

# 参照効果を考慮した期間末最適割引販売問題に関する 数理的一考察

甲南大学 知能情報学部 小出 武 (Takeshi KOIDE)

Faculty of Intelligence and Informatics, Konan University

大阪大学大学院 経済学研究科 三道 弘明 (Hiroaki SANDOH)

Graduate School of Economics, Osaka University

## 1 まえがき

本研究では、生鮮食料品をはじめとする腐敗しやすい商品の割引販売問題を考える。これらの商品は翌日以降に販売ができない場合、閉店間際に割引価格で販売されることがある。この割引販売によって売り手は収益を増やし、廃棄費用を減少させることができる。しかしこの割引価格によって、内部参照価格と呼ばれる消費者のその商品に対する心的な相場価格が低下し、定価販売するその商品に対する今後の需要が減少し、売り手の将来の利益が減少する可能性がある。

著者らはこれまで消費者の内部参照価格の変化を考慮した長期的な割引販売問題に関する数理モデルを構築し、動的計画法によって最適販売価格を求める方法を示した [1]。しかしその方法では計画期間における在庫量が既知である必要があり、また需要関数も確率要因を含まない確定型であった。これらの問題を解決することを目標として、本研究では計画期間を 1 期間に限定して、在庫量と需要量に確率要因を含ませたときの期待利益関数の形状と、期待利益を最大にする最適販売価格の存在範囲について考察する。

## 2 モデル設定

独占市場の 1 商品を扱う。対象商品は 1 店舗でのみ販売されている。計画期間は当面、単一期間の 1 日に限定する。本モデルにおける決定変数である販売価格を  $p$  とし、消費者の参照価格を  $r$  とする。販売価格  $p$  の設定可能な範囲を  $[p_L, p_H]$  とする。販売開始時点での在庫量  $Q$  は、 $Q = q + \varepsilon_q$  と書けるものとする。ここで  $q$  は  $Q$  の平均、確率変数  $\varepsilon_q$  は平均 0、範囲は  $[q_L, q_H]$  とする。また調達単価を  $c > 0$ 、品切単価を  $s > 0$ 、廃棄単価を  $h$  とする。廃棄単価  $h$  が正の場合は廃棄コスト、負の場合は残存価値を表す。 $h < 0$  の場合、通常残存価値より安価では販売しないため  $p_L > -h$ 、つまり  $p \in [p_L, p_H]$  に対して  $p + h > 0$  とする。

需要関数  $D(p, r)$  は参照効果と確率要因を含み、次のように書けるとする。

$$D(p, r) = d(p, r) + \varepsilon_d \quad (1)$$

$$d(p, r) = \begin{cases} D_G(p, r) & p < r \text{ のとき} \\ D_L(p, r) & p \geq r \text{ のとき} \end{cases} \quad (2)$$

$$D_G(p, r) = \beta_0 - \beta_1 p + \beta_{2G}(r - p) = (\beta_0 + r\beta_{2G}) - (\beta_1 + \beta_{2G})p \equiv B_{0G}(r) - B_{1G}p \quad (3)$$

$$D_L(p, r) = \beta_0 - \beta_1 p + \beta_{2L}(r - p) = (\beta_0 + r\beta_{2L}) - (\beta_1 + \beta_{2L})p \equiv B_{0L}(r) - B_{1L}p \quad (4)$$

ここで  $\beta_{2G}, \beta_{2L} \geq 0$  は、それぞれ参照価格  $r$  と比較して利得 ( $p < r$ ) のとき、損失 ( $p \geq r$ ) のときの参照効果の大きさを表す。  $\varepsilon_d$  は需要関数の確率変動部分で、平均が 0、範囲が  $[d_L, d_H]$ 、販売価格  $p$  や参照価格  $r$  と独立であるとする。  $\beta_{2G}$  と  $\beta_{2L}$  は消費者の参照効果の性質を表し、  $\beta_{2G} < \beta_{2L}$  のときは損失回避型、  $\beta_{2G} = \beta_{2L}$  のときは損失中立型、  $\beta_{2G} > \beta_{2L}$  のときは損失愛好型と呼ばれる。

新しい確率変数  $\varepsilon = \varepsilon_d - \varepsilon_q$  を定義する。  $\varepsilon$  の平均は 0、範囲は  $[\varepsilon_L, \varepsilon_H] \equiv [d_L - q_H, d_H - q_L]$  となる。  $\varepsilon$  の確率密度関数、確率分布関数をそれぞれ  $f(\cdot), F(\cdot)$  とする。

