数理解析研究所講究録
第 1734 巻 2011 年 54-61



# AHP におけるサイクル出現と評点化過程

愛知学院大学・経営学部　田中　浩光 (Hiromitsu Tanaka)
Faculty of Management
Aichi-Gakuin University

## 1．はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) 方式では、通常、一対比較値集合（一対比較値行列全体も含む）を対象とする整合性点検として、サーティの整合性指標 C.I. (Consistency Index)が適用される。このとき、一対比較値集合におけるサイクル (比較項目間に順序をつけることができない) の出現は、C.I.の増大を招くことになり再度の評点化へと繋がることになるが、サイクル出現の解釈が未だ定まらないこともあり、サイクルの取り扱いが難しくなる。一方、C.I は、方向性を持たない包括的指標であること、あるいは離散化など AHP 方式に基づく固有の縛りに影響を受けるため、必ずしも評点化過程での諸原因を洗い出す整合性指標ではない。しかし、C.I.は、実践での豊富な適用に基づき経験的な評価を受けていることから整合性診断の第 1 選択の指標と考えることができる。

本稿では、一対比較値の評点化過程に基づいて、サイクルの出現の解釈を試みる。とくに、一対比較での共通の場に着目することで、サイクル出現の構造を探る。本稿では、一対比較値行列として比較項目数が 3 である基本サイクルをとりあげる。最初に、サイクル出現が及ぼす C.I.への影響の程度を測るために、基本サイクルの出現と C.I.の関係を調べる。次いで、基本サイクルの出現の構造を把握するため、評点化での項目間の比較において同一の場を共有しているか否かについて焦点をあてることで、サイクル出現のモデル化を試みる。サイクルの出現の身近な例として、旅行地の選択、コンビニ店の選択をとりあげる。最後に、サイクルが出現するときの対策について言及する。

## 2.一対比較値の評点化過程

比較対象の n 項目に対する一対比較では、下記の手順(1),(2)を通して、一対比較値行列 A を得る。

$A = \{ a_{ij} \}$

ここに、$i,j = 1, \cdots, n$ に対し、

$$a_{ij}^{-1} = a_{ji} \quad , a_{ii} = 1 \tag{1}$$

$$\max\{ a_{ij} \ , \ a_{ji} \} \in \{1, \cdots, 9\} \tag{2}$$

評点 $a_{ij}$ は、逆数対称化(1)、離散化に伴う値域の有界性(2)の縛りを受けることに留意する。

サーティによる AHP では、次の 2 つの想定が重要である。

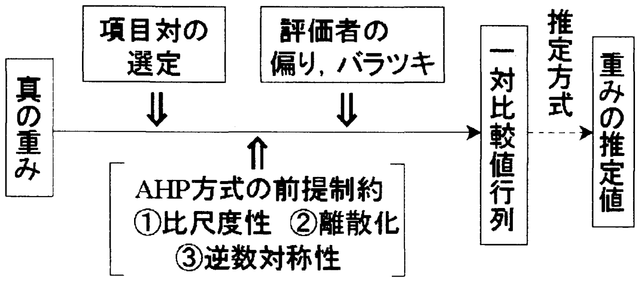
(1)較対象の n 項目に対し、評価者の有する潜在的な重要度(以下、重み)W＝$\{w_i\}$を導入する。

(2)潜在的な（真の）重み $\{w_i\}$に基づいて、比尺度性の想定もとで項目対の相対評価がなされる。

$a_{ij} \fallingdotseq (w_i / w_j)$ (3)

ここでは、サイクルの基本単位（以下、基本サイクル）として、項目数を3とする(図2)。3項目（①,②,③）を点とし、評点 $a_{12}$、$a_{23}$、$a_{13}$ を枝とする有効グラフを考える($a_{12} \geqq 1$、$a_{23} \geqq 1$、$a_{13} \leqq 1$)。ここに、以降では,便宜的に3項目を $\triangle_{123}$ と表し、$a_{12}$、$a_{23}$、$a_{13}$ をそれぞれ a,b,c と表す。

