

Cinderella.2 を用いた授業と課題研究

静岡県立磐田南高等学校

入谷 昭 (Akira Iritani)

Iwataminami highschool

1 はじめに

1992 年, スウェーデンの Mittag-Leffler 研究所において組合せ論の国際会議が開かれた折り, 船で旅をしていた Henry Crapo と Jürgen Richter-Gebert の 2 人が, インタラクティブな幾何ソフトの開発を構想した. このプロジェクトには, そのときの船の名前である「Cinderella」がつけられた. その後, 紆余曲折を経て, 1998 年に Cinderella 1.2 版が公開された. 日本では, 2003 年に明治大学阿原氏が日本語化を手がけ, Cinderella 1.4 版 日本語版がシュプリングー東京 (現日本シュプリングー) より発売された. 2006 年に, それまでのインタラクティブな幾何ツールに加え, 物理シミュレーションの CidyLab, プログラミング言語の Cindyscript を 3 本柱とする数学ソフトに変貌した Cinderella.2 (第 2 版) が公開された. 日本では, 2007 年より, 入谷がこの第 2 版の日本語化に携わることとなった. 同時に, 高等学校の数学の授業や課題研究指導に Cinderella.2 を利用し, その経過を Web 上に公開するとともに, 日本での普及のための窓口となる CinderellaJapan を立ち上げている. Cinderella.2 は, 2010 年 8 月には, MIDI, TeX をサポートするなど, 現在なお進化中である.

2 Cinderella.2 の 3 つの柱

Cinderella.2 は, つぎの 3 つの柱からなる.

Cinderella 幾何ソフト

複素ベクトル空間と射影幾何学をベースにしたインタラクティブな作図ツール. ある幾何要素が incident であることをコンピュータが証明する「自動証明機能」を有する.

CindyLab 物理シミュレーション

力学, 電磁気学に関するシミュレーションを行なうことができる. 数式を使わずに, 重力や摩擦力を設定して物体の運動をシミュレートすることができる.

CindyScript プログラミング言語作図ツールで作図した図形要素や CindyLab の要素をプログラミングで制御できる. 行列やベクトルは Mathematica 同様, リストとして処理する. MIDI に対応したサウンドコントロールや TeX による数式表示もこの Cindyscript でおこなう.

このうち, 高校における数学教育の場面では, 授業における動的な教材提示, 簡単なスクリプトによる曲線表示 (生徒実習), 課題研究における道具としての利用がある. 以下では, これらの実践報告を行い, さらに利用にあたっての課題について論じる.

3 教材提示のために授業で利用する

Cinderella.2を授業で教材提示のために利用することにより、授業デザインが一変する。もともと、高校の教科書はコンピュータを利用しない前提で編集されているので、これは当然のことである。それを、あえて授業デザインを変えてまでコンピュータを利用する理由は、高校生の数学的事象の認知過程にある。高校数学は、小・中学校での算数・数学に比べ抽象度が格段に増す。そのため、記述されている事柄の意味が把握できなかったり、状況が理解できなかったりするるのである。そこで、教材のイメージ化を助けるとともに、「現象の観察から理論へ」という教授法の転換を図ることにより、理解を促進することができる。

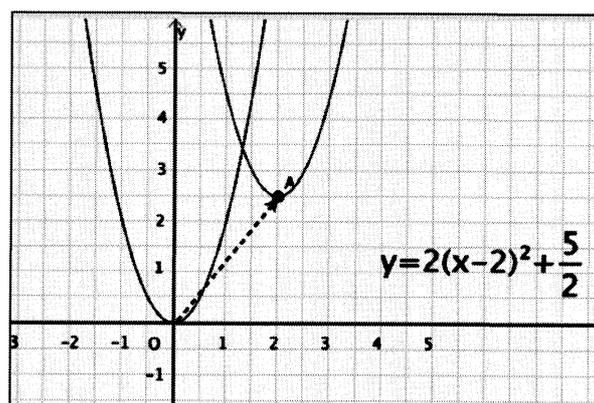
高等学校までの数学において、図形の認識が理解につながる場面は非常に多い。いわゆる平面幾何だけではなく、関数や方程式・不等式においてもグラフの利用ができるかどうかは問題解決への大きな要素となっている。そのとき、静的に図形を捉えるよりも、動的に捉えられる方が問題解決にとっては有利である。これは、大学入試問題を解く場合も同様であり、従来の「生徒に解答を板書させて教師が解説」という一般的な入試問題演習の授業とはまったく異ったアプローチとなる。以下にその例をいくつか示す。