### 3 需要関数と在庫量が確定的である場合での最適価格

#### 3.1 消費者が損失中立型の場合

ここでは需要や在庫量が確定型、すなわち  $\varepsilon_q = \varepsilon_d = 0$  で、消費者が損失中立型、すなわち  $\beta_{2G} = \beta_{2L} \equiv \beta_2$  のときについて考える。このとき、需要関数  $D(p, r)$  は、

$$D(p, r) = d(p, r) = (\beta_0 + r\beta_2) - (\beta_1 + \beta_2)p \equiv B_0(r) - B_1p \quad (5)$$

となる。また、  $d(p, r) = q$  を満たす  $p$  を  $\bar{p}(q, r)$  とすると、

$$\bar{p}(q, r) = \frac{B_0(r) - q}{B_1} \quad (6)$$

となる。

在庫量  $Q = q$  の状況で、参照価格が  $r$  の消費者に対して価格  $p$  で商品を販売したときの利益  $\Pi(p, q, r)$  は、

$$\Pi(p, q, r) = \begin{cases} \pi_\Theta(p, q, r) & \text{if } p < \bar{p}(q, r) \\ \pi_\Lambda(p, q, r) & \text{if } p \geq \bar{p}(q, r) \end{cases} \quad (7)$$

$$\pi_\Theta(p, q, r) = pq - cq - s[D(p, r) - q] \quad (8)$$

$$\pi_\Lambda(p, q, r) = pD(p, r) - cq - h[q - D(p, r)] \quad (9)$$

となる。  $\Pi(p, q, r)$  は、  $\Pi(p, q, r) = \pi_\Theta(p, q, r)$  となる  $p < \bar{p}(q, r)$  の範囲で単調増加、  $\Pi(p, q, r) = \pi_\Lambda(p, q, r)$  となる  $p \geq \bar{p}(q, r)$  の範囲で凹である。

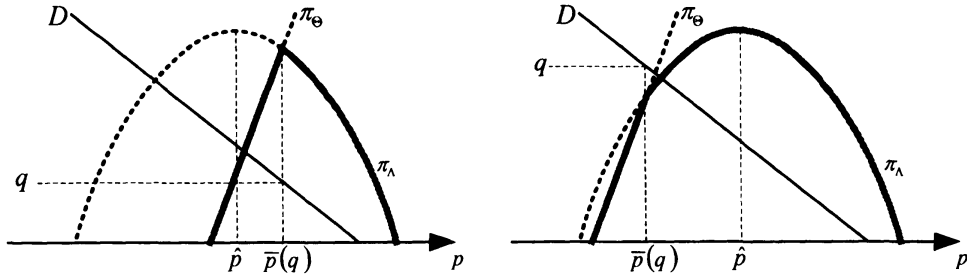


図 1: 確定的需要・在庫, 損失中立型での利益. 左:  $\hat{p}(r) \leq \bar{p}(q, r)$ , 右:  $\hat{p}(r) > \bar{p}(q, r)$

$\pi_{\Lambda}(p, q, r)$  が極値をとるときの価格を  $\hat{p}(r)$  とすると,

$$\hat{p}(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{B_0(r)}{B_1} - h \right) \quad (10)$$

となる.  $\hat{p}(r)$  は  $\beta_2$  について単調減少である.

図 1 に利益  $\Pi(p, q, r)$  の形状を示した. 設定可能な価格に制限がなければ, 最適価格  $p^*$  は  $\hat{p}(r)$  と  $\bar{p}(r)$  の大きい方になることが確認できる. この結果から, 以下の補題が得られる.

**補題 1** 需要関数と在庫量が確定的で, 消費者が損失中立型である場合, 利益  $\Pi(p, q, r)$  を最大にする価格  $p^*$  は次の式で与えられる.

$$p^* = \min[\max\{\hat{p}(r), \bar{p}(q, r), p_L\}, p_H] \quad (11)$$

### 3.2 消費者が損失中立型でない場合

消費者が損失中立型でない場合, すなわち  $\beta_{2G} \neq \beta_{2L}$  の場合を考える. 前節と同様,  $D(p, r) = q$  を満たす  $p$  を  $\bar{p}(q, r)$  とすると,

$$\bar{p}(q, r) = \begin{cases} \frac{B_{0G}(r)-q}{B_{1G}} \equiv \bar{p}_G(q, r) & \text{if } D(r, r) < q \\ \frac{B_{0L}(r)-q}{B_{1L}} \equiv \bar{p}_L(q, r) & \text{if } D(r, r) \geq q \end{cases} \quad (12)$$

