

# GeoGebra の教育利用 —面積測定と極限—

愛知教育大学大学院 舟川 快 (Kai Funakawa)  
Aichi University of Education Graduate School

## 1 はじめに

Mathematica のような数式処理ツール, Grapes のような関数グラフツール, Excel のような表計算ツール, そして Geometric Constructor (以後 GC と略す), Cabri Geometry (以後 Cabri と略す) のような作図ツール等のように, これまで数学教育に有効なソフトウェアが多数開発されてきた. 従来の方法では, 課題の内容に応じて別々のソフトウェアを使うのが一般であり, 逆にそうしたソフトウェア間の連携などが必要な場合には非常に不便であった.

ところが上記の 4 つの機能が備えられ, 数学学習・指導を目的とした GeoGebra というソフトウェアが Markus Hohenwater (フロリダ大西洋大学) によって 2002 年に開発された. GeoGebra はフリーソフトであり, 日本語への対応も充実しつつあり, 今後日本国内での利用増加も期待できる.

そこで, 今後の日本での使用拡大も期待される GeoGebra に関して, その機能統合性という特徴に焦点を当て, 従来からのソフトウェア群では扱うのに大変不便であった教材を, 主に高校・大学入試問題を探究していく中で開発をした. 本稿では, その開発した教材を紹介しながら, 当該ソフトウェアの有効性や可能性について議論することを目的とする.

## 2 GeoGebra の特性を活かした教材例

GeoGebra には様々な機能が統合されている点が, 既存のソフトウェアと比較した場合の大きな違いである. その特徴を示すための好例として, 本稿では面積測定と極限に焦点を当てる.

### 2.1 面積測定に関する教材例

GeoGebra には GC, Cabri と違って積分機能があるため, 様々な形の図形の面積を積分により求められる. また, GeoGebra は作図ツール機能や数式処理機能, 関数グラフツール機能といった様々な機能が互いにリンクして機能するため, 図形が変形あるいは動くことと, 面積の変化の様子をグラフで同時に観察することができ, 他のソフトウェアでは困難であった探究活動が可能である. 以上のことを踏まえて, GeoGebra の特性を活かした, 特に積分機能を用いて面積を求めることに焦点を当てた教材例について述べる.

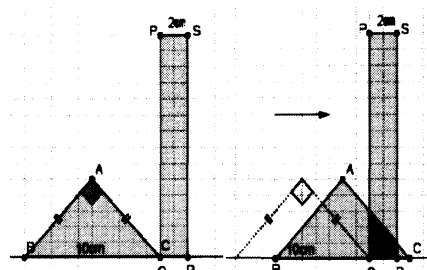
## a) 多角形同士が重なった領域の面積測定

愛知県公立高校入試の平成 18 年度 A 日程数学の問題を扱った教材である。

図で、直角二等辺三角形 ABC と長方形 PQRS があり、 $BC = 10\text{cm}$ 、 $PQ = 10\text{cm}$ 、 $PS = 2\text{cm}$  である。頂点 C, Q は重なっている。△ABC を矢印の方向に毎秒 1cm の速さで、頂点 A が辺 PQ 上に来るまで移動させる。移動し始めてから  $x$  秒後の重なった部分の面積を  $y\text{cm}^2$  とする。

(1)  $0 \leq x \leq 2$  のとき、 $x, y$  の関係を式で表せ。

(2)  $2 \leq x \leq 5$  のとき、 $x, y$  の関係をグラフに表せ。



元の問題は点 A が辺 PQ 上に移動するまで考えているが、内容を発展させて、この教材では点 B が点 R に移動するまで考えることにする。また、GeoGebra の作図ツール機能より、図 1 のように、頂点 A をドラッグして三角形の形を変えたとき、面積がどのように変わるか学習者に探究させることも可能にした。

