

## *Mathematica* を活用する数学教材とその検証

日本大学・理工学部 山本修一 (Shuichi Yamamoto)  
College of Science and Technology,  
Nihon University

### 1 はじめに

平成 21 年に高等学校の学習指導要領（数学編 理数編）が新しく発表された。この解説の第 1 節, 3 改訂の要点の (1) 高等学校における数学教育の意義にあるように, 学習の質（質の高い数学力の育成）が問われている。特に, 問題の解き方の暗記として学ぶ数学から“数学のよさや有用性”が実感, 認識できるような数学教育が強調されている (2 改訂の要旨, ア 改善の基本方針)。

今日, 数学がコンピュータを通して社会に貢献している事実は誰も否定できないであろう。このような時代的背景からも, 高等教育における数学はもっとコンピュータと係わりを持つべきである。一方で, 数式処理ソフトの進化には目を見張るものがあり, 新世紀の新しい数学教育の展開に重要な役割を果たすことが期待される。

我々は以下のような研究テーマを設定している。

- 伝統的な（従来からの）数学教育をコンピュータ活用で支援する。特に, コンピュータを活用しなければ達成し得ない数学教材を開発したい。
- 地球シミュレーションに象徴されるように, 数学の役割の変化に対応した, 新しい時代により必要とされる数学教育を模索したい。

本論文では, 過去 10 年間学部の授業として実践している, 「*Mathematica* で数学を学ぶ」(教養ゼミナール) の概要を説明し, 平成 21 年度と 22 年度に実施した教員免許状更新講習の概要とそこで提案した教材, およびそのとき実施した調査について報告し, 従来から実施している学生に対する調査と合わせて, 教材の是非を検証する。

### 2 授業「*Mathematica* で数学を学ぶ」の概要

何も勉強しないで, すぐに『この問題はどうすれば解けるの?』という, 問題の解法のみにとらわれ, 数学の概念の理解に全く興味を示さない学生が多いのに気づき, 10 年前から「パソコン操作」と「動き」を取り入れた授業「*Mathematica* で数学を学ぶ」(教養ゼミナールとして設置されている) を, 以下のことを目標にして実施している。

「数式処理ソフト *Mathematica* を利用し, グラフィカルに支援することで, 三角関数

の和をグラフィカルに理解し、フーリエ級数展開への可能性を感得する。アニメーション効果で三角関数の公式を波の動きに関連付けて理解する。また、導関数の役割や積分の概念をグラフィカルにイメージ化してより深く理解していく。」

授業の特徴は、(i) ステップにきざまれた短い内容をプログラム操作を通して読ませる。(ii) グラフィカルな支援を前面に打ち出す。(iii) グラフを媒介にした新しいタイプの演習問題（2007年度より実施）を取り入れる等、従来からの伝統的な教授法とは異なる手法を用いていることである。

授業形態は、2単位、学科共通、1年から4年生対象の後期授業であり、情報教育研究センターの演習室を使用し、教室に設置してあるパソコン、中間提示モニターおよび数式処理ソフト *Mathematica* を使用し、通常はポータルサイトから Web テキスト等をダウンロードさせ、それに従って授業を展開している。

以下は平成 21 年度実施した 15 回の授業内容である。

(1) ガイダンス (2) ホームページを利用する授業（三角関数の不思議）(3) *Mathematica* を使ってみる (4) *Mathematica* でグラフを描く (5) *Mathematica* で方程式を解く (6) 三角関数の和と積を見る (7) 三角関数と波の関係を見る (8) 接線の意味と微分係数 (9) 導関数の働きを見る (10) 関数を 2 次関数で近似する (11) 関数を  $n$  次関数で近似する (12) 積分の原理を見る (13) 原始関数のイメージ化 (14) モンテカルロ法で面積を求める (15) 小テスト

この授業では、学ぶ内容をわかりやすくするために、理解度の質問を交えた「出席とアンケート」を毎時間提出させている。また期末に実施する小テストと合わせて、継続的に学生の動向を探っているが、以下の調査項目に特に興味を持っている。

- a 数学は応用できそうであるという気持ちが以前より増すか。
- b 数学をもっと深く勉強したいという気持ちになるか。
- c 数学の重要性をより強く感じるようになるか。
- d 数学のイメージ化ができて、理解がより深まるか。
- e 公式の暗記から離れて、数学を楽しく勉強することができるか。

### 3 教員免許状更新講習の概要

平成 21 年と平成 22 年に教員免許状更新講習を担当する機会を得た。講習名は「教科指導の内容と充実」で、テーマ「高校数学の指導にパソコンは生かせるかー *Mathematica* の活用を通してー」で募集した。

授業形態は、(i) 数式処理ソフト *Mathematica* で作成した NBP ファイルをダウンロードさせる。(ii) メディアラボ（計算機演習室）に設置してあるパソコンで、ソフト *Mathematica* を活用し、ダウンロードした教材（アニメーションプログラム）を各自が操作しながら学ぶのである。講習では