一対比較値の評点化過程を図1に示す(田中(2007)など)。



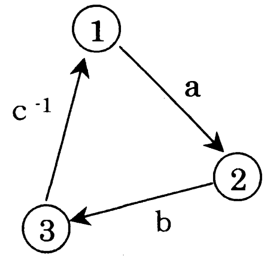




図1．AHP における一対比較での評点化過程

図2．基本サイクル

図1に基づき、一対比較値の生成について考える。誤差モデル(4)は重要度(以降、重み)W を変量ではなく母数として扱うことに留意する。すなわち、重み $W=\{w_i\}$ は、評価者固有の固定値であり、一対比較の実施に対し不変とする。

本報告では、評点 $a_{ij}$ に対して、誤差モデル(4)を想定する。

$a_{ij} \fallingdotseq (w_i / w_j) \cdot \varepsilon_{ij}$ (4)

ここに、$E=\{\varepsilon_{ij}\}$ は AHP 方式に付随する制約（離散化など）の調整を含む誤差を表す。

重みの推定には、幾何平均法、最小二乗法、最小 $\chi^2$ 法など多くの推定法が提案されている（Saaty and Vergas(1984)、Sekitani and Yamaki(1999)、仁科・柴山(1992)など)。本稿では、均衡解として解釈されている Saaty の固有値法を、誤差モデルでの1つの推定法として位置付けて採用する。

〔固有値法〕

$AU_{max} = \lambda_{max} \cdot U_{max}$ (5)

ここに、$\lambda_{max}$：A の最大固有値、$U_{max}$：$\lambda_{max}$ に対応する主固有ベクトル、$U_{max} = \{u_i\}$。

$u_i$ を第 i 項目の重みとする。固有値法で求められた $u_i$ を重み $w_i$ の推定値と考えることができる。

一対比較値の整合性の点検には、サーティの整合性指標 C.I.(Consistency Index)が用いられる。

$C.I. = (\lambda_{max} - n) / (n-1)$ (6)

$\lambda_{max} = n + \Sigma\Sigma(u_i - a_{ij} u_j)^2 / (a_{ij} u_i u_j)$ (7)

相対残差

$e_{ij} = a_{ij} / (u_i / u_j)$ (8)

で表すとき、次式を得る（仁科・柴山(1992))。

$C.I. = \Sigma\Sigma (e_{ij} - 1) / {}_nC_2$ (9)

3．サイクル出現と C.I.

本稿では、サイクル出現.がサーティの整合性基準の C.I.に及ぼす影響について、とくに基本サイクルを含む場合をとりあげて、若干の数値例にもとづいて吟味する。

最初に、基本サイクル$\triangle_{123}$の出現を考える。項目数を 3 とする一対比較値行列を有向グラフで考える。一対比較値行列の類型として、(a)有向非巡回（①→②→③）、(b)枝 $a_{12}$②→①)で有向非巡回となる一対比較値行列、(c)枝 $a_{23}$(②→③)で有向非巡回となる一対比較値行列、(d)枝 $a_{13}$(①→③)で有向巡回となる一対比較値行列が考えられる。本稿での対象は類型(d)である(図 2 を参照)。

サーティの経験則によれば、C.I.≦0.1 のとき、(サーティの意味の)整合性が認められる。
項目数 n=3 のとき、C.I.≦0.1 の成立は、すなわち$\triangle_{123}$では、

$$3.78^{-1} \leqq ab/c^{-1} \leqq 3.78 \qquad (10)$$

が成立することと同等である（小澤(2004)、田中(2010a)）。

田中(2010a)では、基本サイクル$\triangle_{123}$に対応する一対比較値行列(図 2)をとりあげて、C.I.の挙動を調べられている。評点の組$(a,b,c^{-1})$において、(1)C.I.≦0.1,(2)C.I.≦0.15、(3)C.I.>0.15 を満たす各頻度を表 1 に与える。

表 1．C.I.≦$\alpha$を満足する評点の組$(a,b,c^{-1})$の数(田中(2010a))

| c | $\alpha$ =0.1 | （$\alpha$=0.15 ） | C.I.> 0.15 |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 71 |
| 2 | 1 | 3 | 78 |
| 3 | 1 | 1 | 80 |
| 4 | 0 | 1 | 80 |
| 5 | 0 | 1 | 80 |
| 6 | 0 | 0 | 81 |
| 7 | 0 | 0 | 81 |
| 8 | 0 | 0 | 81 |
| 9 | 0 | 0 | 81 |
| 合計 | 7 | 16 | 713 |