となる. 一方, 在庫量余剰時の利益  $\Pi_{\Lambda}(p, q, r)$  は以下のように書ける.

$$\pi_{\Lambda}(p, q, r) = \begin{cases} \min\{\pi_{\Lambda G}(p, q, r), \pi_{\Lambda L}(p, q, r)\} & \text{if } \beta_{2G} < \beta_{2L} \\ \max\{\pi_{\Lambda G}(p, q, r), \pi_{\Lambda L}(p, q, r)\} & \text{if } \beta_{2G} > \beta_{2L} \end{cases} \quad (13)$$

ここで  $\pi_{\Lambda G}(p, q, r)$ ,  $\pi_{\Lambda L}(p, q, r)$  は,  $\beta_2 = \beta_{2G}$ ,  $\beta_{2L}$  としたときの  $\pi_{\Lambda}(p, q, r)$  である.  $\pi_{\Lambda G}(p, q, r)$ ,  $\pi_{\Lambda L}(p, q, r)$  は,  $p = r$  にて共有点を持つ.  $\pi_{\Lambda G}(p, q, r)$ ,  $\pi_{\Lambda L}(p, q, r)$  が極値をとるときの価格をそれぞれ  $\hat{p}_G(r)$ ,  $\hat{p}_L(r)$  とする.

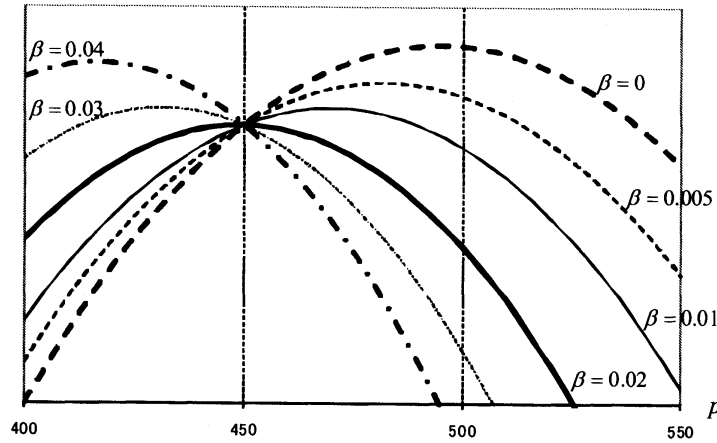


図 2: 参照効果の大きさ  $\beta_2$  による利益  $\Pi(p, q, r)$  の影響 ( $r = 450$ )

一般に  $p = \hat{p}(r)$  としたときの利益  $\pi_\Lambda(\hat{p}(r), q, r)$  は, 式 (9), (10) より,

$$\pi_\Lambda(\hat{p}(r), q, r) = \frac{\{B_0(r) + B_1 h\}^2}{4B_1} - (c + h)q \quad (14)$$

となる. ここで,  $\hat{p}(r) = r$  を満たす  $\beta_2$  を  $\bar{\beta}_2$  とすると, 式 (10) より

$$\bar{\beta}_2 = \frac{\beta_0 - \beta_1(h + 2r)}{h + r} \quad (15)$$

となる. このとき,

$$\beta_2 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \bar{\beta}_2 \implies \frac{\partial \pi_\Lambda(\hat{p}(r), q, r)}{\partial \beta_2} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (16)$$

が成立する.  $\hat{p}(r)$  は  $\beta_2$  について単調減少であるので,  $\pi_\Lambda(p, q, r)$  の頂点の座標  $(\hat{p}(r), \pi_\Lambda(\hat{p}(r), q, r))$  は,  $\beta_2 \leq \bar{\beta}_2$  のときは  $\beta_2$  が大きくなるほど左下方向に移動して点  $(r, \pi_\Lambda(r, q, r))$  に近づき,  $\beta_2 > \bar{\beta}_2$  のときは点  $(r, \pi_\Lambda(r, q, r))$  から左上方向に移動する. この様子を図 2 に示した.

