対して $\Pi^{(\beta)}u$ を以下のように定める:

$$\Pi^{(\alpha)}u(x, y) = \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u(x, y), \quad k = \min\{j \mid (x, y) \in \bar{\tau}_j\},$$

$$\Pi^{(\beta)}u(x, y) = \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u(x, y), \quad k = \min\{j \mid (x, y) \in \bar{\tau}_j\}.$$

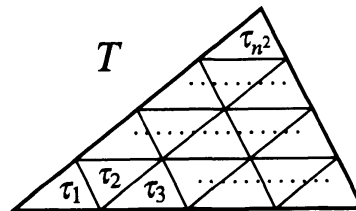


図 2: 相似な n^2 個の小三角形への分割

ここで、 $\Pi^{(\alpha)}u$ および $\Pi^{(\beta)}u$ は T 上で連続とは限らないことに注意する。
さて、有限次元固有値問題を解くことにより

$$\begin{aligned} D_1^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^{1,1}(T) \setminus 0} \frac{\|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}{\|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}, & D_2^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^{1,2}(T) \setminus 0} \frac{\|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}{\|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}, \\ D_3^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^2(T) \setminus 0} \frac{\|\Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')}^2}{|\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')}^2}, & D_4^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^2(T) \setminus 0} \frac{\|\nabla \Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')}^2}{|\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')}^2}, \end{aligned}$$

を満たす $D_1^{(n)}(T), D_2^{(n)}(T), D_3^{(n)}(T), D_4^{(n)}(T)$ を求めることができる。このとき (7.1) を用いると、 $u \in V^{1,j}(T)$, $j = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(T)}^2 &\leq \left(\|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} + \|u - \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} \right)^2 \\ &= \left(\|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \|u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u\|_{L^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{D_j^{(n)}(T)} \|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} + \frac{C_j(T)}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u)\|_{L^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left(D_j^{(n)}(T) + \frac{C_1(T)^2}{n^2} \right) \left(\|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2 + \sum_{k=1}^{n^2} \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u)\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right) \\ &= \left(D_j^{(n)}(T) + \frac{C_1(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \left(\|\nabla \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u\|_{L^2(\tau_k)}^2 + \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u)\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right) \\ &= \left(D_j^{(n)}(T) + \frac{C_j(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \|\nabla u\|_{L^2(\tau_k)}^2 \\ &= \left(D_j^{(n)}(T) + \frac{C_j(T)^2}{n^2} \right) \|\nabla u\|_{L^2(T)}^2, \end{aligned}$$

また、(7.2) を用いると $u \in V^2(T)$ に対して

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(T)}^2 &\leq \left(\|\Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')} + \|u - \Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')} \right)^2 \\ &= \left(\|\Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \|u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u\|_{L^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{D_3^{(n)}(T)} |\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')} + \frac{C_3(T)}{n^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u|_{H^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left(D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) \left(|\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')}^2 + \sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \left(|\Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 + |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \\
&= \left(D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) \sum_{k=1}^{n^2} |u|_{H^2(\tau_k)}^2 \\
&= \left(D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) |u|_{H^2(T)}^2,
\end{aligned}$$

$u \in V^2(T)$ に対して

$$(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_x, (u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_y \in V^{1,2}(\tau_k)$$

であることと (7.2) を用いると

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2(T)}^2 &\leq \left(\|\nabla \Pi^{(\beta)} u\|_{L^2(T')} + \|\nabla(u - \Pi^{(\beta)} u)\|_{L^2(T')} \right)^2 \\
&= \left(\|\nabla \Pi^{(\beta)} u\|_{L^2(T')} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \left(\|(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_x\|_{L^2(\tau_k)}^2 + \|(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_y\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right)} \right)^2 \\
&\leq \left(\sqrt{D_4^{(n)}(T)} |\Pi^{(\beta)} u|_{H^2(T')}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_2(T)}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \left(\|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_x\|_{L^2(\tau_k)}^2 + \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_y\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right)} \right)^2 \\
&= \left(\sqrt{D_4^{(n)}(T)} |\Pi^{(\beta)} u|_{H^2(T')}^2 + \frac{C_2(T)}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\
&\leq \left(D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) \left(|\Pi^{(\beta)} u|_{H^2(T')}^2 + \sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \\
&= \left(D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \left(|\Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 + |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \\
&= \left(D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} |u|_{H^2(\tau_k)}^2 \\
&= \left(D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) |u|_{H^2(T)}^2,
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}
C_1(T)^2 &\leq D_1^{(n)}(T) + \frac{C_1(T)^2}{n^2}, & C_2(T)^2 &\leq D_2^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2}, \\
C_3(T)^2 &\leq D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4}, & C_4(T)^2 &\leq D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2},
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} C_1(T)^2 &\leq \frac{n^2}{n^2-1} D_1^{(n)}(T), & C_2(T)^2 &\leq \frac{n^2}{n^2-1} D_2^{(n)}(T), \\ C_3(T)^2 &\leq \frac{n^4}{n^4-1} D_3^{(n)}(T), & C_4(T)^2 &\leq D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2}, \end{aligned}$$

