

(非負整数値を取る確率変数の)確率母関数が有理関数になるときの確率分布

近畿大学経営学部教授 林 芳男 (Yoshio Hayashi)  
Faculty of Business Administration,  
Kinki University

本文:

1. はじめに 与えられた非負整数値を取る確率変数  $X$  の確率分布  $\{p_n\}$ ,  $p_n \equiv Pr(X=n)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )、の確率母関数  $P(s)$  が有理関数である場合を考える。即ち、

$$\textcircled{1} \quad P(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \frac{U(s)}{V(s)}$$

であるとする。ここに、 $V(s)$  と  $U(s)$  は互いに素な  $s$  の多項式、つまり、 $V(s)$  と  $U(s)$  は複素根を共有しない多項式でその分子  $U(s)$  の次元は  $N(\geq 0)$  で分母  $V(s)$  の次元は  $M(\geq 0)$  で  $V(s)$  の最高次の係数は 1 であるように調整されて与えられているとする。Feller (vol. 1, 1968 第 3 版) 第 X I 章 § 4 には  $N < M$ 、つまり、 $\textcircled{1}$  が真分数式でその分母の多項式  $V(s)$  の根がすべて実の単根である場合に  $p_n$  をそれらの根を使って表現する方法と  $n \rightarrow \infty$  のときの確率  $p_n$  の挙動が論じられている。その根が二重根である場合のその表現に与える影響についても言及されていてその章末の問題 25 には絶対値が最小のその根が重根である場合の挙動も論じられているからこの問題は解決済みなのかも知れない。しかし、本稿では  $N \geq M$  の場合や  $V(s)$  の根が虚根である場合も含めた一般の場合のその分布の表現と  $n \rightarrow \infty$  のときの挙動を厳密に論じる。言うまでもなく  $V(s)$  と  $U(s)$  は 実係数の  $s$  の多項式であると仮定して理論展開する。また、実際に確率母関数が有理関数になる確率分布の例を挙げその特徴についても論じる。

2. 一般の場合の確率分布の導出

$M=0$  である場合は  $P(s)$  が  $s$  の有限次元の多項式  $U(s)$  そのものである場合でその確率分布  $\{p_n\}$  は  $U(s)$  の係数にそのまま現れているので表題の問題は  $\textcircled{1}$  の表現がそのままで解決している。

そうでない場合、(つまり、 $M > 0$  の場合)、方程式  $V(s) = 0$  は (虚実を混ぜて)  $m$  個の異なる根  $s_1, s_2, \dots, s_m$  を持ちそれぞれの重複度は  $r_1, r_2, \dots, r_m$  であるとする。つまり、

$$\textcircled{2} \quad V(s) = (s - s_1)^{r_1} (s - s_2)^{r_2} \cdots (s - s_m)^{r_m}$$

と因数分解できるとする。したがって、

$$\textcircled{3} \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_m = M; U(s_i) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, m); i \neq j \text{ ならば } s_i \neq s_j$$

である。よって、 $P(s)$  は一意に部分分数展開ができて

$$\textcircled{4} \quad P(s) = \frac{\sum_{i=1}^m \tau_0^{(i)} + \tau_1^{(i)}(s_i - s) + \cdots + \tau_{r_i-1}^{(i)}(s_i - s)^{r_i-1}}{(s_i - s)^{r_i}} + \sum_{j=0}^{N-M} \rho_j s^j$$

と書くことができる。ここに、各  $i = 1, \dots, m$  に対して  $\tau_0^{(i)} \neq 0$  で上の二段目の  $\Sigma$  の項は  $N \geq M$  の場合にのみ現れる  $P(s)$  の多項式部分で  $N < M$  の場合は空であるとする。 $\textcircled{1}$  の分母の関数  $V(s)$  が虚根も持つ場合、それが実係数の多項式であるから、例えば、 $s_1$  が虚根であるとするとその共役根も存在してその重複度も同じになる。それが  $s_2$  であるとする  $r_2 = r_1$  で  $\tau_j^{(2)} = \tau_j^{(1)}$  ( $j = 0, 1, \dots, r_2$ ) となる。

一般に、帰納的に、任意の自然数  $k$  に対して  $|s| < 1$  に対して

$$\frac{1}{(1-s)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n$$

が成り立つ。このことを利用する。各  $t = 1, \dots, r$  に対して  $|s| < |s_i|$  の所で

$$\frac{1}{(s_i - s)^t} = \left(\frac{1}{s_i}\right)^t \frac{1}{(1 - s/s_i)^t} = \left(\frac{1}{s_i}\right)^t \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{s}{s_i}\right)^n$$