表 1 によると、サイクル出現での評点の組のなかで、C.I.基準で整合性が認められる組数は、すなわち C.I.≦0.15 (C.I.≦0.1) を満足する評点の組(a,b,c)の数は全ての 729 組のうち 16 組(7 組)と 2.2%（1.0%）と僅かであった。整合性を満足する組の評点は 1 か 2 のみの組み合わせであるため、基本サイクルの出現は、サーティの意味で整合性を失うことになる。表 1 を読むとき、サイクルの影響が大きいことが示唆される。

次いで、サイクルの出現に直接影響を及ぼす$a_{13}$の大きさに着目して、サイクル$(a, a, c^{-1})$. $(a, a, a^{-1})$の重みの推定値、C. I. を調べる(表 2、表 3、表 4 を参照).

表 2. $(a, a, c^{-1})$ の C. I.

| c | a=2 | a=3 |
|---|---|---|
| 1 | 0. 109 | 0. 280 |
| 2 | 0. 25 | 0. 501 |
| 3 | 0. 363 | 0. 667 |
| 4 | 0. 458 | 0. 802 |
| 5 | 0. 541 | 0. 919 |
| 6 | 0. 616 | 1. 022 |
| 7 | 0. 683 | 1. 116 |
| 8 | 0. 745 | 1. 200 |
| 9 | 0. 802 | 1. 279 |

表 3. $(a, a, c^{-1})$ の $c^{-1}=2^{-1}$ のときの重み推定値

| a | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0. 413 | 0. 327 | 0. 260 |
| 2 | 0. 333 | 0. 333 | 0. 333 |
| 3 | 0. 289 | 0. 331 | 0. 379 |
| 4 | 0. 260 | 0. 327 | 0. 413 |
| 5 | 0. 238 | 0. 323 | 0. 434 |
| 6 | 0. 221 | 0. 319 | 0. 460 |
| 7 | 0. 207 | 0. 315 | 0. 478 |
| 8 | 0. 196 | 0. 311 | 0. 493 |
| 9 | 0. 186 | 0. 307 | 0. 507 |

表 4. $(a, a, a^{-1})$ の C. I.

| a | C. I. | 主固有値 |
|---|---|---|
| 1 | 0. 0 | 3. 0 |
| 2 | 0. 25 | 3. 5 |
| 3 | 0. 667 | 4. 333 |
| 4 | 1. 125 | 5. 25 |
| 5 | 1. 6 | 6. 2 |
| 6 | 2. 083 | 7. 169 |
| 7 | 2. 571 | 8. 143 |
| 8 | 3. 063 | 9. 125 |
| 9 | 3. 556 | 10. 111 |

上記の表 2、表 4 からは、$a_{13}$の大きさに影響して、C.I.値は単調増加であることが読みとることができる。いずれの c 値においても、サーティの意味で整合でないことがわかる。表 3 からは、第 1 の重みの推定値が a について単調減少であることが読みとれる。

4．サイクル出現の解釈

本節では、最初にサイクルを定義して、その上でサイクルの出現の原因を考察する。

「定義」 比較項目数を n とするときの一対比較値行列 $A_n$ に対し、項目対(1, n)を除く、全ての項目対(i, j)において $a_{ij} \geqq 1$ が成立するとき、サイクルが出現すると定義する。ここに、$a_{1n} < 1$。

本稿で取り扱う基本サイクルの場合、$a_{12} \geqq 1$、$a_{23} \geqq 1$、$a_{13} < 1$ が成立することを意味する。基本サイクルの出現は、結果として C. I. への影響が大きくなり、サーティ基準で整合性は認められないことになる（表 1 参照)。

一対比較値行列が与えられるとき、サイクルの原因として、次の 2 つを考えることができる。

(1) (真の) 重み$\{w_i\}$と誤差$\varepsilon_{ij}$

① (真の) 重みの比 $w_i / w_j$ が 1 に近い。

② 評価者による評点化の際の偏りと誤差

(2) 比較の場が異なる

項目対に対し一対比較が行なわれるが、比較する場（時、場所、状況など）が異なるとき、評点化の際に項目対の重みが異なる。結果として、AHP 方式を実施するときの前提である「評価項目と代替案の独立性」が崩れて、従属性が生じることになる。

上記で考察されたサイクル出現の原因(1), (2)について、誤差モデル(4)にしたがって, すなわち (真の) 重み$\varepsilon_{ij}$と誤差$\varepsilon_{ij}$を用いることで、次のように記述することができる。

(1)項目対 (i、j) の比較において、重み{w.}の比が1に近いとき.