が得られる。以上により、無限次元固有値問題の解を、有限次元一般化固有値問題の解を用いて評価することができる。これにより、与えられた三角形について公式(2.1)~(2.4)の成立を示すことができる。

9 INTLABによる精度保証付き数値計算

本章では、前章で述べた有限次元一般化固有値問題の固有値を上から評価する方法について述べる。具体的には、実対称行列 A および実対称正定値行列 B に対し、

$$\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T B x}$$

の上界を厳密に評価することができればよい。ここで、

$$\lambda' > \lambda \iff B - \lambda' A \text{ は正定値行列}$$

であるから、結局、与えられた実数が有限次元一般化固有値問題の固有値の上界になることを示すには、実対称行列の正定値性を示せばよいことになる。実際の正定値性の検証には精度保証付き数値計算を用いる。精度保証付き数値計算とは、数値計算において生じる打ち切り誤差や丸め誤差等を厳密に評価することによって、計算機を用いながら数学的に厳密な結果を得る手法全般を言い、近年、様々な問題に応用されている。精度保証付き数値計算においては区間演算が本質的な役割を果たす。区間とは、実数上の閉区間

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

のことで、二つの区間 X および Y の間の演算 $*$ は

$$X * Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}$$

と定義される。ここで $*$ は $+$, $-$, \cdot , $/$ のうちの一つである。実際の計算では、区間の上限と下限は、浮動小数点の丸め誤差を評価して厳密に演算結果を包み込むように計算される。計算機上で精度保証付き数値計算を実現するには様々な方法があるが、ここでは可搬性やプログラミングの容易さを考慮し、ハンブルク工科大学の Rump 氏によって開発された INTLAB を用いた。INTLAB は MATLAB の toolbox として開発されており、MATLAB に追加してインストールすることにより精度保証付き数値計算を実現することができる。INTLAB による精度保証付き数値計算および区間演算については [22, 29] が詳しい。INTLAB において与えられた行列の正定値性を検証するには、関数 `isspd()` を用いる。各成分が区間で与えられている対称な区間行列

$$A = \left(\left[\overline{a_{ij}}, \underline{a_{ij}} \right] \right) = \left\{ Y = (y_{ij}) \mid y_{ij} \in \left[\overline{a_{ij}}, \underline{a_{ij}} \right], y_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

について、`isspd(A)=1` であれば、 A に含まれる全ての実対称行列は正定値であることが厳密に検証されたことになる。正定値であることが検証できなかった場合には `isspd(A)=0` となる。関数 `isspd()` の内部で用いられているアルゴリズムについては [28] を参照のこと。

10 全ての三角形についての証明

前章までの結果により、与えられた三角形については定数の上界を検証することが可能になった。ここで、以下の補題 10.1~10.5 を用いることにより、有限個の三角形に対する検証結果を用いて、 $T_{a,b}$ ($0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, $0 < b \leq 1$) の範囲にある全ての三角形について (2.1)~(2.4) の成立を示すことができる。

補題 10.1 $\lambda > 0$ を a に依存しない定数とし、

$$0 \leq a_1 \leq a \leq a_2 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < b \leq 1, \quad h_a = \frac{a_2 - a_1}{b}, \quad 0 < h_a \leq \frac{1}{20},$$

$$\sigma_{1a} = \sigma_{2a} = \frac{5}{4}, \quad \sigma_{3a} = \frac{9}{4}, \quad \sigma_{4a} = \frac{13}{4}$$

とするとき、 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$C_j(T_{a_k, b}) \leq \sqrt{\lambda(1 - \sigma_{ja} h_a^2)} K_j(a_k, b), \quad k = 1, 2 \quad \Longrightarrow \quad C_j(T_{a, b}) \leq \lambda K_j(a, b)$$