という級数展開が成り立つ。これらの展開式を④に代入することにより  $s^n$  の係数  $p_n$  は

$$\textcircled{5} \quad p_n = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\tau_0^{(i)}}{s_i^{r_i+n}} C_n + \frac{\tau_1^{(i)}}{s_i^{r_i-1+n}} C_n + \dots + \frac{\tau_{r_i-1}^{(i)}}{s_i^{1+n}} C_n \right) + \rho_n$$

であることが分かる。但し、最後の破線の下線を引いた項は  $n = 0, \dots, N-M$  の所だけで加える。そうでないとき、つまり、 $n > N-M$  ではその破線の下線部分は 0 であるとする。

各  $i = 1, \dots, m$  に対する  $s_i, r_i, \tau_j^{(i)} (j = 0, 1, \dots, r_i - 1)$  と  $\rho_j (j = 0, 1, \dots, N-M)$  を与えられた多項式  $V(s)$  と  $U(s)$  との関係を見つきたい。ただそれらの関係は Feller も指摘しているように数値計算上実用的なものではないかもしれない。

$\rho_j (j = 0, \dots, N-M)$  は  $U(s)$  を  $V(s)$  で割ったときの商の係数として現れる。それらは  $U(s)$  の最高次から  $M$  次までの係数であるからテイラーの定理により  $\rho_j = U^{(j+M)}(0)/(j+M)! (j = 0, \dots, N-M)$  で求まる。

各  $i = 1, \dots, m$  に対する  $\tau_0^{(i)}$  の決定：①と②から

$$\textcircled{6} \quad Q_i(s) \equiv (s_i - s)^{r_i} P(s) = (-1)^{r_i} U(s) / \prod_{j=1, j \neq i}^m (s - s_j)^{r_j}$$

である。この最右辺の関数は  $s = s_i$  で連続な関数であるから

$$\textcircled{7} \quad Q_i(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i} (s_i - s)^{r_i} P(s) = \frac{(-1)^{r_i} U(s_i)}{\dots}$$

$(s_i - s_1)^{r_1} (s_i - s_2)^{r_2} \dots (s_i - s_{i-1})^{r_{i-1}} (s_i - s_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (s_i - s_m)^{r_m}$  である一方で④よりこの値は  $\tau_0^{(i)}$  に等しいことが分かる。さて、⑦の最後の分母の式は  $V^{(r)}(s_i)/r_i!$  に等しい。よって、

$$\textcircled{8} \quad Q_i(s_i) = \tau_0^{(i)}; \text{ 即ち } U(s_i) = (-1)^{r_i} \tau_0^{(i)} V^{(r)}(s_i) r_i!$$

である。 $Q_i(s)$  は  $s \neq s_i$  なる  $s = s_1, s_2, \dots, s_m$  だけを極に持つ有理関数で  $s = s_i$  では連続である。更に、④から

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \frac{Q_i(s) - Q_i(s_i)}{s - s_i} = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{(s_i - s)^r P(s) - \tau_0^{(i)}}{s - s_i} = \tau_1^{(i)}$$

であることが分かる。つまり、 $Q_i(s)$  は  $s = s_i$  で微分可能で  $Q_i'(s_i) = \tau_1^{(i)}$  となる。一般的に④から  $Q_i(s)$  は  $s = s_i$  で何回でも微分可能でその高階の微分係数は  $k = 1, \dots, r_i - 1$  に対しては

$$Q_i^{(k)}(s_i) = (-1)^k k! \tau_k^{(i)} (k = 1, \dots, r_i - 1)$$

となる。即ち、 $\tau_k^{(i)} = (-1)^k Q_i^{(k)}(s_i)/k!$  である。

さて、 $n \rightarrow \infty$  のときの  $p_n$  の漸近的挙動について調べる。 $V(s) = 0$  の根の中で重複度が  $r_1$  である  $V(s) = 0$  の根  $s_1$  が絶対値が最小の根であるとする。先ず、 $s_1$  が実根である場合、Feller (vol. 1 第 3 版; 1968; 第 X I 章 § 4; 276 ↑ 7-277 ↓ 7) と同じ議論で

$$\textcircled{8} \quad p_n \sim \frac{\tau_0^{(1)} (n+r_1-1)}{s_1^{r_1+n} (r_1-1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であることが分かる。ここに、その右辺の分数式の隣の式は  ${}_{n+r_1-1}C_n = {}_{n+r_1-1}C_{r_1-1}$  と同じ