図 2 と式 (13) より, 消費者が損失回避型の場合 ( $\beta_{2G} < \beta_{2L}$ ) の  $\Pi_\Lambda(p, q, r)$  は図 3, 消費者が損失愛好型の場合 ( $\beta_{2G} > \beta_{2L}$ ) の  $\Pi_\Lambda(p, q, r)$  は図 4 のようになる. 消費者が損失回避型の場合は利益関数が常に単峰型であり, 消費者が損失愛好型の場合は  $\hat{p}_L(r) < r < \hat{p}_G(r)$  のときは双峰型, それ以外は単峰型である.

ここで, 集合  $P_1^*, P_2^*$  を以下のように定義する.

$$P_1^* = \begin{cases} \{\hat{p}_G(r), \hat{p}_G(r)\} & \text{if } \hat{p}_G(r) \leq r, \hat{p}_L(r) \geq r \\ \{\hat{p}_G(r)\} & \text{if } \hat{p}_G(r) \leq r, \hat{p}_L(r) < r \\ \{\hat{p}_L(r)\} & \text{if } \hat{p}_G(r) > r, \hat{p}_L(r) \geq r \\ \{r\} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

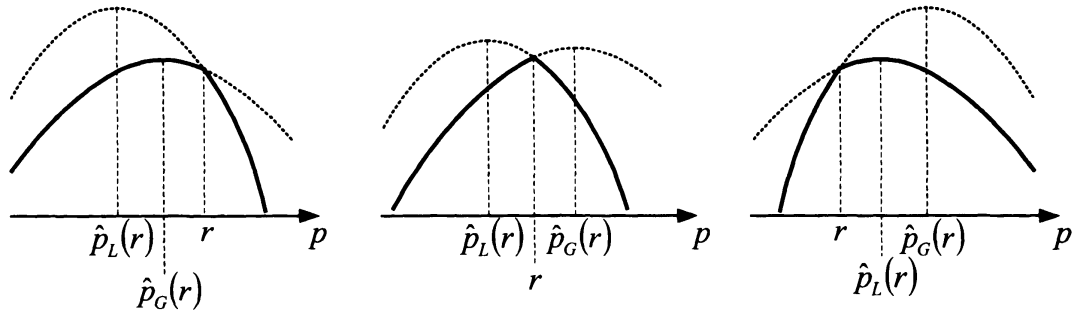


図 3: 確定的需要・在庫, 損失回避での利益. 左:  $\hat{p}_L(r) < \hat{p}_G(r) \leq r$ , 中:  $\hat{p}_L(r) \leq r \leq \hat{p}_G(r)$ , 右:  $r \leq \hat{p}_L(r) < \hat{p}_G(r)$

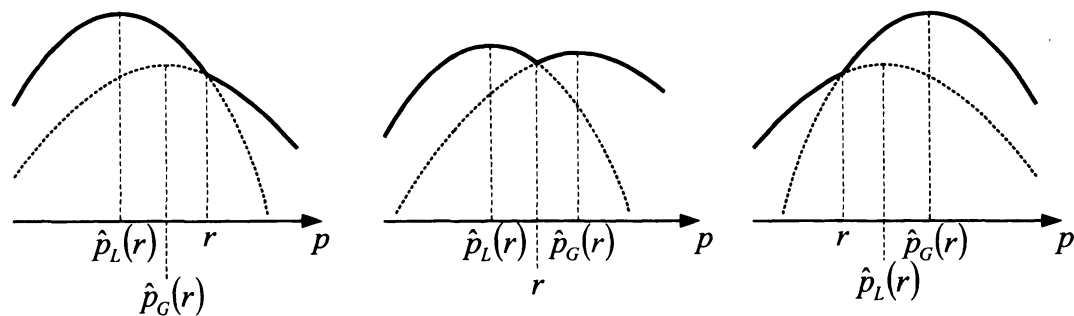


図 4: 確定的需要・在庫, 損失愛好での利益. 左:  $\hat{p}_G(r) < \hat{p}_L(r) \leq r$ , 中:  $\hat{p}_G(r) \leq r \leq \hat{p}_L(r)$ , 右:  $r \leq \hat{p}_G(r) < \hat{p}_L(r)$

$$P_2^* = \left\{ \min[ \max\{p, \bar{p}(q, r), p_L\}, p_H] \mid p \in P_1^* \right\} \quad (18)$$

$P_1^*$  は設定可能な価格に制限がない場合に最適価格となりうる価格の集合,  $P_2^*$  は価格の上限・下限を考慮した場合に最適価格となりうる価格の集合である. これらを用いると, 損失中立でない消費者に対する最適価格  $p^*(q, r)$  について, 以下の定理が成立する.