が成り立つ。

補題 10.2

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < b_1 \leq b \leq b_2 \leq 1, \quad h_b = \frac{b_2 - b_1}{b_1}, \quad 0 < h_b \leq \frac{1}{20},$$

$$\sigma_{1b} = \sigma_{2b} = \frac{5}{4}, \quad \sigma_{3b} = \frac{19}{4}, \quad \sigma_{4b} = \frac{19}{4}$$

とするとき、 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$C_j(T_{a, b_k}) \leq \sqrt{(1 - \sigma_{jb} h_b^2)} K_j(a, b_k), \quad k = 1, 2 \quad \Longrightarrow \quad C_j(T_{a, b}) \leq K_j(a, b)$$

が成り立つ。

補題 10.3 $0 < b_1 \leq b_2$ の関係があるとき、 $j = 1, 2, 3$ に対して

$$C_j(T_{a, b_1}) \leq C_j(T_{a, b_2})$$

が成り立つ。

補題 10.4

$$0 \leq a \leq 1/2, \quad 0 < b_1 \leq b_2, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{4}{3}, \quad \kappa_3 = \frac{5}{3}$$

の関係があるとき、 $j = 1, 2, 3$ に対して

$$\sqrt{(1 - \kappa_j b_2^2)} K_j(a, b_2) \leq K_j(a, b_1)$$

が成り立つ。

補題 10.5

$$0 \leq a \leq 1/2, \quad 0 < b \leq 1/10$$

のとき、

$$C_4(T_{a, b}) < K_4(T_{a, b})$$

が成り立つ。

11 数値計算結果

得られた公式の精度を確認するため, $C_1(T), C_2(T), C_3(T), C_4(T)$ の十分精度の良い近似解として

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1(T) &= \sqrt{D_1^{(100)}(T)}, & \tilde{C}_2(T) &= \sqrt{D_2^{(100)}(T)}, \\ \tilde{C}_3(T) &= \sqrt{D_3^{(100)}(T)}, & \tilde{C}_4(T) &= \sqrt{D_4^{(100)}(T)}\end{aligned}$$

を求め, 公式と比較した. 結果を下の図に示す. ここで, 三角形 T は $(0,0), (1,0), (a,b)$ の三点を頂点に持つものとする. 我々の公式はスケール不変性を持つので, $0 \leq a \leq 0.5$, $0 < b \leq 1$ の範囲で成り立てば, 全ての三角形で成り立つことが言える. 図3, 図5, 図7, 図9のゼロに近いグラフが近似解と我々の公式との誤差である (グラフは $0.05 \leq b \leq 1$ の範囲を表示していることに注意). 我々の公式が, 理論値の良い上界になっていることがわかる.

