

ファジィ計画問題におけるファジィ係数間の相互関係の取り扱い

大阪大学大学院 乾口雅弘 (Masahiro Inuiguchi)[†]

[†] Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

ファジィ計画法 [4, 11, 14] は不確実性の下での計画問題を扱う有用な一手法である。確率計画法では係数の確率分布が与えられると仮定されるが、ファジィ計画法では係数の取りうる範囲がファジィ集合で与えられると仮定される [12]。多くのファジィ計画法 [4, 11, 14] では不明確な係数間に相互関係がないと仮定されてきた。相互関係がないという概念は独立性 [1] と類似した概念で、ある不明確な係数の値がどのような値を取ろうとも他の不明確な係数の取りうる範囲が変わらないことをいう。

相互関係がないという仮定の下では帰着問題は簡単になり、ファジィ計画法の利点をもたらす [4]。しかし、この仮定のため、ポートフォリオ選択問題などの単純な問題では、直感的に受け入れがたい解が得られることがある [7]。株式市場などで知られているように、企業の株価は完全に独立ではなく、何らかの従属性があることが多い。このような相互関係はファジィ計画問題の係数間にあることも十分考えられるので、相互関係がないという仮定は種々の現実問題を表現するには必ずしも十分であるとは言い切れない。

確率計画法では、不確実な係数間の従属性は、共分散あるいは相関などにより比較的容易に取り扱うことができるが、ファジィ計画法では、一般には帰着問題が非凸になり、必ずしも容易に取り扱えない。しかし、近年、不明確な係数間の特別な相互関係を仮定すれば、比較的容易に取り扱えることが示された。本稿では、これらについて概観する。

2 問題設定

本稿では、次のファジィ目的関数をもつ線形計画問題を考える。

$$\text{minimize } \gamma^T x, \quad \text{subject to } Ax \leq b \quad (1)$$

ただし、 A は $m \times n$ 行列で、 $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ である。 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ は決定変数ベクトルである。 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ は可能性変数ベクトルと呼ばれる不明確な変数ベクトルである。 γ の取りうる範囲が専門家の知識などにより、ファジィ集合 C として与えられているものとする。 C は n 次元ファジィ集合で、そのメンバシップ関数は μ_C と表される。

問題 (1) を必然性水準最適化モデルを用いて取り扱う。ある変数の取りうる範囲がファジィ集合 D で与えられたとき、ファジィ事象 E の必然性測度は、

$$N_D(E) = \inf_{\tau} \max(1 - \mu_D(\tau), \mu_E(\tau)) \quad (2)$$

と定められる。ただし、 μ_D, μ_E は D, E のメンバシップ関数である。値 $N_D(E)$ はファジィ事象 E が生起する必然性 (確実性) の度合いを示している。 $N_D(E)$ に関して次式が成立する。

$$N_D(E) \geq h \quad \text{if and only if} \quad (D)_{1-h} \subseteq [E]_h \quad (3)$$

ただし, $(D)_{1-h} = \{r \mid \mu_D(r) > 1-h\}$, $[E]_h = \{r \mid \mu_E(r) \geq h\}$ であり, それぞれ, D の強 $(1-h)$ -レベル集合, E の h -レベル集合と呼ばれる.

必然性水準最適化モデルに基づけば, 問題 (1) は次のように定式化される.

$$\text{minimize } z, \text{ subject to } N_C(\{\gamma^T x \leq z\}) \geq h^0, Ax \leq b \quad (4)$$

ただし, $h^0 \in [0, 1]$ 意思決定者により予め定められた必然性レベルである. ファジィ集合 $Y(x)$ を拡張原理 [17] に基づき, メンバシップ関数 $\mu_{Y(x)}(y) = \sup \{\mu_C(c) \mid c^T x = y\}$ で定めると, $N_C(\{\gamma^T x \leq z\}) = N_{Y(x)}((-\infty, z])$ が成立する.