2次関数のグラフと平行移動（数学 I）

2次関数は高校数学ではきわめて重要な単元であるが、ここでつまづく生徒は多い。教科書では、まず y 軸方向への平行移動を扱い、次に x 軸方向への平行移動、最後にこれを組み合わせて一般型へと進む。このとき、数表を用いて、平行移動をイメージさせようというのが教科書の記述であるが、これだけでは、なぜ x^2 が $(x-p)^2$ になるのかわからないのである。 y 軸方向への移動では、正の方向に移動すれば式も $+$ なのであるのに、 x 軸方向への移動では正の方向に移動しているのになぜ式は $-$ になるのか。これを数表で理解させようというのは最初から無理な話なのだ。もっとも、 $y = a(x-p)^2 + q$ とせず、 $y - q = a(x-p)^2$ とすれば統一はとれるし、実際、一般的な変形としてあとで学ぶことにはなるが、これまた抽象的で一層理解困難となる。

そこで、理論は後回しにして、まず平行移動と式の変化を現象として、感覚的に捉えてしまおう、というのがこの授業である。

頂点をドラッグして放物線を平行移動すると、対応する式が表示される。いくつか例示すれば、頂点の位置と式との関係を直感的に掴むことができるようになる。そのうち、「なぜそうなるのか」を考え、一般的な平行移動の式変形（軌跡あるいは点の集合としてのグラフ）へ進む。

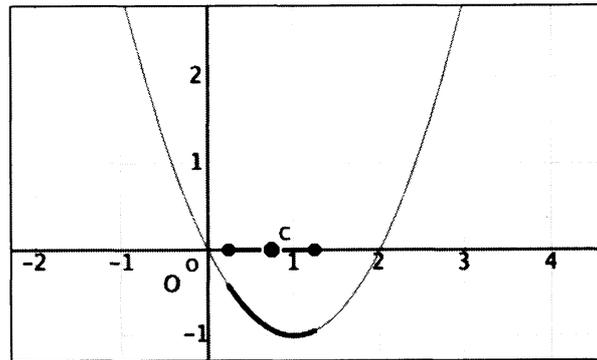


頂点をドラッグして平行移動するとそれに対応して式も変化する

定義域とグラフ（数学 I）

定義域を変化させたときの関数の最大・最小問題も、生徒にとって理解が難しい内容であ

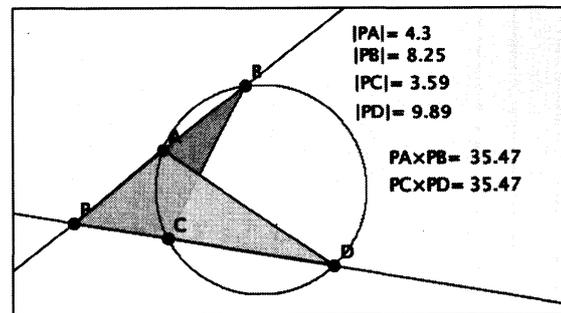
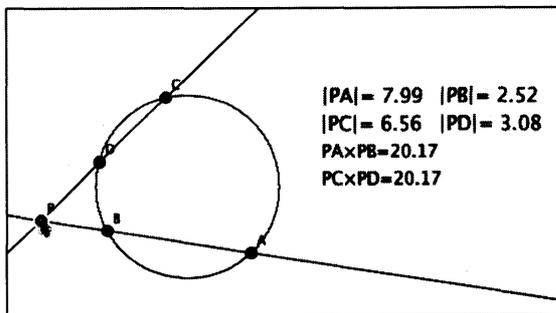
る。定義域を、 $-1 \leq x \leq 2$ のように具体的に与えればよいが、 $a \leq x \leq a+1$ と文字変数にするととたんにわからなくなる。変化がイメージできないのである。このような場合は、数値をインタラクティブに変化させることのできる数学ツールが有効である。定義域をマウスドラッグにより変化させると、定義域と、対応するグラフの形状が変化する。それにより、最大値、最小値も変化する。また、別の例では定義域を固定し、放物線を動かす（係数を変化させる）場合もある。