ものを表す。その右辺の式は⑤式の  $j=1$  の所の主要項 (leading term) なのであるが、他の項  $\frac{\tau_j^{(1)}}{s_1^{r_1-j+n}} {}_{n+r_1-j-1}C_n$  ( $j=1, \dots, r_1-1$ ) をその主要項  $\frac{\tau_0^{(1)}}{s_1^{r_1+n}} {}_{n+r_1-1}C_n$  で割った比率

が  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に向かうことは注意しておかなければならない。それはその組合せの数の比が 0 に向かうからである。そのことを二重根の場合で考えて見る。例えば、確率母関数が

$$\frac{a}{(2-s)^2} + \frac{b}{2-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a(n+1)}{2^n} + \frac{b}{2^n} \right\} s^n$$

である場合、その為にはその係数  $a, b$  は  $a+b=1$  なる正数でなければならないのであるが、それに対応する確率分布  $\{p_n\}$  は

$$p_n = \frac{a(n+1)}{2^n} + \frac{b}{2^n} \sim \frac{n+1}{2^n}$$

であることが分かる。つまり、 ${}_{n+r_1-j-1}C_n$  ( $j=1, \dots, r_1-1$ ) は  ${}_{n+r_1-1}C_n$  よりも  $n$  の多

項式として底次であるからである。

$s_1$  が虚根である場合、それに共役な根が存在する。例えば、それを  $s_2 = s_1$  とすると、そのときの  $p_n$  の漸近挙動は

$$\textcircled{9} \quad p_n \sim \left( \frac{\tau_0^{(1)}}{s_1^{r_1+n}} + \frac{\tau_0^{(1)}}{s_1^{r_1+n}} \right) \frac{n+r_1-1}{r_1-1} \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。しかし、これは形式的な論議であってこのような関係は後の考察により確率分布としては有り得ないことが判明する。

### 3. 確率母関数が有理関数になる場合

(1) 確率母関数が有理関数になる最も単純な場合はパラメータが  $p$  (=成功の確率) の幾何分布の確率母関数  $P(s)$  で

$$(3.1) \quad P(s) = \frac{p}{1-qs}$$

で与えられる。ここに、 $0 < p \leq 1$  で  $q \equiv 1-p$  でこの恒等式は  $|s| < 1/q$  である  $s$  に対してだけ成立する。この右辺の関数  $P_1(s)$  は  $s = 1/q$  だけを極に持つ、つまり、その点を除くすべての実数  $s$  上で定義される関数である。 $p=1$  のときの幾何分布は縮退して (それを分布として持つ確率変数  $X$  は確率 1 で  $X=0$ 、つまり、これは確率変数というよりは寧ろ確定した定数) でそのとき  $P_1(s)$  はすべての実数  $s$  で 1 の値を取る関数である ( $p=0$  の場合を無理やり考えならばこの幾何分布する確率変数  $X$  は絶対に成功に達しないのであるから確率 1 で  $X = \infty$  なるランダムな現象に対応している)。(3.1) の右辺の関数  $P_1(s)$  の ( $0 < p < 1$  のときの) グラフは図 1 のようになる。その収束の境界点 ( $s = \pm 1/q$ ) での  $P(s)$  の値は  $P(1/q-0) = +\infty$ 、 $P_1(1/q+0) = -\infty$ 、 $P_1(\pm\infty) = 0$ 、 $P(-1/q)$  は交代級数でそこでのその右辺の関数の値  $P_1(-1/q) = p/2$  はその(二つ有る)集積点の平均 (=中点) になっている。 $|s| \geq 1/q$  での  $P_1(s)$

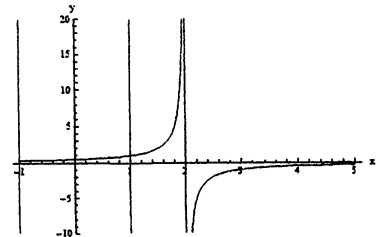


図 1 の位置

はこの幾何分布に対してどういう役割を果たしているのでしょうか？

(2) パラメータ (= 成功の確率) が  $p_1, p_2$  の異なる二つの幾何分布の混合 (mixture) したものの確率母関数  $P(s)$  は

$$(3.2) \quad P(s) = \frac{\lambda_1 p_1}{1 - q_1 s} + \frac{\lambda_2 p_2}{1 - q_2 s}$$