以下では, ファジィ集合 C の種々のモデルに対する問題 (4) の帰着問題を概観する.

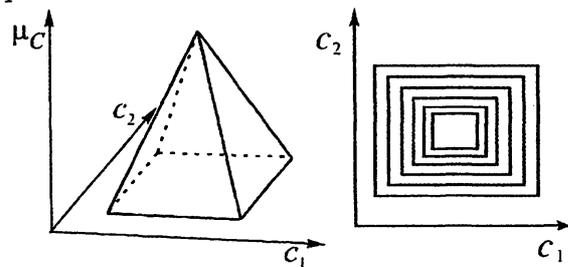
3 相互関係がないファジィ数の場合

不明確なベクトル γ に関する情報は成分ごとに与えられることは多い. すなわち, 成分 γ_j の取りうる範囲がファジィ数 C_j として与えられる場合である. 従来のファジィ計画法では, 不明確な係数間に相互関係が無いことが仮定され, C はメンバシップ関数

$$\mu_C(c) = \min(\mu_{C_1}(c_1), \dots, \mu_{C_n}(c_n)) \quad (5)$$

で定められてきた. ただし, $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ で, μ_{C_j} は C_j のメンバシップ関数である.

図 1 に $n = 2$ のときの C のメンバシップ関数の例を示す. 図 1 では, C_j , $j = 1, 2$ は三角型ファジィ数である. 図 1 に示すように, C のメンバシップ関数の等高線は, 各軸に平行な長方形となる. これは, C_j , $j = 1, 2$ が三角型ファジィ数であるという事実に依るのではなく, 不明確な係数 γ_1 と γ_2 に相互関係が無いという事実に依る.



(a) 3次元イメージ (b) 等高線

図 1: 相互関係が無いファジィベクトルのメンバシップ関数

さらに, (A1) $[C_j]_h = \{r \mid \mu_{C_j}(r) \geq h\}$ は有界閉区間であると仮定すれば, 次が得られる.

$$[Y(x)]_h = \sum_{j=1}^n [C_j]_h x_j = \sum_{j=1}^n [C_j^L(h), C_j^R(h)] x_j \quad (6)$$

ただし, 有界閉区間となる h -レベル集合 $[C_j]_h$ について, $[C_j]_h = [C_j^L(h), C_j^R(h)]$ となる.

$N = \{1, \dots, n\}$ とすると, 問題 (4) は次の線形計画問題に帰着される.

$$\text{minimize } \sum_{j=1}^n y_j, \text{ subject to } \bar{C}_j^L(1-h^0)x_j \leq y_j, \bar{C}_j^R(1-h^0)x_j \leq y_j, j \in N, Ax \leq b \quad (7)$$

ただし, $\text{cl}(C_j)_h = [\bar{C}_j^L(h), \bar{C}_j^R(h)]$ と定める (“cl” は閉包を意味する).

4 弱独立なファジィ数の場合

ファジィ理論では, \min 演算を t-norm [10] で置き換えることが多い. 式 (5) に対応して,

$$\mu_C(c) = T(\mu_{C_1}(c_1), \dots, \mu_{C_n}(c_n)) \quad (8)$$

を考える。ただし、t-norm $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は次の性質をもつ 2 変数関数である。(T1) $T(a, 1) = T(1, a) = a, \forall a \in [0, 1]$ (境界条件), (T2) $T(a, b) = T(b, a), \forall a, b \in [0, 1]$ (可換性), (T3) $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c), \forall a, b, c \in [0, 1]$ (結合性), (T4) $a \leq c, b \leq d$ なる任意の $a, b, c, d \in [0, 1]$ に対して, $T(a, b) \leq T(c, d)$. 同時ファジィ集合 C が周辺ファジィ集合 $C_j, j = 1, \dots, n$ を用いて式 (8) で表されるとき, C を弱独立なファジィ数という。