点Cをドラッグして定義域を変化させる

方べきの定理 (数学 A)

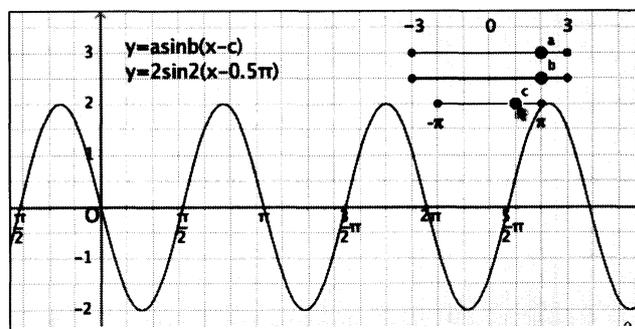
方べきの定理は、「点Pを通る2直線が、円とそれぞれ2点A,Bと2点C,Dで交わっているとき $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ」というものである。教科書では、点Pが三角形の内部にある場合、外部にある場合、一方の直線が円の接線となる場合の3通りに分けて図示し、別個に証明しているが、点Pを自由点として動かせるようにすると、点Pがどこにあってもこの式が成り立つことが観察できる。証明をするには、次の図のように、三角形に色を塗るとわかりやすい。(着目する三角形はこれに限らない)



自由点Pをドラッグすると、形状と対応する数値が変化する

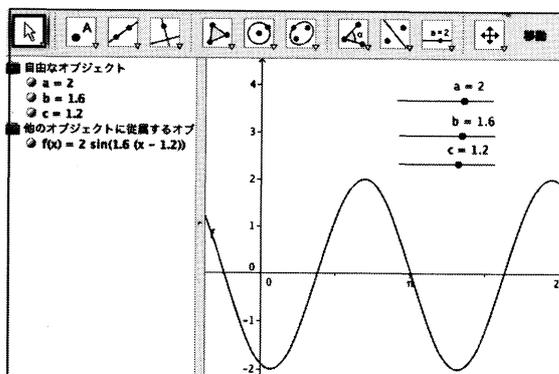
三角関数のグラフ (数学 II)

係数とグラフの関係(周期, 振幅, 位相)を直感的に理解する。係数は、スライダを使って変化させる。同じようなことは、GeoGebraやMathematicaでもできる。Geogebraでは、スライダはツールバーに用意されているので、3つのスライダを用意し、「 $f(x) = a \cdot \sin b(x-c)$ 」と入力するだけで簡単に作ることができる。Mathematica