である。ここに、一般性を失うことなく  $0 < p_1 < p_2 \leq 1$  であると仮定する。  $q_1 \equiv 1 - p_1, q_2 \equiv 1 - p_2$  であるから  $1 \leq 1/q_1 < 1/q_2$  であることに注意しておこう。  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  はその二つの分布の混合確率、つまり、それは  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  なる与えられた正数である。(3.2)の右辺の計算を更に進めると

$$(3.2') \quad P(s) = \frac{(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) - (\lambda_1 p_1 q_2 + \lambda_2 p_2 q_1) s}{(1 - q_1 s)(1 - q_2 s)}$$

である。その右辺の関数  $P_2(s)$  の分子の零点は

$$r \equiv (\lambda_1 p_1 q_2 + \lambda_2 p_2 q_1) / (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)$$

で  $1 \leq 1/q_1 < r < 1/q_2$  であることが容易に分かる。(3.2')の右辺の関数のグラフの形状は図2のようになる。 $P_2(s)$  は  $s = 1/q_1$  と  $1/q_2$  を極点、つまり、その二点を除くすべての実数  $s$  上で定義される関数で、 $r$  を零点に持つ。(3.2')の恒等式は  $|s| < 1/q_1$  である  $s$  に対してだけ成立する。 $P_2(1/q_1 - 0) = +\infty, P_2(1/q_1 + 0) = -\infty$  ( $i = 1, 2$ )、 $P(-1/q_1)$  は交代級数でそこでのその分数関数の値はその(二つ有る)集積点の平均 (= 中点) になっている。 $|s| \geq 1/q_1$  での  $P_2(s)$  はこの確率分布に対してどういう役割を果たしているのでしょうか？ (3) Feller (1968, vol. 1; 第3版, § 4) が扱っている場合はその既約な有理関数表示の分母の関数が一般的な  $n$  個の異なる実根を持つ場合で、 $n$  個の異なる成功確率が  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$  である幾何分布の混合の確率母関数  $P(s)$  は

$$(3.3) \quad P(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k p_k}{1 - q_k s}$$

与えられる。ここに、 $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) は第  $k$  番目の幾何分布の混合確率で全部加えて  $\sum_k \lambda_k = 1$  となる正数である。この

右辺の関数を  $P_n(s)$  で表す。この式を整理して  $U_n(s)/V_n(s)$  の形で  $V_n(s) = \prod_k (1 - q_k s)$  の形になったとするとその分子の多項式  $U_n(s)$  は  $(n-1)$  次の  $s$  の多項式で零点  $r_k^{(n)}$  ( $1/q_1 < r_1^{(n)} < 1/q_2 < r_2^{(n)} < \dots < r_{n-1}^{(n)} < 1/q_n$ ) を持つ。しかも、各  $k = 1, 2, \dots, n-1$  に対して  $P_n(1/q_k - 0) = +\infty, P_n(1/q_k + 0) = -\infty, P_n(r_k^{(n)}) = 0$  で  $P_n(s)$  は区間  $(1/q_k, 1/q_{k+1})$  で単調増大で連続である(このことを数学的帰納法で示す)。そうだとすると

$$(3.4) \quad P_{n+1}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k p_k}{1 - q_k s} = (1 - \lambda_{n+1}) P_n(s) + \frac{\lambda_{n+1} p_{n+1}}{1 - q_{n+1} s}$$

$$= \frac{(1 - \lambda_{n+1}) U_n(s)}{V_n(s)} + \frac{\lambda_{n+1} p_{n+1}}{(1 - q_{n+1} s) V_n(s)}$$

$$= \frac{(1 - \lambda_{n+1}) U_n(s) (1 - q_{n+1} s) + \lambda_{n+1} p_{n+1} V_n(s)}{V_{n+1}(s)}$$

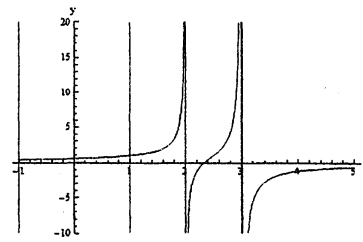


図2の位置

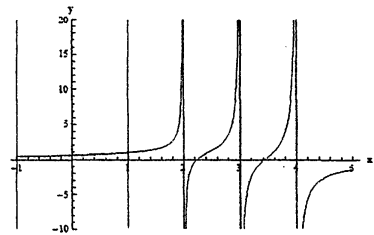


図3の位置

ここに、 $V_{n+1}(s) = V_n(s)(1 - q_{n+1}s) = \prod_{k=1}^{n+1} (1 - q_k s)$ である。この分子の式は  $s$  の  $n$  次