Rommelfanger と Kresztfalvi [13] は、ファジィ線形関数の広がり制御するため、パラメータ p をもつ Yager の t-norm を、ファジィ線形計画問題に用いることを提案している。すなわち、彼らはメン

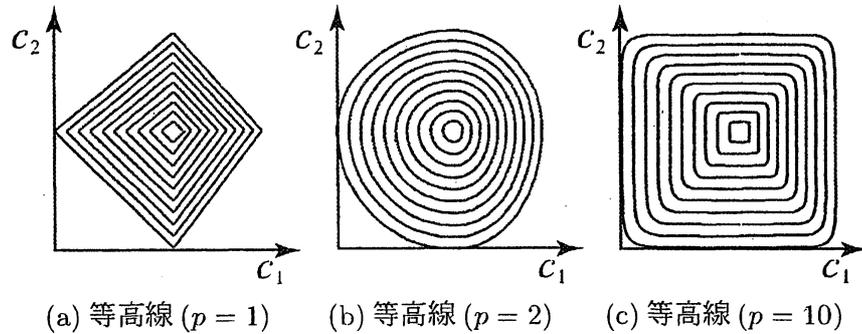


図 2: 弱独立なファジィ数のメンバシップ関数の等高線

バシップ関数 $\mu_C = T_p(\mu_{C_1}(c_1), \dots, \mu_{C_n}(c_n))$ をもつファジィベクトル C を考えている。ただし, T_p は

$$T_p(r_1, r_2, \dots, r_n) = \max \left[0, 1 - \left(\sum_{j=1}^n (1 - r_j)^p \right)^{1/p} \right] \quad (9)$$

と定義され, $p \geq 1$ である。 T_p は Yager の t-norm を結合性を用いて n 変数関数に拡張したものである。このとき, 異なった p に対する μ_C の等高線を図 2 に示す ($n = 2$)。

C_j が台形型ファジィ数 $(c_j^L, c_j^R, \alpha_j^L, \alpha_j^R)$, すなわち, $c_j^L \leq c_j^R$ と $\alpha_j^L, \alpha_j^R > 0$ を用いて,

$$\mu_{C_j}(r) = \max \left(0, \min \left(1 - \frac{c_j^L - r}{\alpha_j^L}, 1, 1 - \frac{r - c_j^R}{\alpha_j^R} \right) \right) \quad (10)$$

と表される場合を考える。 Rommelfanger と Kresztfalvi [13] は, $x \geq 0$ が $Ax \leq b$ に含まれるとき, 目的関数値のファジィ集合 $Y(x)$ が台形型ファジィ数 $(y^L(x), y^R(x), \alpha^L(p, x), \alpha^R(p, x))$ となることを示している。ただし, p に対して $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす $q \geq 1$ を用いて,

$$y^\xi(x) = \sum_{j=1}^n c_j^\xi x_j, \quad \alpha^\xi(p, x) = \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j^\xi x_j)^q \right)^{1/q}, \quad \xi \in \{L, R\} \quad (11)$$

と定められる。 p が大きくなるほど $1/q$ は大きくなるので, 式 (11) より, $Y(x)$ の広がりも大きくなる。したがって, p を調整することにより, $Y(x)$ の不明確さを制御できる。

以上の結果を適用すると, 問題 (4) は次の計画問題に帰着する。

$$\text{minimize } y^R(x) + (1 - h)\alpha^R(p, x), \quad \text{subject to } Ax \leq b \quad (12)$$

この問題は, $q = 1$, すなわち, $p = \infty$ のときと, $q = \infty$, すなわち, $p = 1$ のときを除き, 非線形になる。 $q \geq 1$ となるので, その他の場合でも凸計画問題となる。

5 2次メンバシップ関数をもつファジィベクトルの場合

2次メンバシップ関数は多変量正規分布に対応し、不明確な係数間の相関を取り扱うことができる。多変量正規分布との類似性により、InuiguchiとSakawa [6]はファジィ線形計画法と確率線形計画法との等価性を議論している。