- 数学を学ぶことの意義や数学の良さを実感（認識）させることができるか。

- 数学のイメージ化が数学的知識の新しい活用につなげられるか。

を主要テーマにした。提供する教材を通して、新学習指要領で期待されているような“数学の良さや有用性”を生徒に実感（認識）させることが可能かについて、現場で実際に数学の授業を担当している教員から同意を得られるかを検証する。なお、使用する教材は私のホームページ上にある。以下が具体的な内容である。

(1) 数式処理ソフト *Mathematica* を使ってみる

内容： *Mathematica* の説明し、実際に操作しながら *Mathematica* を体験する。また、フリーソフト *Mathematica Player* との違いを簡単に述べる。

(2) 教材（NBP ファイル）をダウンロードして教授する

内容：ダウンロードした教材で以下の内容を体験学習する。

- 三角関数の公式と波との関連付け
- Conceptual understanding 一導関数の理解を通して—

(3) *Mathematica* を活用して教授する

内容：積分の概念を理解するためのタイピング操作を取り入れた数学的活動

講習参加者は、平成 21 年度は 12 名、平成 22 年度は 16 名であった。なお、参加者の中に、中学校の先生が数名いた。

## 4 教材と教材の検証 1（教員のアンケート）

ここで、教材として使用する NBP ファイルはクリック操作のみが許容される。

### 4.1 三角関数の公式と波の関連付け

三角関数（三角比）は、現行のカリキュラムでは、数学 II と 数学 III で扱われる。教える内容が減ったにも係わらず、公式ばかり多く、教えるに難しくされている。これらの内容を、生徒がもっと楽しく学べるように、三角関数のグラフ、加法公式や和を積にかえる公式を波と関連付けて学べるように配慮した以下の教材（NBP ファイル）を提供し、教員側から同意が得られるか、についてその是非を検証してもらった。

- (a) 波との関連付け: Manipulate コマンドを活用し、▶ をクリックすると  $t$  が変化して、それに応じて関数  $\sin(x+t)$ ,  $\sin x \cos t$ ,  $\cos x \sin t$  のグラフが、それぞれどのような「動き」を示すかを観察できる教材（図 1）

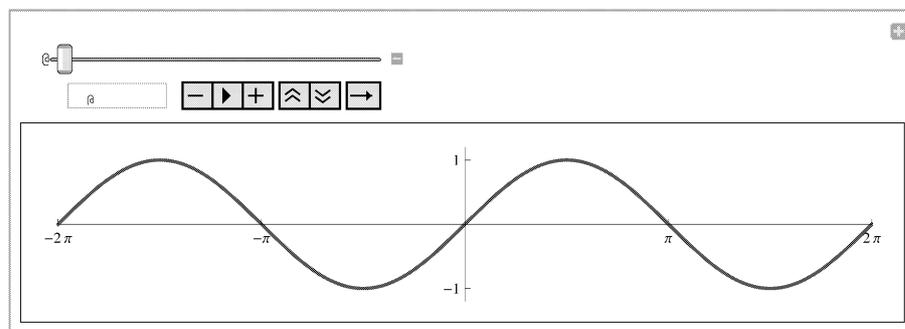


図 1  $\sin(x+t)$  場合

- (b) 二つの正弦波  $\sin(x-t)$  と  $\sin(x+t)$  の合成 (和) : ▶ をクリックすると  $t$  が変化して, それに応じて右と左にそれぞれ移動する  $\sin(x-t)$  と  $\sin(x+t)$  のグラフが合成 (和) されると, どのような変化 (「動き」) をするかを観察する教材
- (c) 加法公式のとの関連付け: ▶ をクリックすると  $t$  の変化に応じて上下に移動する  $\sin x \cos t$ ,  $\cos x \sin t$  のグラフが, ( $\sin x \cos t + \cos x \sin t$  として) 合成されると, そのグラフは左に移動する「動き」になることが観察できる教材

講習では, 配布プリントで, 以下の問題を先に提示した。その後, 上のプログラムを実際に操作しながら解答してもらった。

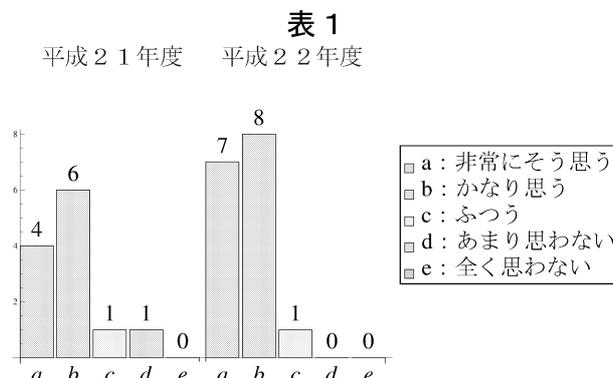
1. 三角関数の和のグラフィカルな意味は?
2. 関数  $\sin(x+t)$  のグラフは,  $t$  を 0 から始めて値が大きくなるように変化させるとどのような動きを示すか?
3. 関数  $\sin x \cos t$  のグラフは  $t$  を 0 から始めて値が大きくなるように変化させるとどのような動きを示すか?
4. 関数  $\sin x \sin t$  のグラフは  $t$  を 0 から始めて値が大きくなるように変化させるとどのような動きを示すか?
5. 三角関数の加法公式

$$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos t \sin x$$

は,  $t$  の値を変化させると, どのような動きと関連するか?