誤差$\varepsilon_{ij}$の影響を受ける.

$$a_{ij}=w_i \ / \ w_j \cdot \varepsilon_{ij}$$

(2)評点化に際して、比較項目対における条件が異なる。

・項目対 (i、j) の比較において、重み{w.}を想定する.

$$a_{ij}=w_i \ / \ w_j \cdot \varepsilon_{ij}$$

・項目対 (k、l) の比較において、重み{w.'}を想定する.

$$a_{kl}=w_k' \ / \ w_l' \cdot \varepsilon_{kl}'$$

5. サイクル出現の構造

4節での考察に基づきサイクル出現の構造を把握するため、次の2段階に分けて考察する。

(1)(真の)重みと誤差の影響のみでサイクル出現を記述する。

(2)項目対に応じて、一対比較の場が異なるとして、サイクル出現を記述する。

最初に、誤差モデル(4)にしたがう状況(1)について、2つの場合A,Bを設定して、サーティ方式による評点付けを実施するときの一対比較値行列$\{a_{ij}\}$を吟味する。

「場合A」

$\{w_i\}$ : {0.333 , 0.333 , 0.333}

$a_{12}=1$, $a_{23}=1$, $a_{13}$ : $1\cdot\varepsilon_{13}$の四捨五入

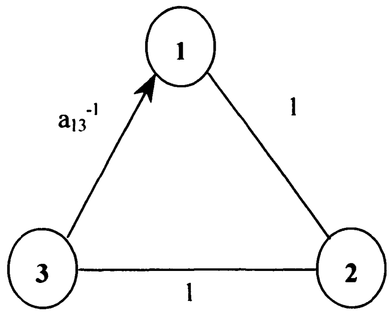
ここに $0<\varepsilon_{13}<1$

(i) サイクルの出現

$$\varepsilon_{13} \leqq (1.5)^{-1}$$

(ii) 不整合(C. I. > 0.1)

$$\varepsilon_{13} \leqq (3.78)^{-1}$$




「場合B」.

$\{w_i\}$ : {0.571 , 0.286 , 0.143}

$a_{12}=2$, $a_{23}=2$, $a_{13}$ : $4\cdot\varepsilon_{13}$の四捨五入

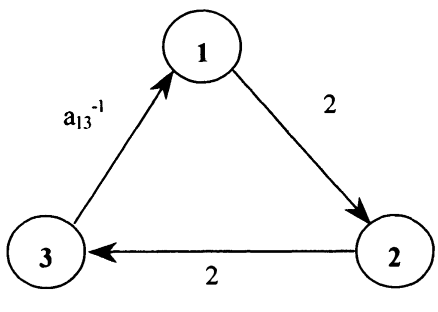
ここに $0<\varepsilon_{13}<1$

(i)サイクルの出現

$$\varepsilon_{13} \leqq 6^{-1}$$

(ii) 不整合(C. I. > 0.1)