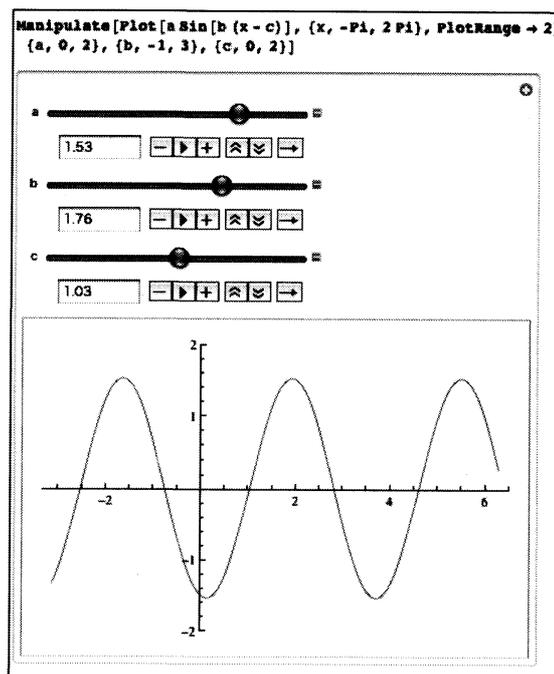


icaでは、Ver 6以降にある Manipulate 関数を用いて同じことができる。Mathematica

ではそのままアニメーションも可能である。



GeoGebra による三角関数のグラフ



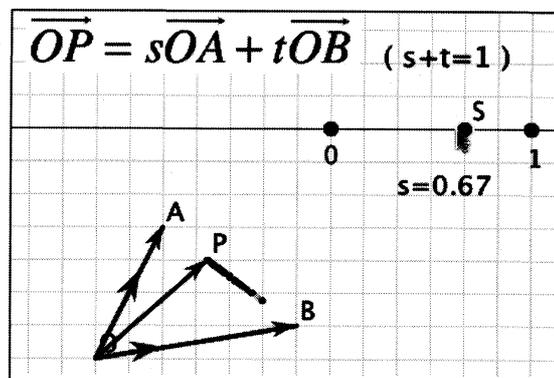
Mathematica による三角関数のグラフ

これらに対し、Cinderella.2では、スライダを作図し、点の座標を読み取って数値を設定するコードをCindyScriptで書く必要があるので、そう簡単ではない。しかし、一旦この手法をマスターすれば、さまざまな応用が利く。

ベクトルの1次結合 (数学B)

ベクトルの1次結合は、高校数学では「ベクトルの終点の存在範囲」として扱われる。

$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ ($s+t=1$) が基本形であるが、生徒にとっては理解が困難なものの一つである。どうしても、「 $s+t=1$ のときは直線AB上にある」と「覚える」ことになりがちである。しかし、本質的な理解が伴わないと、 $s+t=2$ や $1 \leq s+t \leq 2$ などとなったときに手が出ない。これもまず「現象」を観察することから始めれば理解につながっていく。

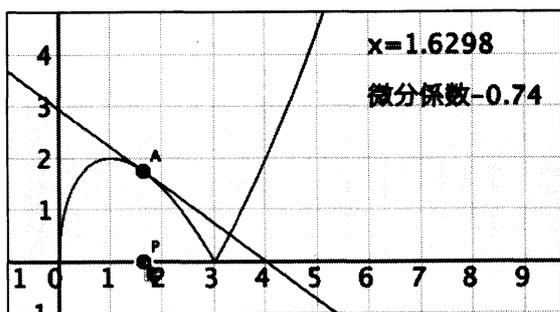


スライダ上の点Sをドラッグすると点Pが動く

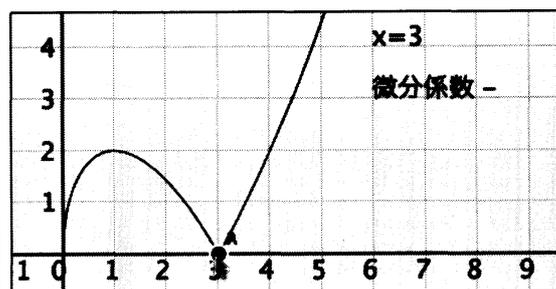
微分係数と接線の傾き (数学II・III)

微分係数が接線の傾きを表し、それにより関数の増減を知ることができる、というのが数学IIの微分の応用である。さらに数学IIIでは、微分可能性や曲線の凹凸も扱い、曲線の形状を詳しく調べるようになる。次の例は $f(x) = |x-3|x$ のグラフで、 x 軸上の点をドラッグすると対応する点における接線が引かれる。接線の傾きと関数値の増加減少の様子、グラフの凹凸の様子をビジュアルに観察することができる。 $x=3$ では微分