の多項式  $U_{n+1}(s)$  でありその零点を求めたい。

$U_{n+1}(s) = (1 - \lambda_{n+1})U_n(s)(1 - q_{n+1}s) + \lambda_{n+1}p_{n+1}V_n(s)$  である。分かっていることを整理しておく、 $\lambda_{n+1}$  は  $0 < \lambda_{n+1} < 1$  なる定数で  $U_n(s)$  は  $(n-1)$  次の多項式で  $1/q_1 < r_1^{(n)} < 1/q_2 < r_2^{(n)} < \dots < r_{n-1}^{(n)} < 1/q_n$  を満たす零点  $r_k^{(n)}$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) を持つ。 $p_{n+1} = 1 - q_{n+1}$  は  $p_n$  より大きな  $1$  より小さな定数である。 $1/q_n < 1/q_{n+1}$  であることに注意。 $r_k^{(n)} < 1/q_{n+1}$  であるから  $U_{n+1}(r_k^{(n)}) = \lambda_{n+1}p_{n+1}V_n(r_k^{(n)})$  となる。よって、各  $k=1, 2, \dots, n$  に対して：区間  $(1/q_k, 1/q_{k+1})$  上で  $P_{n+1}(s)$  が狭義に単調増大であることは  $P_{n+1}'(s) = \sum \lambda_k p_k q_k / (1 - q_k s)^2 > 0$  であることから明らかである。各  $k=1, 2, \dots, n-1$  に対して  $P_{n+1}(r_k^{(n)}) = \lambda_{n+1}p_{n+1} / (1 - q_{n+1}r_k^{(n)}) > 0$  である。また十分小さな正数  $\epsilon$  に対して  $P_{n+1}(1/q_k + \epsilon) = (1 - \lambda_{n+1})P_n(1/q_k + \epsilon) + \lambda_{n+1}p_{n+1} / (1 - q_{n+1}(1/q_k + \epsilon)) < 0$  ( $\because P_n(1/q_k + 0) = -\infty$ ) であるから中間値の定理により区間  $(1/q_k, r_k^{(n)})$  には  $P_{n+1}(s)$  の唯一つの零点が存在する。それを  $r_k^{(n+1)}$  とする。最後に区間  $(1/q_n, 1/q_{n+1})$  では  $P_{n+1}(1/q_n + 0) = -\infty$ 、 $P_{n+1}(1/q_{n+1} - 0) = +\infty$  であるからその間に  $P_{n+1}(s)$  の唯一つの零点  $r_n^{(n+1)}$  が存在する。以上で求めている主張が成立していることが分かる。

(4) 以上はその有理関数表示で分母の式が実の単根しか持たないときであったが、以下は重根が含まれる場合の取り扱いである。

まずは分母の根が実の二重根一つの場合：成功の確率が  $p (> 0)$  の幾何分布に関連してはその確率母関数  $P(s)$  は

$$(3.5) \quad P(s) = \frac{p^2}{(1 - qs)^2}$$

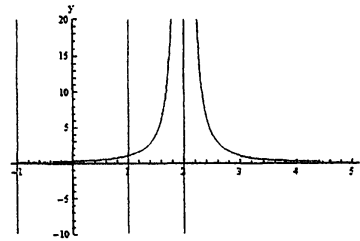


図4の位置

になる。これは明らかに確率分布  $p_n = p^2(n+1)q^n$

( $n=0, 1, 2, \dots$ )の確率母関数で二つの独立な同じパラメータを持つ幾何確率変数の和の分布である。その収束範囲は  $|s| < 1/q$  で(3.5)の等号はそのような  $s$  に対してだけ成立する。他方、その右辺の関数  $P_4(s)$  は  $s = 1/q$  だけを2位の極を持つ、つまり、その点を除くすべての実数  $s$  上で定義される関数である。 $p=1$ のときの幾何分布は縮退して(値  $0$  の確定変数  $X, Y$  の和は確定した  $0$  定数で)  $P(s)$  はすべての実数  $s$  で  $1$  の値を取る関数である。(3.5)の右辺の関数の ( $0 < p < 1$  のときの) グラフは図4のようになる。その収束の境界点 ( $s = \pm 1/q$ ) での  $P_4(s)$  の値は  $P_4(1/q \pm 0) = +\infty$ 、 $P_4(\pm\infty) = 0$ 、 $P(-1/q)$  は交代級数でそこでのその分数関数の値はその(二つ有る)集積点の平均(=中点)になっている。 $|s| \geq 1/q$  での  $P_4(s)$  はこの確率分布に対してどういう役割を果たしているのであろうか？