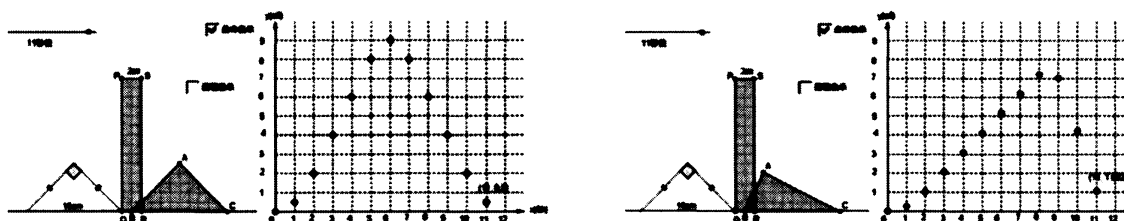


図 1

GeoGebra のスライダー機能により、0 秒後だけではなく各時間の 2 つの図形の位置関係の様子を図で表した。GC や Cabri のような作図ツールソフトでは、図形を作って動かすことができても、この教材においては、求める領域が三角形から四角形、そして五角形へと変形するため面積を求めることは困難である。

GeoGebra ではこの教材において各図形の頂点の座標が定義されているため、直線 AB と直線 AC の方程式を導くことができる。例えば、点 P の  $x, y$  座標をそれぞれ  $x(P), y(P)$  と表すことにすると、直線 AB の方程式は、

$$y - y(A) = \frac{y(A) - y(B)}{x(A) - x(B)}(x - x(A))$$

と定義できる。線分 BC と線分 QR を  $x$  軸上に設置し、 $x \leq x(B)$  では  $y = 0$ 、 $x(B) \leq x \leq x(A)$  では直線 AB の方程式、 $x(A) \leq x \leq x(C)$  では直線 AC の方程式、 $x(C) \leq x$  では  $y = 0$ 、となる関数を  $f(x)$  とし、 $f(x)$  を積分区間  $x(Q) \leq x \leq x(R)$  で積分するよう定義することによって面積が求められる。以上のように定義すると、三角形が矢印の方向に移動しても、頂点 A をドラッグして三角形の形を変えても、設定を変更することなく一度で面積が求められる。

### b) 2つの円の重なった領域の面積測定

図2のように円の中心が $x$ 軸上を移動する2つの円を考える。この2つの円の重なった領域の面積の変化の様子を探究する教材である。スライダー機能により2つの円の半径や位置関係を変えられるようにした。片方の円が動いた距離と重なった領域の面積の関係をグラフで表示した。2つの円を $y \geq 0$ と $0 \geq y$ で場合分けして関数で定義し、定積分により面積を求めた。GeoGebraは「条件付き表示」機能があり、条件によって(2つの円の位置関係によって)異なる区間で積分し、重なった領域を図示させることができる。

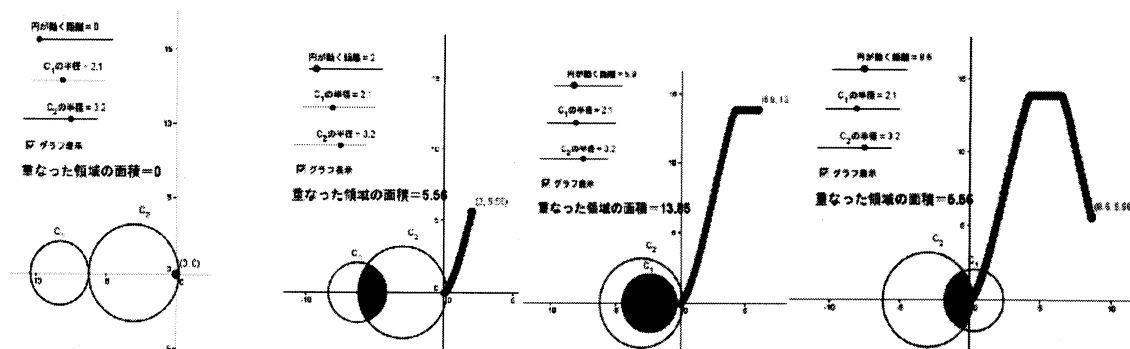


図2

a)では求める面積が多角形で、手計算で簡単に求められ、グラフの形や変化の様子が推測しやすい。しかし2つの円の重なった領域の面積を求めるとなると手計算では困難であり、グラフの形や変化の様子を推測することが困難である。既存のソフトウェアでは扱えないがGeoGebraでは扱える例と言える。