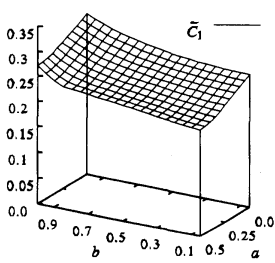


図 3: $\tilde{C}_1(T)$

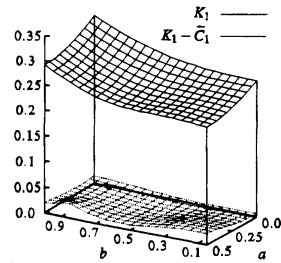


図 4: K_1 および
 $K_1(T) - \tilde{C}_1(T)$

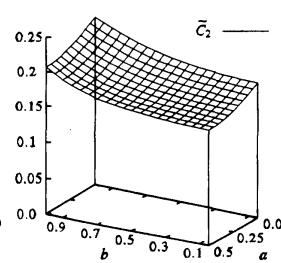


図 5: $\tilde{C}_2(T)$

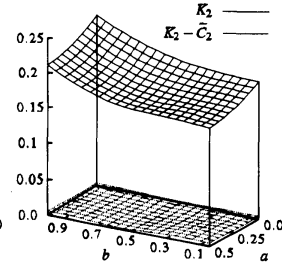


図 6: K_2 および
 $K_2(T) - \tilde{C}_2(T)$

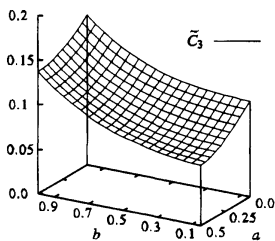


図 7: $\tilde{C}_3(T)$

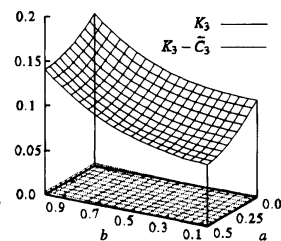


図 8: K_3 および
 $K_3(T) - \tilde{C}_3(T)$

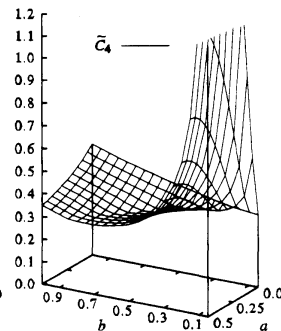


図 9: $\tilde{C}_4(T)$

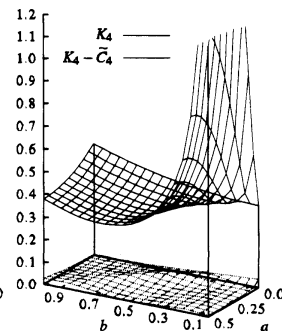


図 10: K_4 および
 $K_4(T) - \tilde{C}_4(T)$

12 既存の公式および理論値との比較

この章では、我々の公式と既存の公式、および理論値との比較を行う。ただし、理論値は厳密には求まらないので、比較には近似値

$$\tilde{C}_j(T) = \sqrt{D_j^{(100)}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

を用いた。

まずは $C_1(T)$ について、Laugesen & Siudeja の公式 (6.9)

$$C_1(T) \leq \frac{d(T)}{j_{1,1}}, \quad j_{1,1} = 3.83170597 \dots$$

および Kikuchi & Liu の公式 (6.10)

$$C_1(T) \leq \frac{\sqrt{1 + |\cos \theta|}}{\pi} \max(\alpha, \beta)$$

と我々の公式および理論値を比較した。6章でも述べたように、 $a = 0, b = 1$ および $a = 0.5, b = 0.5$ の時には、Kikuchi & Liu の公式が厳密値を与える。彼らの公式は、 $a = 1/2$ かつ $b \leq 1/2$ のときには比較的良い評価を与えるが、その他の場合は、 $a = 0, b = 1$ の時を除くとそれほど精度は良くない。Laugesen & Siudeja の公式は、 $a = 0$ かつ b が小さいときを除くと精度があまり良くない。それに対して我々の公式は全ての a, b でバランス良く、良い値を返している (表 12.1)。

表 12.1: $C_1(T)$ の各種公式の比較

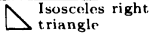


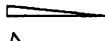



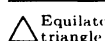




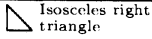


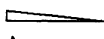



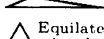




a	b	Shape	Formula by Laugesen & Siudeja	Formula by Kikuchi & Liu	Our formula $K_1(T)$	Approximate value $\tilde{C}_1(T)$
0.0	1.0	 Isosceles right triangle	0.3690820	0.3183099	0.3340766	0.3183237
0.0	0.5		0.2917849	0.3183099	0.2771024	0.2718151
0.0	0.2		0.2661488	0.3183099	0.2681079	0.2627133
0.0	0.1		0.2622820	0.3183099	0.2674398	0.2614228
0.25	1.0		0.3262254	0.3657371	0.3030136	0.2886830
0.25	0.5		0.2609804	0.3041947	0.2459842	0.2415978
0.25	0.2		0.2609804	0.3118964	0.2434617	0.2307315
0.25	0.1		0.2609804	0.3294606	0.2420732	0.2286001
0.5	$\sqrt{3}/2$	 Equilateral triangle	0.2609804	0.3898484	0.2683032	0.2387411
0.5	0.5	 Isosceles right triangle	0.2609804	0.2250791	0.2362278	0.2250883
0.5	0.2		0.2609804	0.2250791	0.2350309	0.2122753
0.5	0.1		0.2609804	0.2250791	0.2327945	0.2091927

表 12.2: $C_2(T)$ の各種公式の比較

a	b	Shape	Formula by Liu & Kikuchi	Our formula $K_2(T)$	Approximate value $\tilde{C}_2(T)$
0.0	1.0	 Isosceles right triangle	0.3485600	0.2417624	0.2377095
0.0	0.5		0.3485600	0.2001157	0.1981488
0.0	0.2		0.3485600	0.1931750	0.1900358
0.0	0.1		0.3485600	0.1926084	0.1889908
0.25	1.0		0.4464274	0.2197865	0.2159892
0.25	0.5		0.3531579	0.1779313	0.1767151
0.25	0.2		0.4311413	0.1753979	0.1705350
0.25	0.1		0.4935107	0.1743206	0.1696732
0.5	$\sqrt{3}/2$	 Equilateral triangle	0.5228400	0.1948780	0.1891821
0.5	0.5	 Isosceles right triangle	0.2464691	0.1709519	0.1680860
0.5	0.2		0.3236298	0.1693066	0.1632328
0.5	0.1		0.3417912	0.1676363	0.1625242