一般的に分母の根が実の  $k$  重根一つの場合：成功の確率が  $p$  の幾何分布に関連してはその確率母関数  $P(s)$  は

$$(3.6) \quad P(s) = \frac{p^k}{(1 - qs)^k}$$

になる。これは明らかに確率分布  $p_n = p^k \binom{n+k-1}{n} q^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )の確率母関数で

$k$ 個の独立な同じパラメータを持つ幾何確率変数の和の分布である。こういう分布を、私は、 $k$ 重幾何分布と呼ぶことにする。 $P(s)$ の収束範囲は $|s| < 1/q$ で(3.6)の等号はそのような $s$ に対してだけ成立する。他方、その右辺の関数、 $P_5(s)$ で表す、は $s = 1/q$ だけを $k$ 位の極に持つ、つまり、その点を除くすべての実数 $s$ 上で定義される関数である。 $P_5(s)$ は $s < 1/q$ では正值で $P_5(-\infty) = 0, P_5(1/q - 0) = \infty$ 、狭義単調増大である。 $s > 1/q$ でも $P_5(+\infty) = 0$ であるし、 $k$ が偶数のとき $P_5(s)$ は $P_5(1/q + 0) = \infty$ 、狭義単調減少で正值であるのに対して、 $k$ が奇数のときは $P_5(1/q + 0) = -\infty$ 、狭義単調増大で負値である。 $P_5(s)$ のグラフの形状は $k$ が奇数のときは図1と同じであり、 $k$ が偶数のときは図4と同じである。

(5) パラメータ (=成功の確率)  $p_1, p_2$ が異なる二重幾何分布と単純幾何分布の混合 (mixture) の確率母関数  $P(s)$  は

$$(3.7) \quad P(s) = \frac{\lambda_1 p_1^2}{(1 - q_1 s)^2} + \frac{\lambda_2 p_2}{1 - q_2 s}$$

である。その右辺の関数を  $P_6(s)$  で表す。(3.7)の等号が成り立つのは $|s| < \text{Min}\{1/q_1, 1/q_2\}$ のときだけである。 $P_6(s)$ を通分して整理すると

$$(3.7') \quad P_6(s) = \frac{\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2 - (\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1) s + \lambda_2 p_2 q_1^2 s^2}{(1 - q_1 s)^2 (1 - q_2 s)}$$

ここに、 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ は $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ なる正数である。この分母の式を $V_6(s)$ 、分子の式を $U_6(s)$ とおくと。 $U_6'(s) = -(\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1) + 2\lambda_2 p_2 q_1^2 s$ であるからその分子の式が最小になる $s$ の値 $s^*$ は

$$s^* \equiv (\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1) / (2\lambda_2 p_2 q_1^2)$$

である( $s^* = \lambda_1 p_1^2 q_2 / (2\lambda_2 p_2 q_1^2) + 1/q_1 > 1/q_1$ であることに注意、このことはその分子 $U_6(s)$ の最小点は $1/q_1$ よりも右側に有ることを意味している)。その最小値は

$$\begin{aligned} U_6(s^*) &= \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2 - (\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1)^2 / (2\lambda_2 p_2 q_1^2)^2 \\ &\quad + \lambda_2 p_2 q_1^2 (\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1)^2 / (2\lambda_2 p_2 q_1^2)^2 \\ &= \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2 - (\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1)^2 / (4\lambda_2 p_2 q_1^2) \\ &= -D / (4\lambda_2 p_2 q_1^2) \end{aligned}$$

である。ここに、 $D$ は判別式

$$\begin{aligned} D &\equiv (\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1)^2 - 4\lambda_2 p_2 q_1^2 (\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2) \\ &= \lambda_1^2 p_1^4 q_2^2 - 4\lambda_1 \lambda_2 p_1^2 p_2 q_1 (q_1 - q_2) \end{aligned}$$

又は

$$= \lambda_1 p_1^2 \{ \lambda_1 p_1^2 q_2^2 - 4\lambda_2 p_2 q_1 (q_1 - q_2) \}$$

である。 $U_6(s^*)$ の値が正ならば $U_6(s) = 0$ は実根を持たない、 $0$ ならば唯一の実根 $s^*$ (重

根)を持ち、負ならば二つの実根  $\frac{(\lambda_1 p_1^2 q_2 + 2\lambda_2 p_2 q_1) \pm \sqrt{D}}{2\lambda_2 p_2 q_1^2}$  を持つ。