## 2.2 極限に関する教材例

GeoGebraにはスライダー機能により、グラフや図形などの様々なオブジェクトの変数を変えながら、その変化の様子を観察することが可能である。その特性を活かし、極限に関する教材例について述べる。

### a) 区分求積

GeoGebraには、区分求積のコマンドがあり、上方和・下方和等を計算する。例えば、UpperSum[関数, 数値  $a$ , 数値  $b$ , 数値  $n$ ]とコマンド入力することにより、定義された関数の区間  $[a, b]$  における  $n$  個の長方形による上方和を計算し、グラフ上に図示する。図3-1, 3-2はそれぞれ、 $f(x) = \sin x$ と定義し、 $n = 3$ ,  $n = 25$ のときの様子である。

GeoGebraのスライダー機能を利用して  $n$  を自由に変更させ、区間  $[a, b]$  も  $x$  軸上の点をドラッグすることにより自由に変更させることを可能にした。Cabri や GC などでは、グラフを幾何的対象として扱えない。また、Grapes ではグラフは表示可能だが、動的な幾何を扱うことはできない。GeoGebra に特徴的な例と言える。

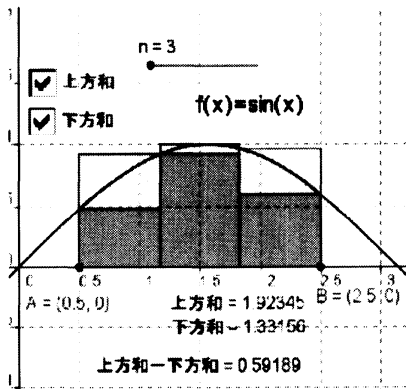


図 3-1

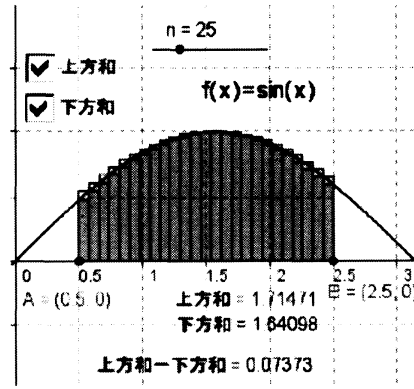


図 3-2

b) 無限級数 (はさみうちの定理)

次の問題を考える。(東工大 08 年 AO)

自然数  $n$  に対し、第一象限において不等式

$$nx \geq y \geq x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \dots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}$$

の表す領域の面積を  $S(n)$  とする。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}S(n)$  を求めよ。

この問題は、 $f(x) = nx$ ,  $g(x) = (\text{右辺の関数})$  とすると、 $g(x)$  において  $x^n$  は  $n \rightarrow \infty$  ならば  $x$  が 1 まではほぼ  $x$  軸に平行で、1 を超えた瞬間に  $x$  軸にほぼ垂直に上がっていくことがイメージできる。よって不等式の表す領域は、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $f(x)$  と  $x = 1$  の交点が  $(1, n)$  のため、 $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, n)$  を頂点とする直角三角形になる。 $S(n) = n/2$  と簡単に求められ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}S(n) = \frac{1}{2}$  と予測できる。そして不等式が表す領域をはさむ 2 つの領域を考えて、はさみうちの定理の利用により  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}S(n) = \frac{1}{2}$  が示される。

GeoGebra は、図 4 のように  $g(x)$  を数列や和のコマンドを利用して定義することができ、無限級数をグラフに表示することが可能である。そしてスライダー機能により  $n$  を変えることによって  $f(x)$ ,  $g(x)$  がグラフ上で変化することを可能にした。また、積分機能により不等式を満たす領域を図示し面積も測定する。GeoGebra では  $n$  を変えることで関数の極限の理解を支援することができる。

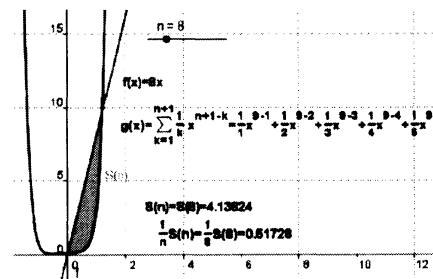
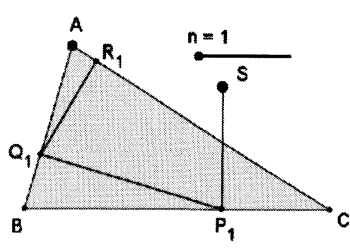