$C_2(T)$ については, Liu & Kikuchi による評価 (6.11)

$$C_2(T) \leq 0.34856\sqrt{1 + |\cos \theta|} \max(\alpha, \beta)$$

および我々の公式と理論値の比較を行った. 我々の公式が非常に良い評価を与えていることがわかる (表 12.2).

$C_3(T)$ については, Arcangeli & Gout による評価 (6.4)

$$C_3(T) \leq 3d(T)^2$$

および理論値との比較を行っているが, Arcangeli & Gout の評価が著しく悪いのに対して我々の公式は理論値に近い上界を与えていることがわかる (表 12.3).

C_4 については, Natterer の公式 (6.6) に Kikuchi & Liu の結果 (6.7) を適用したもの

$$C_4(T) \leq 0.49293 \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}}{\sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4})}}$$

および, Liu & Kikuchi の公式 (6.8)

$$C_4(T) \leq 0.49293 \cdot \frac{1 + |\cos \theta|}{\sin \theta} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}}{2}}$$

および理論値との比較を行った. Meinguet & Descloux による結果 (6.5) はこれらの公式よりも遥かに悪いので, 表には載せていない. この結果を見ると, 我々の公式が常に良い評価を与えることがわかる.

表 12.3: $C_3(T)$ の各種公式の比較

























a	b	Shape	Formula by Arcangeli & Gout	Our formula $K_3(T)$	Approximate value $\tilde{C}_3(T)$
0.0	1.0	 Isosceles right triangle	6.0000000	0.1702673	0.1672660
0.0	0.5		3.7500000	0.1184266	0.1173769
0.0	0.2		3.1200000	0.1107396	0.1091112
0.0	0.1		3.0300000	0.1099925	0.1081897
0.25	1.0		4.6875000	0.1487598	0.1456476
0.25	0.5		3.0000000	0.0950295	0.0941278
0.25	0.2		3.0000000	0.0855112	0.0842948
0.25	0.1		3.0000000	0.0843544	0.0829564
0.5	$\sqrt{3}/2$	 Equilateral triangle	3.0000000	0.1201798	0.1170933
0.5	0.5	 Isosceles right triangle	3.0000000	0.0851337	0.0836330
0.5	0.2		3.0000000	0.0732578	0.0717102
0.5	0.1		3.0000000	0.0715701	0.0699084

表 12.4: $C_4(T)$ の各種公式の比較

a	b	Shape	Natterer's formula (with Kikuchi & Liu's result)	Formula by Kikuchi & Liu	Our formula $K_4(T)$	Approximate value $\tilde{C}_4(T)$
0.0	1.0	 Isosceles right triangle	0.4929300	0.4929300	0.4915960	0.4887233
0.0	0.5		0.9858600	0.4929300	0.3958114	0.3807491
0.0	0.2		2.4646500	0.4929300	0.3697886	0.3365897
0.0	0.1		4.9293000	0.4929300	0.3662944	0.3278871
0.25	1.0		0.7165137	0.7151629	0.4063827	0.3963014
0.25	0.5		0.7323020	0.5056966	0.3393940	0.3256411
0.25	0.2		1.2701000	0.7825045	0.5516444	0.5388452
0.25	0.1		2.4596274	1.4905091	0.9871945	0.9747887
0.5	$\sqrt{3}/2$	 Equilateral triangle	1.0456624	1.0456624	0.3476109	0.3184014
0.5	0.5	 Isosceles right triangle	0.3485541	0.3485541	0.3476109	0.3455796
0.5	0.2		0.8713854	0.8713854	0.6761399	0.6630042
0.5	0.1		1.7427707	1.7427707	1.2786662	1.2688284

13 結論

補間誤差の評価や有限要素解の誤差評価の際に重要な、三角形要素上の補間誤差定数を上から評価する公式を提案し、実際に証明した。この公式の値は、三角形の頂点の座標が与えられていれば、加減乗除と一回の平方根で求めることができるので、既存の公式に比べると、まず使い易さという点で有利である。さらに、この公式はシンプルな上に、精度も良いので、将来的に世界中の人に便利に使ってもらえる可能性が高いと思われる。