関数 $P_6(s)$ のグラフの形状は $1/q_1 < 1/q_2$ であるか $1/q_2 < 1/q_1$ であるかに応じてそれぞれ図5、図6のようになる。特に、 $1/q_2 < 1/q_1$ の場合は $D > 0$ の場合だけで $1/q_1 < s$ での関

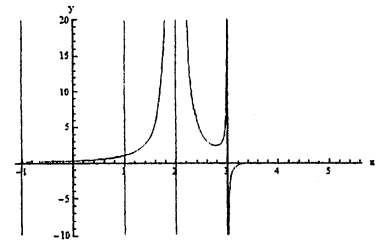


図5 ( $1/q_1 < 1/q_2$  :  
(a)  $D \geq 0$ の場合)の位置

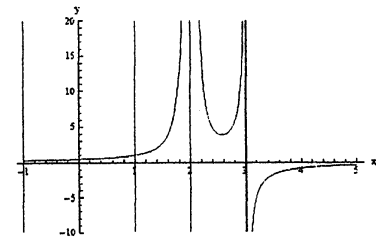


図5 ( $1/q_1 < 1/q_2$  :  
(b)  $D < 0$ の場合)の位置

数  $P_6(s)$  は最初減少で零点を通過しその形状は凸から凹になり十分大きな  $s$  の所では増加になることが  $P'_6(s)$  と  $P''_6(s)$  を実際に計算しても確認できる。図 5 (a) の作図で使った数値例は  $q_1 = 1/2, p_1 = 1/2, q_2 = 1/3, p_2 = 2/3, \lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.1$  の場合で分子  $U_6(s)$  の二根は  $s = 7/2$  と  $5$  である。その二根の間そのグラフの形状は上に凸で正で  $s > 5$  では負の値を取り  $s$  の無限遠点に向かってはその軸に下から近づいて行く。

同様な考察により、任意有限個の独立な多重幾何分布の混合の確率母関数は有理関数であることが分かる。

(5) 分母の二次関数が実根を持たない有理関数である

$$P(s) = \frac{ds + e}{as^2 + bs + c}$$

が確率母関数であるとする。仮定から  $a \neq 0, D \equiv b^2 - 4ac < 0$  である。  $P(0) = e/c$  であるから  $0 \leq e/c \leq 1$  でなければならない。そのためには先ず  $c \neq 0$  でなければならないがここでは一般性を失うことなく  $c = 1$  であるとする。更に、  $P(1) = 1$  であるから、その係数の間には  $(d+e)/(a+b+1) = 1$  という関係も成り立つ。したがって、これまでの条件を整理しておくとして： $a \neq 0, D = b^2 - 4a < 0, 0 \leq e \leq 1, d+e = a+b+1$  を満足する確率母関数

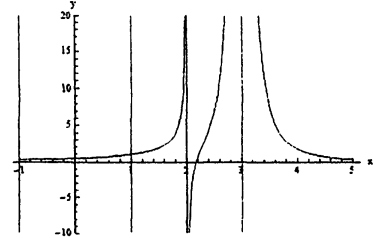


図 6 ( $1/q_2 < 1/q_1 : D > 0$  の場合だけである) の位置

$$(3.8) \quad P(s) = \frac{ds + e}{as^2 + bs + 1}$$

が存在するのかという問題になる。

さて、その分母の二次関数  $V(s) \equiv as^2 + bs + 1$  は複素根  $\alpha + i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ) を持つのであるからその共役複素数  $\alpha - i\beta$  もまたその根となり

$$V(s) = (1 - s/(\alpha + i\beta))(1 - s/(\alpha - i\beta))$$

と因数分解できる。これを展開して  $s^2$  と  $s$  の係数を比較することで  $a = 1/(\alpha^2 + \beta^2) > 0, b = -2\alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$  であることが分かる。

$$(3.9) \quad P(s) = \frac{\gamma + i\delta}{1 - s/(\alpha + i\beta)} + \frac{\gamma - i\delta}{1 - s/(\alpha - i\beta)}$$

であるとする

$$= \frac{2\gamma - 2(\beta\delta - \alpha\gamma)s/(\alpha^2 + \beta^2)}{(1 - s/(\alpha + i\beta))(1 - s/(\alpha - i\beta))} + \frac{2\gamma - 2(\beta\delta - \alpha\gamma)s/(\alpha^2 + \beta^2)}{(1 - s/(\alpha + i\beta))(1 - s/(\alpha - i\beta))}$$