**定理 2** 需要関数と在庫量が確定的で, 消費者が損失中立でない場合, 利益  $\Pi(p, q, r)$  を最大にする価格  $p^*(q, r)$  は以下の式で与えられる.

$$p^*(q, r) = \operatorname{argmax}_{p \in P_2^*} \Pi(p, q, r) \quad (19)$$

## 4 需要関数と在庫量が確率的である場合の最適価格

### 4.1 消費者が損失中立型の場合

[2]に倣って、新しい変数  $z = q - d(p, r)$  を定義すると、

$$Q - D(p, r) = z - \varepsilon \quad (20)$$

と書ける。すると期待利益  $\Pi(p, q, r)$  は

$$\Pi(p, z, r) = pd(p, r) - cq - h \int_{z_L}^z (z - u)f(u)du - (p + s) \int_z^{z_H} (u - z)f(u)du \quad (21)$$

と書ける。期待余剰量を  $\Lambda(z)$ 、期待不足量を  $\Theta(z)$  とすると、期待利益  $\Pi(p, q, r)$  は、

$$\Pi(p, q, r) = \Psi(p, r) - L(p, z) \quad (22)$$

$$\Psi(p, r) = (p - c)d(p, r) \quad (23)$$

$$L(p, z) = (c + h)\Lambda(z) + (p - c + s)\Theta(z) \quad (24)$$

$$\Lambda(z) = \int_{z_L}^z (z - u)f(u)du \quad (25)$$

$$\Theta(z) = \int_z^{z_H} (u - z)f(u)du \quad (26)$$

と書ける。 $\Psi(p, r)$  は商品の過不足リスクなし利益で、 $L(p, z)$  は商品の過不足によるコストである。

$p + h > 0$  の仮定から  $\Pi(p, q, r)$  は  $p$  に関して凹関数であり、唯一の極大値  $\hat{p}(q, r)$  を持つことが示される。ここで  $\hat{p}(q, r)$  は、

$$B_0(r) - (p - s)B_1 - (p + h + s)B_1F(z) - \Theta(z) = 0 \quad (27)$$

の唯一の解である。この結果から、以下の補題が得られる。

**補題 3** 需要関数と在庫量が確率的で、消費者が損失中立型である場合、期待利益  $\Pi(p, z, r)$  を最大にする価格  $p^*$  は次の式で与えられる。

$$p^* = \min[\max\{\hat{p}(q, r), p_L\}, p_H] \quad (28)$$

### 4.2 消費者が損失中立型でない場合

消費者が損失中立型でない場合、すなわち  $\beta_{2G} \neq \beta_{2L}$  の場合において、参照効果の大きさ  $\beta_2$  が期待利益  $\Pi(p, q, r)$  に及ぼす影響を考える。このとき、

$$\frac{\partial \Pi(p, q, r)}{\partial \beta_2} = -(p - r) \{(p + h + s)F(z) - s\} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi(p, q, r)}{\partial \beta_2^2} = -(p - r)^2 (p + h + s) f(z) < 0 \quad (30)$$

となるので,

$$(p + h + s)F(z) > s \quad (31)$$

ならば,

$$p \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} r \iff \frac{\partial \Pi(p, q, r)}{\partial \beta_2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad (32)$$

が成立する.  $p = r$  のときの期待利益  $\Pi(r, q, r)$  は  $\beta_2$  に関わらず一定であるので,  $\beta_2 = \beta_{2G}, \beta_{2L}$  のときに任意の  $p \in [p_L, p_H]$  について式 (31) が成立するならば,  $\beta_2 = \beta_{2G}, \beta_{2L}$  のときに  $\Pi(p, q, r)$  を最大にする点  $(\hat{p}_L(q, r), \Pi(\hat{p}_L(q, r), q, r))$ ,  $(\hat{p}_G(q, r), \Pi(\hat{p}_G(q, r), q, r))$  の位置は図 3, 4 と同様の結果となる. よって, 需要関数と在庫量が確率的な場合における最適価格について以下の定理が成立する.

**定理 4** 需要関数と在庫が確率的で, 消費者が損失中立型でない場合,  $\beta_2 = \max(\beta_{2L}, \beta_{2G})$ ,  $p = p_L$  において式 (31) が成立するならば, 期待利益  $\Pi(p, q, r)$  を最大にする価格  $p^*(q, r)$  は定理 2 と同様, 式 (19) で与えられる.