このモデルでは、ファジィ集合 C はメンバシップ関数

$$\mu_C(c) = L((c - d)^T U^{-1}(c - d)), \quad (13)$$

で定められる。ただし、 $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ で、 U は目的関数の係数間の相互関係を示す対称正値な $n \times n$ 行列である。 U^{-1} は U の逆行列である。 $L : [0, +\infty) \mapsto [0, 1]$ は reference 関数で、 $L(0) = 1$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} L(r) = 0$ となる上半連続な非減少関数である。 $n = 2$ のときの2次メンバシップ関数の等高線は、図3に示すように、多変量正規分布と同様に楕円になる。

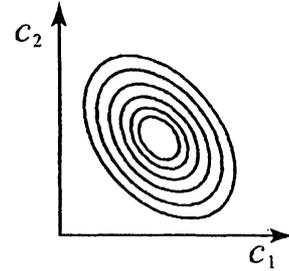


図3: 2次メンバシップ関数の等高線

TanakaとIshibuchi[16]の結果を拡張すると、 $Y(x)$ のメンバシップ関数は

$$\mu_{Y(x)}(y) = L\left(\frac{(y - d^T x)^2}{x^T U x}\right) \quad (14)$$

となる。式(14)より、次式を得る。

$$N_{Y(x)}((-\infty, z]) \geq h^0 \Leftrightarrow d^T x + \sqrt{L^*(1 - h^0)x^T U x} \leq z \quad (15)$$

ただし、 $L^* : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty) \cup \{-\infty\}$ は次のように定められる。

$$L^*(h) = \begin{cases} \sup\{r \mid L(r) > h, r \geq 0\}, & \text{if } h < 1 \\ -\infty, & \text{if } h = 1 \end{cases} \quad (16)$$

したがって、 $h^0 > 0$ のとき、問題(4)は次の非線形計画問題に帰着される。

$$\text{minimize } d^T x + \sqrt{L^*(1 - h^0)x^T U x}, \quad \text{subject to } Ax \leq b \quad (17)$$

この問題は凸計画問題で、確率計画問題に対する解法 [15] により解くことができる。

6 シナリオ分解ファジィ数

InuiguchiとTanino [8]は、シナリオ分解ファジィ数を提案している。このモデルでは、不明確な係数間の相互関係はファジィif-thenルールで表される。不明確な係数ベクトル γ に関する曖昧な知識は、次の u 個のファジィif-thenルールで表されることがある。

$$\text{if } s = s_k \text{ then } \gamma \in C^k, k = 1, \dots, u \quad (18)$$

ただし、 s はシナリオ変数と呼ばれ、 $\{s_1, \dots, s_u\}$ 内の値をとる。 $C^k = (C_1^k, \dots, C_n^k)^T$ は相互関係の無いファジィベクトルである。 C^k は次のメンバシップ関数をもつ。

$$\mu_{C^k}(c) = \min(\mu_{C_1^k}(c_1), \dots, \mu_{C_n^k}(c_n)) \quad (19)$$

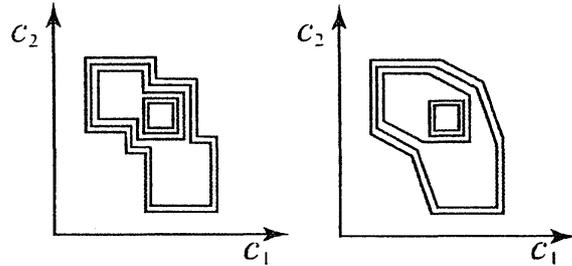
C_j^k は $[C_j^k]_h = \{r \mid \mu_{C_j^k}(r) \geq h\}$ が有界な閉区間で, $\mu_{C_j^k}$ は C_j^k のメンバシップ関数である.