図 4

c) 点列の極限

次の問題を考える。

図のように平面上の任意の三角形ABCにおいて、任意の点Sから直線BCに下ろした垂線の足を $P_1$ とする。  $P_1$ から直線ABに下ろした垂線の足を $Q_1$ 、 $Q_1$ から直線CAへの垂線の足を $R_1$ 、 $R_1$ から直線BCへの垂線の足を $P_2$ とする。このような操作を繰り返すと、 $P_n, Q_n, R_n$ の極限の位置を求めよ。



GeoGebraでは、数列のコマンド機能によりグラフ上に点列や線分を作成し、図5のようにスライダー機能により $n$ に応じて動的に点や線分を増やすことを可能にした。また、三角形の形や初期値をドラッグして変えられるようにした。

このように、GeoGebraでは、初期値や三角形の形を変えると、極限值がどのように収束するのか観察あるいは探究し、 $S$ をドラッグして初期値を変えてもある1点に収束し、極限周期解の存在を実感することができる。

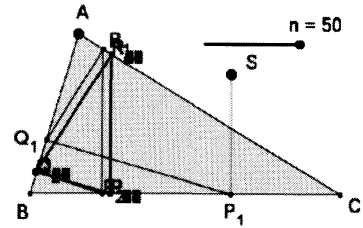


図5

既存の数学ソフトウェア、例えば作図ツールソフトを代表とするGCやCabriでは、動的な幾何を作図することは可能であるが、 $n$ に応じてオブジェクトの個数を変えることは不可能である。既存の数学ソフトウェアでは扱えないが、GeoGebraでは扱える例と言える。

d) 点列の極限の軌跡

次の問題を考える。(防衛大05年)

$xy$ 平面上を動点 $P$ が次の規則に従って動くものとする。ただし、 $P_t$ は時刻 $t$ における動点 $P$ の位置を表し、 $0 < \alpha < 1$ とする。

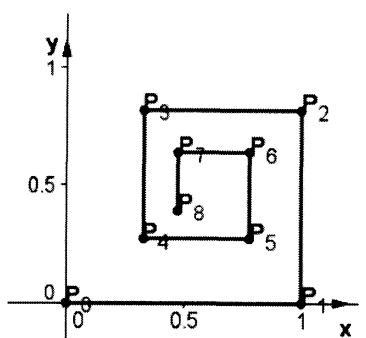
(a)  $P_0 = (0, 0)$ から出発し、 $x$ 軸に沿って正方向に進み、時刻 $t = 1$ に $P_1 = (1, 0)$ に至る。

(b) 時刻 $t = n$ ( $n$ は正の整数)において直角に左折し、距離 $\alpha^{n-1}$ だけ直進して時刻 $t = n + 1$ に $P_{n+1}$ に至る。

このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $t \rightarrow \infty$ のときの動点 $P$ の極限の位置 $P_\infty$ の座標を求めよ。

(2)  $\alpha$ が $0 < \alpha < 1$ の範囲を動くとき点 $P_\infty$ の描く曲線を求め、また図示せよ。



この問題は、時刻 $t = 1$ のときに距離1だけ直進し、また直角に左折すると考えているが、問題を一般化し、時刻 $t = 1$ のときに距離 $\beta$  ( $0 < \beta$ )直進し、 $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ )度

曲がるという問題に発展させて考えてみる。ただし  $x$  軸の正の方向への無限延点を  $Q$  とすると、 $\angle P_2P_1Q = \theta$  とする。この場合、 $n, \alpha, \beta, \theta$  のどれが動くかによって  $P_n$  の軌跡が変わり、どのような軌跡を描くか容易に推測はできない。手計算をすると  $P_n$  の座標は

$$P_n \left( \beta \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \cos(k-1)\theta, \beta \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \sin(k-1)\theta \right)$$

