数理解析研究所講究録
第 1734 巻 2011 年 244-250

割引率が経過時間に依存する売り出しの n 人タイミングゲーム

近畿大学・経営学部　寺岡義伸（Yoshinobu Teraoka）
Faculty of Business Admiration,
Kinki University

Abstract

本報告では、あるクラスのタイミング型 n 人非 0 和ゲームを提案し、Nash 平衡の意味での解を具体的に導く．ある市場において、周期的に収穫できる生産物の販売権を n 企業（プレーヤー）が寡占し、互いにこの生産物の売り出しのタイミングを競っている．この生産物の価格は各周期内において時間の経過に伴って単峰状に変化するか、n 人に誰か一人が売りに出すと、不連続的に下落し、その後はまた時間の経過に伴って、売り出しが無かった時と相似な形状で変動する。そして、下落に伴う価格の割引率は経過時間に依存する．n 企業とも各期の終わりまでには、自分は権利を持つ生産物を売ってしまわなければならない．各プレーヤーに取っての売り出しのタイミング、すなわち、他の n-1 人の売り出し時刻を考慮に入れた上で、自分に取って最適な売り出し時刻を決めることが目的となる．n 人とも、誰も売り出していない時の価格が上昇している時間帯に，自分の行動時刻を限定することが平衡につながることが示される．

1．　はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする N 人非 0 和ゲームである

N 人のプレーヤー（Player 1,…,n）が，小豆や大豆のような生産物の販売権をある市場で寡占している。各プレーヤーによる市場占率は対等でありであり，お互いに競争状態にある．この生産物は周期的に収穫でき、各期の初めに生産されると，n 人のプレーヤーは，各自，自分が権利を持つ生産物の最適な売り出し時期を考えなければならない．このような場合、次の期にはまた新しい収穫があり、n 人のプレーヤーは全員、各期の初めに収穫した生産物は、その期の終わりまでには売ってしまわなければならないものとする．各期の初めに収穫した生産物の売り出し価格は n 人プレーヤーのいずれもが売り出さない間は，需要と供給の関係から時間の経過に伴って上昇するが，ある時点からは生産物の劣化に伴い減少に転じ，期間全体では単峰状に変化する．更に，いずれか 1 人のプレーヤーが自分の持っている生産物を売りに出すと，急激に（不連続的に）価格は下落するが，その後は、また n 人とも売り出さない時の価格と相似な単峰状で変化する．この下落に関する割引率は各期内の経過期間に依存して変化する．このような条件下で，n 人のプレーヤーの各々は，その生産物の価格と他の n-1 人のプレーヤーの売り出し時刻、すなわち、各時点における価格を、考えに入れながら，最適な売り出しの時刻を考えなければならない．

この種のゲームにあっては，プレーヤーに取って利用できる情報関連して、二つ様式があることを考えに入れなければならない（[1,2]）．あるプレーヤーが売りに出した時，瞬時にそのことが情報

として他のプレーヤーに知らされる場合，このプレーヤーをノイジー・プレーヤーと呼ぶ．逆に，情報防護が完全であって、与えられた期間内のどの時点で売りに出しても、そのことが他の n-1 人には知らされないとき、そのプレーヤーはサイレント・プレーヤー呼んでいる．N 人のプレーヤー全員がノイジー・プレーヤーであるゲームをノイジー・ゲームと呼び、n 人のプレーヤー全員がサイレント・プレーヤーであるゲームをサイレント・ゲームと呼んでいる．

本報告では、サイレント・ゲームを扱う．

本報告に関連して、縄張りの争奪戦に対してどの時点まで努力投入を続けるか、すなわち、最適な引き際のタイミングをゲーム的に考察する問題が考えられる．2 人ゲームに関しては Teraoka & Yamada[3]の報告があり、n 人ゲームに関しては Teraoka & Hohjo[4]の報告がある．