となる。よって、  $e = 2\gamma (= P(0) \geq 0)$  でなければならないし  $d = -2(\beta\delta - \alpha\gamma)/(\alpha^2 + \beta^2)$  である。さて、  $r \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \omega \equiv (\alpha + i\beta)/r \equiv \cos\theta + i\sin\theta$  (この偏角  $\theta$  は与えられた  $\alpha, \beta$  の符号に応じて  $0 \leq \theta < 2\pi$  であるように取る) とおく。但し、  $\theta = 0$  の場合は  $\beta = r\sin\theta = 0$  の場合で分母の二次式が実根を持つ場合に相当するからここでは対象外である。

$P(s)$  の無限級数展開は  $|s/(\alpha \pm i\beta)| < 1$  のとき、つまり、  $|s| < r$  のときかつそのときに限り収束し

$$P(s) = \frac{\gamma + i\delta}{1 - s/(r\omega)} + \frac{\gamma - i\delta}{1 - s/(r\bar{\omega})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1/r)^n \gamma (\omega^n + \bar{\omega}^n) s^n + i \sum_{n=0}^{\infty} (1/r)^n \delta (\omega^n - \bar{\omega}^n) s^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1/r)^n 2(\gamma \cos n\theta + \delta \sin n\theta) s^n$$

さて、 $r' \equiv \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} > 0$ とおき $\theta'$ を $\sin \theta' = \gamma/r'$ 、 $\cos \theta' = \delta/r'$ なる角度 $0 \leq \theta' < 2\pi$ であるとする

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1/r)^n 2r' \sin(\theta' + n\theta) s^n$$

と展開できることが分かる( $s=1$ がその収束半径内に含まれるのであるからこの級数が任意の $\theta, \theta'$ に対して収束するためには

$$1 < r \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

であることが必要十分である)。これは数列 $p_n = 2r' \sin(\theta' + n\theta)/r^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )の母関数である。これが確率母関数であるためには $p_n \geq 0$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )でなければならないのであるが、それはすべての $n=0, 1, 2, \dots$ に対して $0 \leq (\theta' + n\theta) \pmod{2\pi} \leq \pi$ である場合である。しかし、それは $\theta=0$ の場合に限りこの議論では対象外になる。何故ならば $0 < \theta < 2\pi$ の場合： $\{(\theta' + n\theta) \pmod{2\pi} : n=0, 1, 2, \dots\}$ は① $\theta$ が $\pi$ の有理数倍のとき等間隔に並ぶ有限個の数の集合であり、②そうでない場合は可算個の稠密な集合である。いずれにしてもその $p_n$ には負になるものも含まれるからこの場合は確率母関数ではないことが分かる。

虚根が重根として現れる場合も同様に確率母関数ではないことが分かる。

(6) パラメータ(=成功の確率)が $p_1, p_2$ の異なる二つの独立な幾何分布の畳み込みをした分布の確率母関数 $P(s)$ は

$$(3.10) \quad P(s) = \frac{p_1 p_2}{(1 - q_1 s)(1 - q_2 s)}$$

である。ここに、一般性を失うことなく $0 < p_1 < p_2 \leq 1$ であると仮定する。(3.10)の恒等式は $|s| < 1/q_1$ である $s$ に対してだけ成立する。右辺の関数のグラフの形状は図7のようになる。この関数を部分分数に展開すると

$$P(s) = \frac{p_2 q_1}{q_1 - q_2} \cdot \frac{p_1}{1 - q_1 s} - \frac{p_1 q_2}{q_1 - q_2} \cdot \frac{p_2}{1 - q_2 s}$$

となる訳であるがこれはもはやその二つの幾何分布の混合ではないことは明白である。これを級数展開して得られる一般項は

$$p_n = \frac{p_2 q_1}{q_1 - q_2} p_1 q_1^n - \frac{p_1 q_2}{q_1 - q_2} p_2 q_2^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

となる。これが非負で確率分布であることはその構成の仕方から明白である。

参考文献：William Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I Third Edition, Revised Printing, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

謝辞：本稿の図は大阪工大の技術マネジメント学科の中西真悟先生にMathematicaで作成して頂いてこのマイクロソフトのワード原稿に挿入して頂きました。この場を借りてお礼申し上げます。読者は図中の極の位置などは、例えば、図1では $1/q$ であるなどとして文中の記号で置き換えてお読み下さるようお願いいたします。

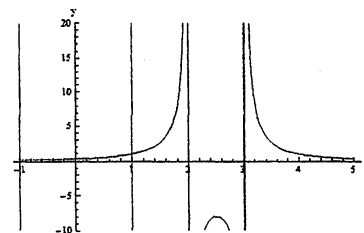


図7