となる。つまり、 $z = \alpha(\cos \theta + i \sin \theta)$  とおき、ド・モルガンの法則を利用して計算すると

$$P_n \left( \beta \times \left\{ \frac{1-z^n}{1-z} \text{の実部} \right\}, \beta \times \left\{ \frac{1-z^n}{1-z} \text{の虚部} \right\} \right)$$

となる。

GeoGebra は、複素数の四則演算、複素平面表示ができ、 $\beta \times \{1 - z^n / (1 - z)\}$  とコマンド入力することにより、複素平面上に  $P_n$  の図示が可能であり、軌跡を観察できる。そこで問題(2)では  $\alpha$  が動くときの軌跡を考えているが、本稿では  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) が動くときの軌跡について述べる。

図6-1は  $n = 5$  ( $\alpha = 0.8, \beta = 1$ ) としたときの軌跡であり、図6-2は図6-1の軌跡に  $n = 500$  ( $\alpha = 0.8, \beta = 1$ ) のときの軌跡を重ねたものである。

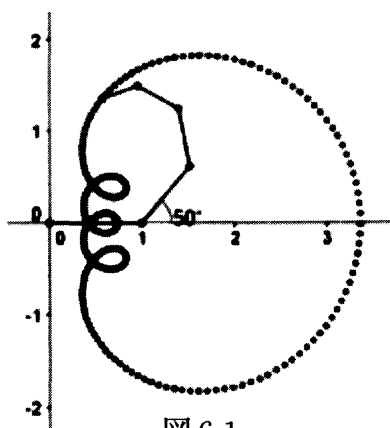


図6-1

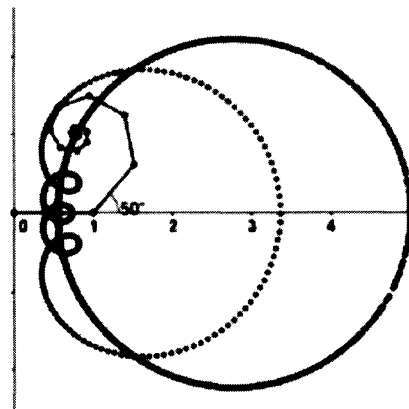


図6-2

$n = 5$  のように  $n$  の値が小さいときの軌跡は  $x$  軸対称の曲線を描くのではないかと推測できる。そして  $n = 500$  のように  $n$  の値を大きくすればするほど軌跡は円に近くなり、 $n \rightarrow \infty$  のときの軌跡は円になることが分かる。実際に  $n \rightarrow \infty$  のときの軌跡の方程式を手計算してみると、とても複雑ではあるが、円の方程式が得られた。

このように、GeoGebra では、変数を変えることにより  $P_n$  の軌跡の観察・探究を可能にし、軌跡の方程式の推測を促す。また、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $P_n$  が一点に収束することも実感できる。(c) のときと同様、既存の数学ソフトウェア、例えば作図ツールソフトを代表とする GC や Cabri では、動的な幾何を作図することは可能であるが、 $n$  に応じてオブジェクトの個数を変えることは不可能である。既存の数学ソフトウェアでは扱えないが、GeoGebra では扱える例と言える。

### 3 考察と今後の課題

以上の結果から、GeoGebraは様々な機能が統合されリンクして機能することにより、今まで扱えなかった教材・探求を扱うことが可能であるということに有用性が見出される。本稿は定積分機能やスライダー機能による極限を応用させた教材を扱ったが、GeoGebraには他にも表計算ツール機能や、統計コマンド機能、行列の演算といった様々な機能があり、今後は、それぞれの機能を統合させて探究した場合、どのような数学的概念が獲得できるかを研究する。そしてそれに伴いGeoGebra独自の教材を研究・開発したい。

### 参考文献

- [1] 濱田龍義 (2010). 大学初年級における GeoGebra の教育利用. 数理解析研究所講究録 1674, 112-119
- [2] 廣野尚敏 (2009). 高校数学におけるテクノロジーの利用－数式処理機能と動的幾何機能を融合させた指導の可能性－. 第42回数学教育論文発表会論文集
- [3] GeoGebra <http://www.geogebra.org/>
- [4] GeoGebra 日本 <http://sites.google.com/site/geogebrajp/home>