可能ではないので接線が引かれず，微分係数も表示されない。



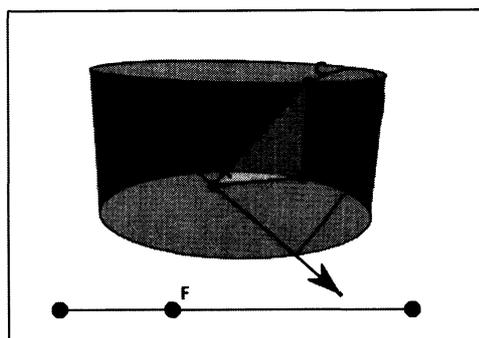
点 A をドラッグすると対応する接線が引かれる



微分可能ではない点では微分係数が表示されない

円柱の切断と体積 (数学Ⅱ・Ⅲ))

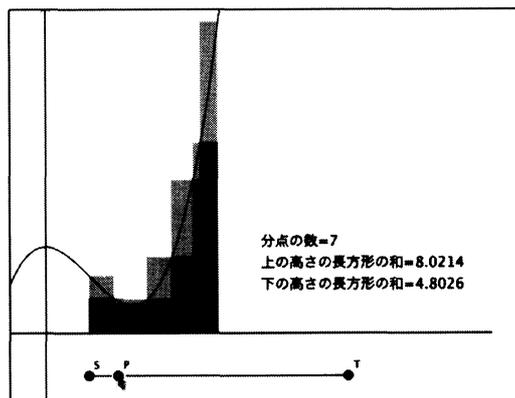
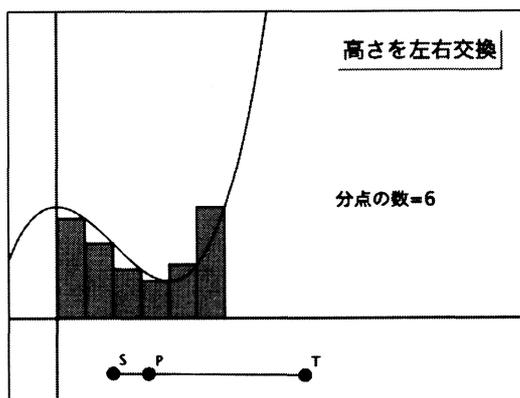
CindyScript によって，3D グラフィクスも可能である．円柱を斜めに切断してできる立体の体積を求めるにあたり，該当する立体をイメージし，断面を動かすことによって積分のイメージを感覚的に掴む．この図だけでは円柱に見えないが，マウスをドラッグしてグリグリっと動かすことによって空間図形のイメージができる．スライダ状の点 F をドラッグすれば，断面の $\triangle ABC$ を軸に沿って動かすことができる．



点 F をドラッグすると三角形が移動する

区分求積法 (数学Ⅱ・Ⅲ))

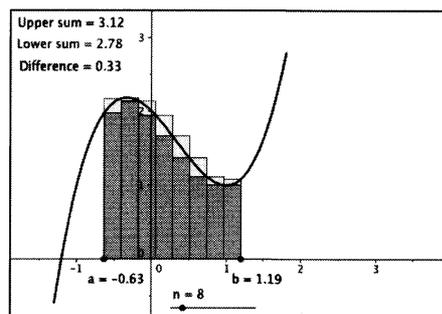
高校数学の「区分求積法」は定積分の定義と関わってくる大切な内容であるが，教科書ではあくまでも「和の極限」としての扱いである．ここも生徒にとっては苦手な分野で，暗記に頼って応用がまったくきかないことになりがちである．スライダを動かすことによって分点の数を増やすことができる．どんどん増やせば ($n \rightarrow \infty$) 曲線の下方の面積に近づくことが直感的に理解できる．高校数学では区間を n 等分し，矩形の高さは