$$\varepsilon_{13} \leqq (4\cdot 3.78)^{-1}$$

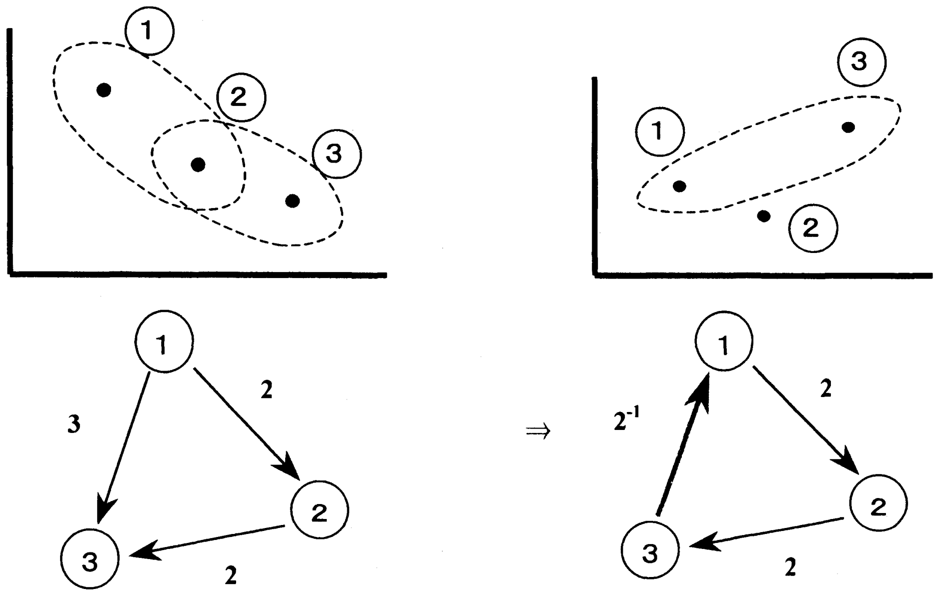


下記に、サイクル出現を生じる原因(2)である一対比較の場が異なる場合の人工的数値例を与える。下に図示される上側の 2 つの図は、(真の)重み$\{w_i\}$である。下側の左図では$\{w_i\}=\{0.5、0.3、0.2\}$に対して 3 項目の一対比較を実施して評点化し、右図では項目対 (①、③) で重みが異なることを考慮して評点化している。両図ともサーティ方式による評点である。

・人工例：項目数=3、

$\{w_i\}=\{0.5、0.3、0.2\}$ ← 比較の項目対 (①、②)、(②、③) =

$\{0.3、0.2、0.5\}$ ← 比較の項目対 (①、③)




C. I. =0. 0046 C. I. =0. 25

$u_1=0.540,\ u_2=0.297,\ u_3=0.153$ $u_1=0.333,\ u_2=0.333,\ u_3=0.333$

本節での考察・吟味の結果に基づき、基本サイクルである一対比較値行列が与えられるときの対処について整理する。ここに、項目対(①, ②)、(②, ③)に順序が成立し、$a_{12}\geqq 1$、$a_{23}\geqq 1$ であり、項目対(①, ③)で逆の順序が成立する、$a_{13}<1$ とする。(1)では、誤差の影響であるか否かを診ることで①か②に分ける。とくに、②の場合は、条件規定の充分性に関連して評価基準の設定が問われることになる。

(1)項目対 (1, 3) の比較値$a_{13}$において、

① $a_{13}^{-1}=2$ → $\varepsilon_{13}$の影響、あるいは条件規定が不十分

② $a_{13}^{-1}\geqq 3$ → 条件規定が不十分

(2)対処

①重み$\{w_.\}$を同等として考える。

$a_{12}=1$ 、$a_{23}=1$ 、$a_{13}=1$

②厳しい条件規定において、新たな重み$\{w_.'\}$で比較値$a_{ij}$を生成する。

$a_{ij}=[w_k' / w_l']$

## 6．数値例

５節で考察した評点化での場が異なる状況を、旅行先の選択、コンビニ店の選択をとりあげて、一対比較値行列を生成して、基本サイクルが出現することを確かめる。

(1)問題の設定

名古屋から夏休みに遊びに行く所（東京, 広島, 北海道）を費用、所要時間、開放感で選定する。

(ｉ)旅行先の選択

・目的　　・・・夏休みに遊びに行く所

・評価基準・・・費用、所要時間、開放感

・代替案　　・・・東京、広島、北海道

表５．旅行先の選択
：一対比較値表

| | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| ① | 1 | 2 | $2^{-1}$ |
| ② | $2^{-1}$ | 1 | 2 |
| ③ | 2 | $2^{-1}$ | 1 |