2．記号と仮定

生産物の価格は周期的に変化するので 1 期間でのゲームを考え，期間は単位区間[0,1]で表現する．また，後の議論のため、以下の記号と仮定を導入する．

$v(t)$ ：n 人のプレーヤー全員が、自分の所有する生産物を売りに出していない時の時刻 $t \in [0,1]$ における価格とする．微分可能であり

$$v'(t)\begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix}0 \text{ for } t \in \begin{Bmatrix} (0,m) \\ (m,1) \end{Bmatrix} \subset (0,1),$$

と仮定する．また、$0 \le v(t) < \infty$ も仮定する．

$r(t)$ ：誰か一人のプレーヤーが自分の所有する生産物を時刻 $t \in (0,1)$ で売りに出した時の割引率とする．$0 < r(t) < 1$ と仮定する．

すなわち，一方のプレーヤーが自分の所有する生産物を時刻 $t_0 \in [0,1]$ で売りに出すと，$t \in (t_0,1]$ での価格は $v(t)$ から $r(t_0)v(t)$ へ減少する．

ここで、n 人の中で k 人が同じ時刻 $t_0 \in [0,1]$ で売りに出したとすると，k 人の各プレーヤーは $\{r(t_0)\}^k v(t_0)$ の売り上げを得るものとする．

本報告を通して、$[0,1]\times---\times[0,1]$ 上で定義された実数値関数 $M(x_1,---,x_n)$ に対して、Player i が $[0,1]$ 上の混合戦略 (cdf) $F_i(x)$ を用いたときの期待値の記号として、

$$M(x_1,F_2,---,F_n) = \int_0^1 --- \int_0^1 M(x_1,x_2,---,x_n)dF_2(x_2)---dF_n(x_n) \quad ;$$

$$M(F_1,---,F_n) = \int_0^1 --- \int_0^1 M(x_1,x_2,---,x_n)dF_1(x_1)---dF_n(x_n)$$

を用いることにする。

ところで、割引率 $r(t)$ が経過時間とは無関係で一定、すなわち $r(t) = r$ と仮定したゲームに関しては、既に、モデル化され、具体的な解が導かれている（[5],[6]）．

3．サイレントゲーム

ここでは，n 人全員がサイレント・プレーヤーであるものとする．従って、n 人のプレーヤー

の各々はお互いに，[0,1]の各時点において、これまで何人が既に売りに出したのか，何人が未だ売りに出していないのか学習できないので，Player i （$i=1,---,n$） の純戦略をそれぞれ $x_i \in [0,1]$ とする．また、このゲームに参加しているプレーヤーは全て同じ条件下に置かれている．そうすると、各プレーヤーにとっては、各時点で、誰が既に売りに出したか、未だ売りに出していないのかは問題ではない。その時点までに行動を取った人数（売りに出した人数）が、対象となっている生産物の時価を決めてくれ、各プレーヤーに行動の指針を与えてくれる．そこで、Player 1 は純戦略 x_1 を採用し、残り $n-1$ 人の純戦略 $x_2,---,x_{n-i}$ を小さい方から順に並べ替えたものを $y_{(1)} \le y_{(2)} \le --- \le y_{(n-1)}$ と表現した時の、Player 1 への期待利得を $M_1(x_1,---,x_{n-i})$ と置くと

$$
\text{(1)} \qquad M_1(x_1,---,x_{n-i}) = \begin{cases} v(x_1), & 0 \le x_1 < y_{(1)} \\ r(y_{(1)})v(x_1), & y_{(1)} \le x_1 < y_{(2)} \\ ---, & --- \\ \left(\prod_{j=1}^{k} r(y_{(j)})\right) v(x_{(1)}), & y_{(k)} \le x_1 < y_{(k+1)} \\ ---, & --- \\ \left(\prod_{j=1}^{n-1} r(y_{(j)})\right) v(x_1), & y_{(n-1)} \le x_1 \le 1 \end{cases}
$$

と定式化できる。

上記の利得関数を観察し，$v(x)$ が $x=m$ （ただし $0<m<1$）で最大値を取ることから，次のクラスの混合戦略（cdf） $F(x)$ を考える．区間 $[0,m]$ 内に点 a を選び

$$
\text{(2)} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ \int_a^x f(x)dx & a \le x \le m \\ 1, & m < x \le 1 \end{cases}
$$