左側の関数値か右側の関数値とするが，理数科の授業では大学入学後のことも考え，等分でなくてもよく，高さは各微小区間での最大値と最小値でとるという，リーマン積分

の考え方を紹介し、これが定積分の定義であることまで言及している。区間の長さは乱数でとっている。

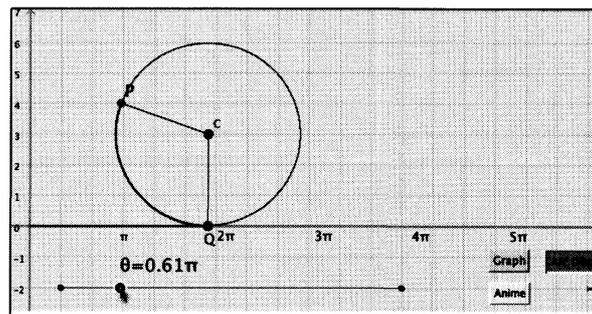
なお、GeoGebraでは「上方和」「下方和」という組み込み関数があり、integralのExampleとして用意されている。ただし、 n 等分である。



GeoGebra での上方和と下方和

サイクロイド曲線 (数学Ⅱ・Ⅲ・C)

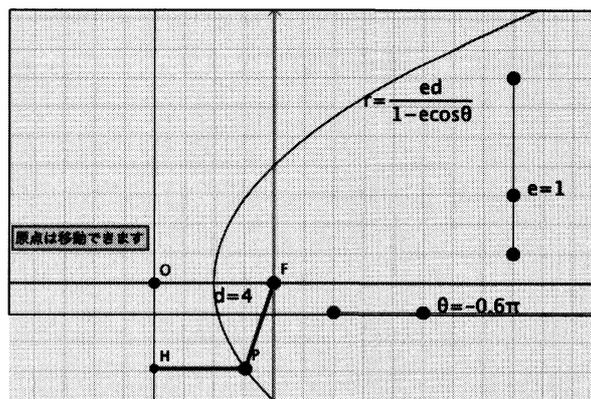
媒介変数で表された曲線として典型的なものであり、数学Ⅱ・Ⅲと数学Cの両方に登場する。媒介変数の式の求め方も含め、一度は動的に示しておきたい教材である。Cinderella1.4版ではアニメーションどころか作図そのものも難しかったが、Cinderella.2ではCindyScriptによって自由自在な表現が可能となった。



スライダを動かすと位置が変えられる

離心率と2次曲線 (数学C)

数学Cの「いろいろな曲線」では、媒介変数表示と極方程式の両方で離心率と2次曲線について触れているが、なかなか理解しにくい内容である。大学入試問題でもほとんど扱われないことから、授業ではカットされることが多い。しかし、内容としては興味深いものがあるので、どのような意味であるのかを見せるだけでもしておきたい。2つのスライダにより、離心率と角を変化させることができる。



離心率と2次曲線

以上、2008年から始めた授業の様子は、Web上に「ビジュアル数学航海日誌」として公開している。アドレスは <http://club.pep.ne.jp/hannya/VMindex.html>

4 生徒が授業で利用する

数学Cでの「いろいろな曲線」では、式の処理だけではなく、実際にその曲線を描いてみたい。特に、媒介変数と曲線は、媒介変数を時間とすれば物理における質点の運動そのものであるから、「物体の運動」として軌跡のイメージを持たせることは重要である。コンピュータを用いて図を描くことにより、軌跡としてのイメージを持つことができるようになるれば、紙と鉛筆だけで微分して値の変化を追っていくこともできるようになる。

ワークシートを作り、パソコン室で実習を行なった。1年次に Mathematica 基礎講座を行なっているのので、簡単なガイドだけで実行できた。Mathematica を使うか Cinderella.2 を使うかは生徒が自由に選択。Cinderella.2 の方が、式を変更して描いていくときの柔軟性と操作性では有利な点が多いが、Cinderella.2 を使ったことのない生徒もあり、利用状況はおよそ半々であった。

次の図は、ワークシートの最初のページで、Mathematica と Cinderella.2 のそれぞれについて使い方のガイドが書かれているもののうち、Cinderella.2 の部分である。