ルール群 (18) はシナリオ変数 s_k と γ の可能な範囲 C^k とのファジィ関係 R を表している. ルール群 (18) の下で, シナリオ変数に関する情報や推定値が s の取りうる範囲を示すファジィ集合 S として与えられると, ファジィ推論 [17] により, ファジィ集合

$$\mu_C(c) = \max_{k=1, \dots, u} \min(\mu_S(s_k), \mu_{C^k}(c),) \quad (20)$$

が推定される. ただし, μ_S は S のメンバシップ関数である. 対 $(S, \text{知識 (18)})$ はシナリオ分解ファジィ数と呼ばれる.

$n = 2$ であるとき, 式 (20) シナリオ分解ファジィ数のメンバシップ関数の等高線を図 4(a) に示す. 式 (18) では, 離散シナリオ変数を取り扱っているが, Inuiguchi と Tanino [8] は連続シナリオ変数についても議論している. 連続シナリオ変数の場合は, if-then ルールの前件部にファジィ集合が現れる. 連続シナリオ変数の場合のシナリオ分解ファジィ数のメンバシップ関数の等高線を図 4(b) に示す. 本稿では離散シナリオ変数の場合について述べる.



(a) 離散シナリオ変数 (b) 連続シナリオ変数

図 4: シナリオ分解ファジィ数のメンバシップ関数の等高線

$Y^k(x)$ をメンバシップ関数 $\mu_{Y^k(x)}(y) = \sup\{\mu_{C^k}(c) \mid c^T x = y\}$ で定められるファジィ数とすると, $Y(x)$ は次のメンバシップ関数で定められる.

$$\mu_{Y(x)}(y) = \max_{k=1, \dots, u} \min(\mu_S(s_k), \mu_{Y^k(x)}(y)) \quad (21)$$

必然性測度について次式が成立する.

$$\begin{aligned} N_{Y(x)}((-\infty, z]) \geq h^0 &\Leftrightarrow \text{cl}(Y(x))_{1-h^0} \subseteq (-\infty, z] \\ &\Leftrightarrow \text{cl}(Y^k(x))_{1-h^0} \subseteq (-\infty, z], \forall k \text{ such that } \mu_S(s_k) > 1 - h^0 \end{aligned} \quad (22)$$

これより, $\text{cl}(C_j^k)_h = [\bar{C}_{jk}^L(h), \bar{C}_{jk}^R(h)]$ とすると, 問題 (4) は次の線形計画問題に帰着する.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } z, \\ &\text{subject to } \bar{C}_{jk}^L(1-h^0)x_j \leq y_j^k, \bar{C}_{jk}^R(1-h^0)x_j \leq y_j^k, j \in N, \\ &Ax \leq b, \sum_{j=1}^n y_j^k \leq z, \forall k \text{ such that } \mu_S(s_k) > 1 - h^0 \end{aligned} \quad (23)$$

7 斜交ファジィベクトルの場合

「 γ_1 と γ_2 と γ_3 の和はおおよそ 5 である」や「 γ_4 と γ_5 との差はだいたい 3 である」などのように, 不明確な係数の和や差に対して曖昧な知識をもつことがある. Inuiguchi ら [5] はこのような知識が扱える斜交ファジィベクトルを提案している. 斜交ファジィベクトルは, 不明確な係数の異なる n 個の線形関数値に関する曖昧な知識を取り扱うことができる.