謝辞

本研究は、劉雪峰氏の修士論文

0次および1次三角形有限要素の補間誤差定数の評価

(Estimation of error constants for P0 and P1 interpolations over triangular finite elements)

2005年・東京大学数理科学研究科・指導教官 菊地文雄先生

に触発されて始めたものです。研究のきっかけを与えて下さった、劉氏（早稲田大学）および菊地先生（一橋大学）に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] AINSWORTH, M. & ODEN, J. T., *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, (2000).
- [2] ARBENZ, P., Computable finite element error bounds for Poisson's equation, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **2** (1982), 475–479.
- [3] ARCANGELI, R. & GOUT, J. L., Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de \mathbb{R}^n , *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, **10** (1976), 5–27.
- [4] AUBIN, J. P., Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 3*, **21** (1967), 599–637.
- [5] BABUŠKA, I. & AZIZ, A. K., On the angle condition in the finite element method, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **13** (1976), 214–226 .
- [6] BABUŠKA, I. & STROUBOULIS, T., *The Finite Element Method and Its Reliability*. Clarendon Press, (2001).
- [7] BRENNER, S. C. & SCOTT, L. R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, (2002).

- [8] BREZZI, F. & FORTIN, M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Berlin: Springer, (1991).
- [9] CIARLET, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, (2002).
- [10] CROUZEIX, M. & RAVIART, P. A., Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, **3** (1973), 33–76.
- [11] DESTUYNDER, P. & MÉTIVET, B., Explicit error bounds in a conforming finite element method, *Math. Comp.*, **68** (1999), 1379–1396.
- [12] ERIKSSON, K., ESTEP, D., HANSBO, P. & JOHNSON, C., *Computational Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, (1996).
- [13] GRISVARD, P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Boston: Pitman Publishing, (1985).
- [14] KIKUCHI, F. & LIU, X., Estimation of interpolation error constants for the P_0 and P_1 triangular finite elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), 3750–3758.
- [15] KIKUCHI, F. & SAITO, H., Remarks on a posteriori error estimation for finite element solutions, *J. Comp. Appl. Math.*, **199** (2007), 329–336.
- [16] KNABNER, P. & ANGERMANN, L., *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Berlin: Springer, 2003.
- [17] LADYSENSKAYA, O.A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, New York: Gordon and Breach, 1969.
- [18] LAUGESEN, R. S. & SIUDEJA, B. A., Minimizing Neumann fundamental tones of triangles: An optimal Poincar inequality, *J. Differential Equations*, **249** (2010), 118–135.
- [19] LEHMANN, R., Computable error bounds in finite-element method, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **6** (1986), 265–271 .
- [20] LIU, X. & KIKUCHI, F., Analysis and estimation of error constants for P_0 and P_1 interpolations over triangular finite elements, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **17** (2010), 27–78.
- [21] MEINGUET, J. & DESCLOUX, J., An operator-theoretical approach to error estimation, *Numer. Math.*, **27** (1977), 307–326.
- [22] MOORE, R. E., KEARFOTT, R. B., & CLOUD, M. J., *Introduction To Interval Analysis*, Cambridge Univ. Press, 2009.

- [23] MORLEY, L. S. D., The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, *The Aeronautical Quarterly*, **19** (1968), 149–169.
- [24] NAKAO, M. T. & YAMAMOTO, N., A guaranteed bound of the optimal constant in the error estimates for linear triangular element, *Computing Supplementum*, **15** (2001), 163–173.
- [25] NATTERER, F., Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der finite Elemente, *International Series of Numerical Mathematics*, **28** (1975), 109–121.
- [26] NITSCHKE, J. A., Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens, *Numer. Math.*, **11** (1968), 346–348.
- [27] PAYNE, L. E. & WEINBERGER, H. F., An optimal Poincaré inequality for convex domains, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1960), 286–292.
- [28] RUMP, S. M., Verification of positive definiteness, *BIT Numer. Math.*, **46** (2006), 433–452.
- [29] RUMP, S. M., Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic, *Acta Numerica*, **19** (2010), 287–449.
- [30] TEMAM, R., *Numerical Analysis*. D. Reidel Publishing Company, (1973).
- [31] ZLÁMAL, M., On the Finite Element Method, *Numerische Mathematik*, **12** (1968), 394–409.