Cinderella.2 で描く

媒介変数で x, y を関数として定義し、`plot()` で表示する

【例】 $x = 2 \cos t - 1, y = \sin t$

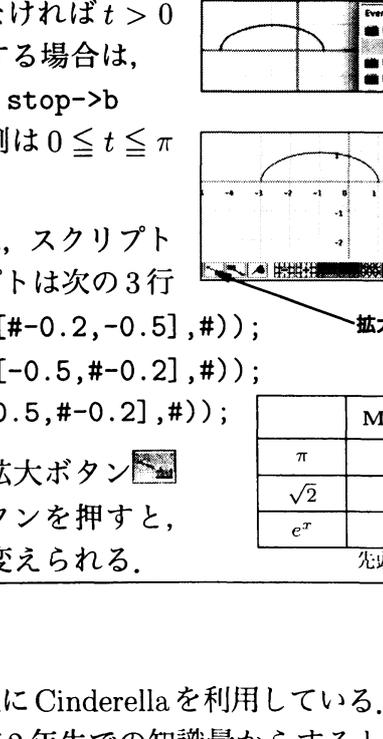
- スクリプトエディタを開いて Draw スロットに書く
- 関数定義は `fx(t):=t-2` と `fy(t):=t^2-3` のようにする。括弧は丸い括弧、アンダーバーは不要。コロンとイコール
2乗は[^]2. 掛け算は*で明示する。
- 表示は `plot([fx(#),fy(#)])` のようにする。すべて小文字。fx() の括弧の中は#, fx(#) と fy(#) をカギ括弧でペアにする。歯車アイコンで実行。(Shift + Enter でもできる)

媒介変数 t の範囲は指定しなければ $t > 0$ で自動的にとられる。指定する場合は、 $a \leq t \leq b$ なら `start->a, stop->b` オプションをつける。右の例は $0 \leq t \leq \pi$ の場合。π は pi

座標軸に目盛が欲しい場合は、スクリプトを書く必要がある。スクリプトは次の3行

```
apply(-10..10,drawtext([#-0.2,-0.5],#));
apply(-10..-1,drawtext([-0.5,#-0.2],#));
apply(1..10,drawtext([-0.5,#-0.2],#));
```

方眼を大きくしたい場合は拡大ボタンをダブルクリック。 ボタンを押すと、原点の位置をドラッグして変えられる。



	Mathematica	Cinderella
π	Pi	pi
$\sqrt{2}$	Sqrt[2]	sqrt(2)
e^x	Exp[x]	exp(x)

先頭は必ず大文字 すべて小文字

(1) これまでの実践

2005年より理数科課題研究に Cinderella を利用している。高校生の課題研究において、数学での題材選びは、高校2年生での知識量からするとなかなか難しい。Cinderella を使うことにより、実験的な意味合いが加わるので生徒も興味を持ちやすい。

2005 年

「楕円幾何学(球面モデル)での図形の探求」

掛川西高等学校 進士智也 鈴木悠太

三角形に関する性質を球面幾何で考察した。(シンデレラ 1.4 版)

2008 年

「幾何変換について 相似変換とメビウス変換を中心に」

磐田南高等学校 磯部裕介 横山広大

Cinderella.2 のマニュアルのうち幾何変換の部分を翻訳し, 理論的背景を考察した.

2010 年

・「フーリエ級数と楽器の波形」

磐田南高等学校 青島啓祐 大木遥平 佐藤大騎

波形分析ソフト WaveSpectra で管楽器の波形を分析し, Cinderella.2 で再現.

・「螺旋」

磐田南高等学校 阿部晃大 伊藤勝梧 大木敬之

自然界に現れる螺旋を Cinderella.2 でシミュレート.