斜交ファジィベクトル C は次のメンバシップ関数で定めることができる.

$$\mu_C(c) = \min_{j=1, \dots, n} \mu_{B_j}(d_j^T c), \quad (24)$$

ただし, μ_{B_j} は L-L ファジィ数 $B_j = (b_j^L, b_j^R, \beta_j^L, \beta_j^R)_{LL}$ のメンバシップ関数であり, \mathbf{d}_j , $j = 1, \dots, n$ は $D = (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)^T$ が正則な $n \times n$ 行列となるベクトルである. L-L ファジィ数 $B_j = (b_j^L, b_j^R, \beta_j^L, \beta_j^R)_{LL}$ は次のメンバシップ関数で特徴付けられる.

$$\mu_{B_j}(r) = \max \left(0, \min \left(L \left(\frac{b_j^L - r}{\beta_j^L} \right), 1, L \left(\frac{r - b_j^R}{\beta_j^R} \right) \right) \right) \quad (25)$$

ただし, $b_j^L \leq b_j^R$, $\beta_j^L > 0$, $\beta_j^R > 0$ であり, L は先と同様の reference 関数である. 正則行列 D は不明確な係数間の相互関係を示し, 多変量正規分布の共分散行列に対応する. 斜交ファジィベクトルは「 $\mathbf{d}_j^T \mathbf{c}$ がファジィ数 B_j 内にある」という n 個の情報により定められる.

$n = 2$ の場合の斜交ファジィベクトルの例を図 5 に示す. 相互関係のないファジィ数と異なり, 斜交ファジィベクトルの等高線は必ずしも長方形ではなく, 軸に平行な辺ももつとは限らない.

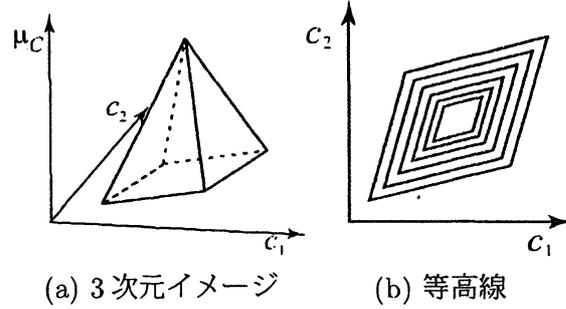


図 5: 斜交ファジィベクトルのメンバシップ関数

Inuiguchi ら [5] の結果を用いると, 次式が得られる.

$$\text{cl}(Y(\mathbf{x}))_h = \left[\begin{array}{l} \sum_{j:k_j(\mathbf{x}) \geq 0} \bar{b}_j^L(h) k_j(\mathbf{x}) + \sum_{j:k_j(\mathbf{x}) < 0} \bar{b}_j^R(h) k_j(\mathbf{x}), \\ \sum_{j:k_j(\mathbf{x}) \geq 0} \bar{b}_j^R(h) k_j(\mathbf{x}) + \sum_{j:k_j(\mathbf{x}) < 0} \bar{b}_j^L(h) k_j(\mathbf{x}) \end{array} \right] \quad (26)$$

ただし, d_{ij}^* を D^{-1} の (i, j) 成分とすると, $k_j(\mathbf{x})$, $\bar{b}_j^L(h)$, $\bar{b}_j^R(h)$ は次式で定められる.

$$k_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n d_{ij}^* x_i, \quad \bar{b}_j^L(h) = b_j^L - \beta_j^L L^*(h), \quad \bar{b}_j^R(h) = b_j^R - \beta_j^R L^*(h) \quad (27)$$

この結果と式 (22) の最初の等価関係を適用すれば, 問題 (4) は次の計画問題に帰着できる.

$$\text{minimize} \quad \sum_{j:k_j(\mathbf{x}) \geq 0} \bar{b}_j^R(1-h^0) k_j(\mathbf{x}) + \sum_{j:k_j(\mathbf{x}) < 0} \bar{b}_j^L(1-h^0) k_j(\mathbf{x}), \quad \text{subject to } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (28)$$