と置く．

Player I が純戦略 x を選び、残り n-1 人のプレーヤーが上記の混合戦略 $F(x)$ を選んだ時の Player I への期待利得を $M_1(x,F,---,F)$ とすると

$$
\text{(3)} \qquad M_1(x,F,---,F) = \begin{cases} v(x), & 0 \le x < a \\ v(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left\{\int_a^x r(x)f(x)dx\right\}^k \{1-F(x)\}^{n-k-1}\right], & a \le x \le m \\ v(x)\left[\int_0^m r(x)f(x)dx\right]^{n-1}, & m < x \le 1 \end{cases}
$$

が成立する．

従って、

$$(4)\qquad M_1(x,F,---,F)=\begin{cases} v(x)<v(a), & 0\le x<a \\ v(x)\left[1-\int_a^x\{1-r(x)\}f(x)dx\right]^{n-1}, & a\le x\le m \\ v(x)\left[\int_a^m r(x)f(x)dx\right]^{n-1} & m<x\le 1 \end{cases}$$

を得る．そこで

$$M_1(x,F,---,F)=const\ \ for\ \ x\in(a,m)$$

を満足する F を求める．任意の $x\in(a,m)$ に対して

$$(5)\qquad v'(x)\left[1-\int_a^x(1-r(t))f(t)dt\right]=(n-1)v(x)(1-r(x))f(x)$$

が成り立つから

$$(6)\qquad 1-(c/v(x))^{1/(n-1)}=\int_a^x(1-r(t))f(t)dt$$

を得る．

$x=a$ における境界条件より $c=v(a)$、従って

$$\left\{\frac{v(a)}{v(x)}\right\}^{1/(n-1)}=1-\int_a^x(1-r(t))f(t)dt$$

が得られ、(5)に代入すると

$$f(x)=\frac{\{v(a)\}^{1/(n-1)}}{(n-1)\{1-r(x)\}}\frac{v'(x)}{\{v(x)\}^{n/(n-1)}}$$

すなわち

$$F(x)=\int_a^x\frac{\{v(a)\}^{1/(n-1)}}{(n-1)\{1-r(t)\}}\frac{v'(t)}{\{v(t)\}^{n/(n-1)}}dt$$

が得られる．ここで

$$l(a)=\int_a^x\frac{1}{(n-1)\{1-r(t)\}}\frac{v'(t)}{\{v(t)\}^{n/(n-1)}}dt-\frac{1}{\{v(a)\}^{1/(n-1)}}$$

と置くと

$$l(m)=-\frac{1}{\{v(m)\}^{1/(n-1)}}<0,$$

であり

$$l'(a) = -\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{1-r(a)}-1\right\}\frac{v'(a)}{\{v(a)\}^{n/(n-1)}} < 0 \quad .$$

従って，$F(m)=1$ を満足するaは，区間$[0,m]$内に存在するとすれば，唯一つ存在し、

$$1 = F(m)$$

$$= \frac{\{v(a)\}^{1/(n-1)}}{n-1}\left[\int_a^m \frac{v'(t)}{\{v(t)\}^{n/(n-1)}}dt + \int_a^m \frac{r(t)}{\{1-r(t)\}}\frac{v'(t)}{\{v(t)\}^{n/(n-1)}}dt\right]$$

$$= 1 - \left\{\frac{v(a)}{v(m)}\right\}^{1/n-1)} + \int_a^m r(t)f(t)dt$$

であるから

$$v(a) = v(m)\left\{\int_a^m r(t)f(t)dt\right\}^{n-1}, \qquad 0 \le a \le m$$

が成立する．これは(6)の$x=m$での境界条件を満たしている．

このようにして求めた混合戦略$F^0(x)$を(4)に代入すると，下記の関係が得られる：

$$M_1(x,F^0,---,F^0) = \begin{cases} v(x) < v(a), & 0 \le x < a \\ v(a), & a \le x \le m \\ v(a)v(x)/v(m) < v(a), & m < x \le 1 \end{cases} \quad .$$