(ⅱ)一対比較値行列

評価基準：時間

代替案の比較評点化の際に、項目対の重みが異なる。

①>②　　：通常の JR（新幹線）を用いた場合

②>③　　：飛行機を用いた場合

③>①　　：通常の JR（新幹線）と飛行機を用いた場合

＊重み[$w_i$]　：評価基準と代替案の従属性（東京：JR）

通常の JR（新幹線）を用いた場合：　$w_1$（東京：JR）$>w_2$（広島：JR）

飛行機を用いた場合：$w_2$（広島：飛行機）$>w_3$（北海道：飛行機）

費用の点も考慮する場合：$w_1$（東京：JR）$<w_3$（北海道：飛行機）

(2)問題の設定

下宿先の近辺のコンビニ店を、接客態度、品揃え, 立地条件の３基準で選定する。

(ｉ)コンビニ店の選択

・目的　　・・・いずれのコンビニ店を利用するか。

・評価基準・・・接客態度、品揃え、立地条件

・代替案　　・・・たとえば、セブンイレブン、ローソン、サンクス

表６．コンビニ店の選択
：一対比較値表

| | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| ① | 1 | 2 | $2^{-1}$ |
| ② | $2^{-1}$ | 1 | 2 |
| ③ | 2 | $2^{-1}$ | 1 |

(ⅱ)一対比較値行列

評価基準：接客態度、(品揃え)

代替案の比較

①>②　、②>③　：応接する店長

①<③　　　　　：応接する店員

＊重み[$w_i$]　：　応接する店長：$w_1>w_2>w_3$　　応接する店員：$w_3>w_1$

応接時間帯（多忙時）：　$w_1$（①：店長）$>w_2$（②：店長）

応接時間帯（多忙時）：　$w_2$（②：店長）$>w_3$（③：店長）

応接時間帯（休閑時）：　$w_1$（②：店員）$<w_3$（③：店員）

## 7．おわりに

本稿では、AHP 方式に影響を及ぼすと考えられているサイクルに注目して、とくに基本サイクルの C.I.への影響とその出現の構造について考察・吟味した。サーティの整合性指標 C.I.の挙動を調べた結果、サイクルの存在が整合性を満たさないことが示唆された。サイクル出現の構造把握では、項目間での一対比較の場を共通でなければならないとする視点に基づいてモデル化を試みたが、この共通の場を生成することは、AHP 方式の前提に立ち返ったものであり、実践において一対比較を実施するときの厳格な条件規定に繋がるものである。今後の課題の 1 つに、サイクル出現の影響をより精確に評価することが考えられる。そのためには、基本サイクル含む一対比較値行列と整合性指標 C.I.の関係を探ることを第 1 の目標として、適切な設計のもとで多くの数値例での検証を行う必要がある。

## 参考文献


(1) Saaty,T.L.(1980).The Analytic Hierarchy Process,McGraw Hill,New YorK.

(2) Saaty,T.L. and Vergas,C.G.(1984). Comparison of eigen value, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios. Mathematical Modeling,5,309-324.

(3) 仁科健、柴山忠雄(1992).一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、品質、22, 2,115-123.

(4) Sekitani,K. and Yamaki,Y.(1999). A logical interpretation for eigenvalue method in AHP. Journal of the Operetions Research Society of Japan,42,219-232.

(5) 小澤正典(2004).AHP における整合度 C.I.値の意味と解釈、OR学会研究部会「AHP の世界」発表資料(2004.9.24).

(6) 田中浩光(2007).AHP における一対比較値の比例性診断について、日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集、108-109.

(7) 田中浩光(2008).AHP における一対比較値の整合性診断について、京都大学数理解析研究所講究録、1589,157-166.

(8) 田中浩光(2009).AHP における一対比較値の評点化過程について、京都大学数理解析研究所講究録、1636,169-176.

(9) 田中浩光(2010a).AHP におけるサイクルの影響について、愛知学院大学論叢経営学研究、第 19 巻、第 3・4 合併号、35-42.

(10) 田中浩光(2010b).AHP における C.I.と評点化過程、京都大学数理解析研究所講究記録、1682,86-93.

(11) 田中浩光(2010c).AHP におけるサイクル出現と C.I.、日本経営数学会研究発表会報告要旨集.



田中 浩光

愛知学院大学経営学部

〒470-0195 愛知県日進市岩崎町阿良池 12

Email：htanaka@dpc.aichi-gakuin.ac.jp