$D^{-T} = D^{-1T}$ とすると, $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), \dots, k_n(\mathbf{x}))^T = D^{-T} \mathbf{x}$ を得る. これより, $D^{-T} \mathbf{x} = \mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-$, $\mathbf{y}^{+T} \mathbf{y}^- = 0$, $\mathbf{y}^+ \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y}^- \geq \mathbf{0}$ を満たす変数 $\mathbf{y}^+ = (y_1^+, \dots, y_n^+)^T$, $\mathbf{y}^- = (y_1^-, \dots, y_n^-)^T$ を導入すると, $k_j(\mathbf{x}) \geq 0$ のとき $k_j(\mathbf{x}) = y_j^+$, $k_j(\mathbf{x}) < 0$ のとき $k_j(\mathbf{x}) = -y_j^-$ となり, $\mathbf{x} = D^T(\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-)$ となるので, 問題 (28) は次の線形計画問題に帰着する.

$$\begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^n \bar{b}_j^R(1-h^0) y_j^+ - \sum_{j=1}^n \bar{b}_j^L(1-h^0) y_j^-, \\ \text{subject to} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = D^T(\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-), \quad \mathbf{y}^+ \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^- \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (29)$$

8 ファジィ凸多面体の場合

Inuiguchi と Tanino [9] がファジィ線形計画問題にファジィ凸多面体を導入した。ファジィ凸多面体は、 n 個以上の不明確な係数の線形分数関数に関する曖昧な知識により定められ、斜交ファジィベクトルはファジィ凸多面体の特別な場合になる。

ファジィ凸多面体 C は次のメンバシップ関数で定められる。

$$\mu_C(c) = \min_{k=1,2,\dots,v} L_k \left(\frac{\frac{w_k^T c + w_{0k}}{d_k^T c + d_{0k}} - \bar{q}_k}{\alpha_k} \right) \quad (30)$$

ただし、 L_k は先と同様な reference 関数で、 \bar{q}_k は k 番目の線形分数関数値 $(w_k^T \gamma + w_{0k}) / (d_k^T \gamma + d_{0k})$ の最もありうる値、 α_k は広がり、すなわち、 k 番目の線形分数関数値がどの程度 \bar{q}_k を超過するかを示している。ファジィ集合 C は有界と仮定されるので、任意の $h \in (0, 1]$ に対して、 h -レベル集合 $[C]_h = \{c \mid \mu_C(c) \geq h\}$ は有界となる。また、一般性を欠くことなく、任意の c に対して、 $d_k^T c + d_{0k} > 0$ と仮定できる。 $h \in [0, 1)$ に対して $L_k^*(h) = \sup\{r \mid L_k(r) > h\}$ 、 $h = 1$ に対して $L_k^*(h) = -\infty$ と定める。

線形分数関数は、和や差、線形関数、比を特殊な場合として含むので、ファジィ凸多面体は不明確な係数に関するこれらの情報が利用できる場合に有用である。 $n = 2$ のときのファジィ凸多面体のメンバシップ関数を示すと、図 6 のようになる。

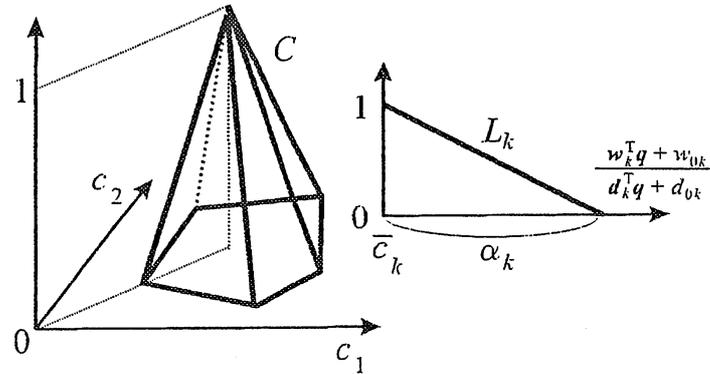


図 6: ファジィ凸多面体のメンバシップ関数

$w d_k^*(h) = w_k - (\bar{q}_k + \alpha_k L_k^*(h)) d_k$, $w d_{0k}^*(h) = w_{0k} - (\bar{q}_k + \alpha_k L_k^*(h)) d_{0k}$ とすると、式 (30) より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{cl}(C)_h &= \{c \mid w_k^T c + w_{0k} \leq (\bar{q}_k + \alpha_k L_k^*(h))(d_k^T c + d_{0k}), k = 1, 2, \dots, v\} \\ &= \{c \mid w d_k^*(h)^T c \leq -w d_{0k}^*(h), k = 1, 2, \dots, v\} \end{aligned} \quad (31)$$