以上の考察より定理１を得る．

定理１．いま，$[a,m]$を台とする累積分布関数

$$F(x) = \int_a^x \frac{\{v(a)\}^{1/(n-1)}}{(n-1)\{1-r(t)\}}\frac{v'(t)}{\{v(t)\}^{n/(n-1)}}dt \quad .$$

で与えられる混合戦略を考える．そうすると、以下の性質が成り立つ．

（ｉ）$F(m)=1$を満たすa^0は$[0,m]$内に存在するとすれば唯一つである．

（ⅱ）a^0の$[0,m]$内での存在を仮定すると，$\left(F^0(x_1),---,F^0(x_n)\right)$は 利得関数（１）で与えられるｎ人非０和ゲームの Nash 平衡点となる．

この時、対応する Player$i$への平衡値は

$$v_i = v(a^0) \qquad (i=1,---,n).$$

となる．

注：上の定理によれば「n 人とも、誰も売り出していない時の価格が上昇している時間帯に,
自分の行動時刻を限定することが平衡につながる」ことになる.

ここで　$r(t)=r$　(定数) となっている場合を考える.

$$v(a)=v(m)\left\{\int_a^m r(t)f(t)dt\right\}^{n-1}, \qquad 0\le a\le m$$

より

$$v(a)=r^{n-1}v(m),$$

となるから、次の系が得られる.

系1．いま $r(t)=r$ (定数)とし、$v(0)\le r^{n-i}v(m)$ を仮定する．この時、方程式 $v(a)=r^{n-i}v(m)$ を満足する根 a^0 は区間 $[0,m]$ 内に唯 1 つ存在する．そこで、次の混合戦略を考える：

$$F^0(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<a^0\\ \left(\dfrac{1}{1-r}\right)\left[1-\left\{\dfrac{v(a^0}{v(x)}\right\}^{\frac{1}{n-1}}\right], & a^0\le x<m \quad .\\ 1 & m\le x\le 1.\end{cases}$$

そうすると、*cdf* F^0 の組 $\left(F^0,---,F^0\right)$ は $r(t)=r$ の場合の Nash 平衡点を構成する。この時、対応する Player i へ の期待利得 (平衡値) は下記のように与えられる.

$$v_i=M_i(F^0,---,F^0)=r^{n-1}v(m), \qquad i=1,---,m.$$

注：系 1 は Teraoka[6]の結果と一致する.

4．今後の課題

本報告では、$F(m)=1$ を満たす a が $[0,m]$ 内に存在する場合に対して、美しい結果を得られた。しかしながら、現実的の問題に有っては、n が大きくなるに従って、$F(m)=1$ を満たす a が $[0,m]$ 内に存在しない場合が一般的となる.

次に、重要な課題として残された問題に、ノイジー・ゲームの展開がある．この種の問題にあっては、ノイジー・ゲームの方が現実的と考えられるが、定式化は難しい．2 人の場合でも、Nash 平衡点は存在せず、ε 平衡の意味での解となることが予想されている．N 人ゲームに対しては、動的計画の観点からの定式化が考えられるが、Nash 平衡点の存在性が疑われるので、再帰的関係式の作成さえ非常に難しい．.

参考文献

[1]M. Dresher, Games of Strategy : Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.

[2]S. Karlin, Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol.2, Addison Wesley, Massachusetts, 1959.

[3]Y. Teraoka & Y. Yamada, Games of production development in manufacturing, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems 445, Stochastic Modeling in Inovative Manufacturing, Springer, Berlin, 58-67, 1997.

[4]Y. Teraoka & H. Hohjo, N-person games on territory, Game Theory and Applications, Vol. 5, Nova Science Publishers, Inc., New York, 134-141, 2000.

[5]Y. Teraoka & H. Hohjo, Two person games on sale in which the price fluctuates with time, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.69, 101-109, 2008.

[6]Y. Teraoka, N person silent games on sale in which the price is a unimodal function with time, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.70, 461-466, 2009..