(2) 2010 年の指導の経緯

課題研究の準備として, 2009 年 7 月, 夏休みに Cinderella.2 を体験するチームを募集. これに, 5 チーム 15 名が応募してきた. そこで Cinderella.2 の使い方について, Web 上にレクチャを連載するとともに, 情報交換の場として掲示板を開放した. レクチャは CinderellaJapan のページ <https://sites.google.com/site/cinderellajapan/Home> 掲示板は「STS(教育&ソフト)」のフォーラム <http://park3.wakwak.com/sts/> (会員制) を利用した. このうち, 夏休み中にテーマの決まった 1 チームについて, 3 月の静岡県理数科課題研究発表会に向けて先行的に研究を開始させた. 生徒が決めたテーマは「曲線」. その後, 「螺旋」に絞り込み, 自然界に現れる螺旋をシミュレートすることや, フィボナッチ数列との関係も調べてみるように方向づけをした. 螺旋を方程式の形状で分類することや(代数螺旋, インボリュート曲線, バラ曲線, クロソイドなど), CindyScript によってシダ植物などの描く螺旋をシミュレートすることなどは生徒の手で行なった. 生徒の文献検索力は不十分であったので, Web 上の論文や本などは適宜示し, 3D グラフィクスの基礎なども Web 上でレクチャを行なった. 3D グラフィクスについては 3 次元空間での回転や透視変換が高校数学を超えた内容であるが, 数学 C で学ぶ行列の知識の延長上にあるため, 生徒はレクチャを読むだけでスクリプトを書くことができた. 実現して欲しい事柄については注文をつけたが, スクリプトの内容についてはほとんど手を入れておらず, CindyScript が高校生でも十分扱えるものであることを示した.

また, 課題研究以外でも生徒が興味を持って取り組んだ例がある. CindyScript ではノートパソコンに搭載されている加速度センサ(重力センサ)を利用することができる. その方法を Web 上(CinderellaJapan)に書いたところ, このチームの伊藤がさっそくゲー

ムを作ってきた。このように、Cinderella.2は生徒の知的好奇心を刺激する有用なツールでもある。

#657658 未来室 : stsmir
[abe :阿部] 20100213 13:41 (9)
アップロード 2回目 あべ

マクローリン展開の方の改良版ですが、展開する項数を増やすと止まりそうになります。うちのは四十項ぐらいが限界みたいでした。やっぱり数値積分は強い。次はヒマワリの螺旋を調べてみよう。

#658658 未来室 : stsmir
[taka :敬之] 20100213 15:41 (35)
Re656,657; 薇と双曲螺旋+ α 敬之

クロソイド見ましたよ。凄いですね〜。電卓を使ったとはいえ、2の方のスク립ト、分母の桁がえらいことに…。まだ更新版は見えないので後で見ようと思います。薇の画像を背景にはっ付けてどれくらい似てるか、いろいろやってみました。すると、形は近いですが流石に一致はしなさそうです。放物螺旋みたくrの増加量が小さくなればいいのですが、平方根をとるとリチュースになるのであまり似ていない感じに。あと、著作権の問題もありますよね。wikiのものを使っていますが色々書いてあって良いのかどうか。薇 = ぜんまい

ところで、昨日シンデレラは階乗が出来るだろうという話をしましたよね。ところが!は当然、factorial (階乗の英語)を一字ずつ消しても反応なしでした。なので、n!を返す関数を作ってみました。スク립トの必要な部分をコピーすれば使えます。短いけど、かなり時間が掛かった。最後何故か上手くいった。疲れたあ。螺旋に直接は関係ないかもしれないけど、電卓+筆算よりは省けるかと。こっちはアップしとく予定です。

時間があれば(あるのか?)!!やら!!!やら(多重階乗ってあったよ!)出来たらいいなあみたい。要はリストの総乗、総和はsumであるけど。…シンデレラに既にありそうですが。前々から思っていました。関数一覧表みたいのってどこにあるんですか?(探すのがヘタなもんで)では。

5 今後の展望

Cinderella2のCindyScriptでは、いままで非公開だったサウンド関連の関数を使い、MIDIを正式にサポートした。(課題研究「フーリエ級数と楽器の波形」では、当時非公開だったこの関数を使っている)また、Cinderella TeXという、標準的なTeXに準拠したTeXスク립トが利用できるようになったほか、いくつかの関数が強化されている。今後は、これらの利用により、応用場面がさらに広がっていくであろう。Cinderella.2を用いることにより、授業デザインを根本から変えることができる。生徒の興味関心や知的好奇心をおおいに刺激することもできる。さらに実践を重ね、その結果を発信していきたい。