$[C]_h \subseteq \mathbf{R}^n$ は有界であるので、式 (31) より、 $v > n$ となり、任意の $h \in [0, 1)$ に対して $[C]_h$, $\text{cl}(C)_h$ は凸多面体となる。

式 (22) の最初の等価関係より、問題 (4) は次の半無限線形計画問題に帰着される。

$$\text{minimize } z, \quad \text{subject to } Ax \leq b, \quad c^T x \leq z, \quad \forall c \in \text{cl}(C)_{1-h^0} \quad (32)$$

この問題は、2 種類の線形計画問題を交互に解く緩和法により解くことができる [9]。

参考文献

- [1] Hisdal, E.: Conditional possibilities independence and noninteraction. Fuzzy Sets and Systems 1(4), 283–297 (1978).

- [2] Inuiguchi, M.: A necessity measure optimization approach to linear programming problems with oblique fuzzy vectors. *Kybernetika* **42**(4), 441–452 (2006).
- [3] Inuiguchi, M.: Necessity measure optimization in linear programming problems with fuzzy polytopes. *Fuzzy Sets and Systems* **158**, 1882–1891 (2007).
- [4] Inuiguchi, M., Ramík, J.: Possibilistic linear programming: A brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. *Fuzzy Sets and Systems* **111**(1), 3–28 (2000).
- [5] Inuiguchi, M., Ramík, J., Tanino, T.: Oblique fuzzy vectors and their use in possibilistic linear programming. *Fuzzy Sets and Systems* **137**(1), 123–150 (2003).
- [6] Inuiguchi, M., Sakawa, M.: A possibilistic linear program is equivalent to a stochastic linear program in a special case. *Fuzzy Sets and Systems* **76**, 309–318 (1995).
- [7] Inuiguchi, M., Tanino, T.: Portfolio selection under independent possibilistic information. *Fuzzy Sets and Systems* **115**(1), 83–92 (2000).
- [8] Inuiguchi, M., Tanino, T.: Possibilistic linear programming with fuzzy if-then rule coefficients. *Fuzzy Optimization and Decision Making* **1**(1), 65–91 (2002).
- [9] Inuiguchi, M., Tanino, T.: Fuzzy linear programming with interactive uncertain parameters. *Reliable Computing* **10**(5), 357–367 (2004).
- [10] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E.: *Triangular Norms* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000).
- [11] Rommelfanger, H.: Fuzzy linear programming and applications. *European Journal of Operational Research* **92**(3), 512–527 (1996).
- [12] Rommelfanger H.: The advantages of fuzzy optimization models in practical use. *Fuzzy Optimization and Decision Making* **3**(4), 295–309 (2004).
- [13] Rommelfanger, H., Kresztfalvi, T.: Multicriteria fuzzy optimization based on Yager's parameterized t-norm. *Foundation of Computing and Decision Sciences* **16**(2), 99–110 (1991).
- [14] Słowiński, R., Teghem, J. eds.: *Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).
- [15] Stancu-Minasian, I. M.: *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984).
- [16] Tanaka, H., Ishibuchi, H.: Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership function. *Fuzzy Sets and Systems* **41**, 145–160 (1991).
- [17] Zadeh, L.A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Part 1, 2, and 3. *Information Sciences* **8**, 199–249; **8**, 301–357; **9**, 43–80 (1975).