## 5 多期間問題への展開

本章では, 計画期間が第 0 日から第  $T - 1$  日までの  $T$  日間であるときに,  $T$  日間での期待利益の現在価値を最大化するための最適な価格  $\{p_0, p_1, \dots, p_{T-1}\}$  を求める問題を考える. 第  $t$  日目における在庫量を  $Q_t$  はその平均を  $q_t$  として  $Q_t = q_t + \varepsilon_q$  と書けるとする. 需要関数は  $T$  日間一定であるとする.

第  $t$  日目における消費者の参照価格  $r_t$  は, それまでの販売価格によって変化する. ここでは, 参照価格モデルを扱った従来の研究 [4, 6, 7] で用いられたモデルを採用された指数平滑法を採用する. すなわち, 第  $t$  日目における参照価格  $r_t$  は, 前日での参照価格  $r_{t-1}$  と販売価格  $p_{t-1}$  によって以下のように決定される.

$$r_t = \alpha r_{t-1} + (1 - \alpha)p_{t-1} \quad (33)$$

ここで,  $\alpha$  はスムージングパラメータで, 消費者が過去の販売価格を記憶する強さを表す. 第 0 日目における参照価格  $r_0$  は所与とする.

このとき,  $T$  日間での利益の現在価値を最大化する問題の目的関数は

$$\max_{\{p_t\}} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \Pi(p_t, q_t, r_t) \quad (34)$$

となる. 制約条件は式 (33) と価格の設定可能な範囲である  $p_t \in [p_L, p_H]$  である.

第  $t$  日目の参照価格  $r_t$  に関する期待利益  $\Pi(p_t, q_t, r_t)$  の性質として, 以下の補題が成立する.

**補題 5** 需要関数と在庫が確率的で, 消費者が損失中立型でない場合,  $\beta_2 = \max(\beta_{2L}, \beta_{2G})$ ,  $p = p_L$ ,  $q = \min(q_0, q_1, \dots, q_{T-1})$  において式 (31) が成立するならば, 第  $t$  日目における期待利益  $\Pi(p_t, q_t, r_t)$  は参照価格  $r_t$  に対して単調増加である.

補題5から、以下の定理が成立する。定理6より、最適価格  $\{p_t\}$  を探索する範囲を縮小することができる。

**定理 6** 需要関数と在庫が確率的で、消費者が損失中立型でない場合、 $\beta_2 = \max(\beta_{2L}, \beta_{2G})$ ,  $p = p_L$ ,  $q = \min(q_0, q_1, \dots, q_{T-1})$  において式(31)が成立するならば、式(19)で与えられる価格  $p^*(q_t, r_t)$  は多期間問題における第  $t$  日目の最適価格  $p_t^*(q_t, r_t)$  の下限である。

## 6 まとめ

本研究では、需要関数と在庫量に確率要因を含むケースにおいて、消費者の参照効果も考慮した期間末最適割引価格について、数理的に考察した。計画対象が単一期間の場合、消費者が損失中立型であれば期待利得が凹関数になり、消費者が損失中立型でなくてもある必要条件を満たせば、期待利得が二つの凹関数の最大/最小になることを示した。対象期間が多期間の場合は、ある条件のもとで、単一期間問題での最適価格が多期間問題での最適価格の下限になることを示した。

今後の課題として、多期間問題に対する最適解の具体的な解法スキームの開発、実用を念頭にしたモデルの修正などが挙げられる。

## 参考文献

- [1] T. Koide and H. Sandoh, Reference Effect and Inventory Constraint on Optimal Pricing for Daily Perishable Products, *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM2009)*, 370–374, 2009.
- [2] N. C. Petruzzi and M. Dada, Pricing and the Newsvendor Problem: A Review with Extensions, *Operations Research*, 47(2), 183–194, 1999.
- [3] E. A. Greenleaf, The Impact of Reference Price Effects on the Profitability of Price Promotions, *Marketing Science*, 14(1), 82–104, 1995.
- [4] P. K. Kopalle, A. G. Rao and J. L. Assuncao, Asymmetric Reference Price Effects and Dynamic Pricing Policies, *Marketing Science*, 15(1), 60–85, 1996.
- [5] I. Popescu and Y. Wu, Dynamic Pricing Strategies with Reference Effects, *Operations Research*, 55(3), 413–429, 2007.