#### 教材 4.1 の検証

問「三角関数の公式と波を関連付けて理解させることは, 三角関数を勉強しようという意欲につながるとおもいますか」に対するアンケート結果は表 1 になった。



#### 4.2 Conceptual understanding—導関数の理解を通して

多くの学生は, 導関数や接線の方程式はすぐに計算できるが, “何を計算しているのか”を理解していない。この反省が出発点である。それに関連して, 導関数は与えられ

た関数の増減を記述する関数であることをビジュアルに理解させ、新しく“conceptual understanding”という学び方をより具体的に提案した。

講習では、プリントを配布して

- (a) 以下の問題 1 を提示し、従来型の procedural understanding と比較し conceptual understanding について説明する。

**問題 1 (Roddick [3])** 下の図 2 の二つのグラフは、一方が他方の導関数のグラフである。どちらが導関数のグラフであるかを、理由を述べて答えよ。

- (b) 演習として、以下の問題 2 を提示し、conceptual understanding で考えてもらう。

**問題 2** 下の図 3 の二つのグラフは、一方が他方の導関数のグラフである。どちらが導関数のグラフであるかを、理由を述べて答えよ。

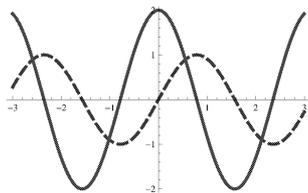


図 2 (問題 1)

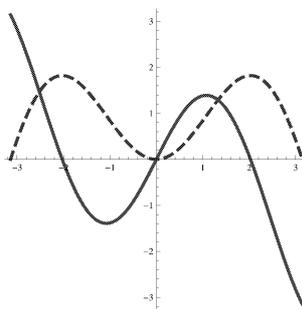


図 3 (問題 2)

- (c) ダウンロードした教材で、導関数を学ぶ

ここで、使用する NB ファイルは以下のように構成されている。

1. 「点  $(-1, 2)$  の近くで、3 次関数  $y = x^3 + x^2 - 2x$  のグラフと 1 次関数  $y = a(x+1) + b$  のグラフが非常に近いと思えるような、 $a, b$  の値を求めよ」という問題に対して、2 つの方法でアプローチできる教材を用意した。

(I) 接線をグラフィカルに求める

以下の画面 (図 4) を提供し、2 個のスライダーの下にそれぞれ設置されているプラス 田 と マイナス 田 キーをクリックさせて、直線を移動させて二つのグラフが似通っている状態になったと感じた時点で、 $a, b$  の値を読み取らせる。

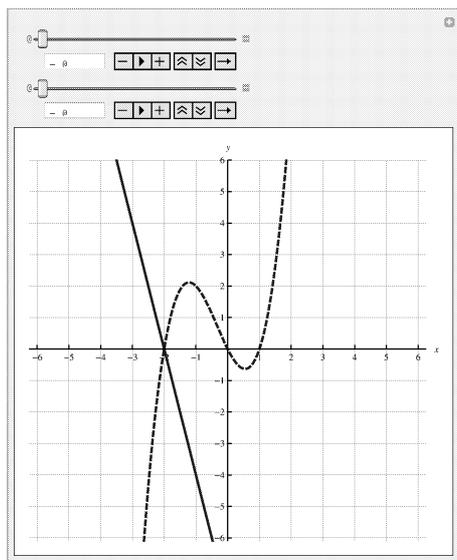


図4 グラフィカルに接線を求める

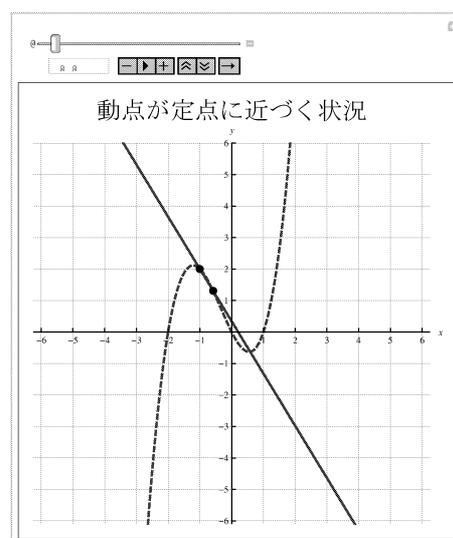


図5 数学的に接線を求める

## (II) 接線を数学的に求める

$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$  とし、定点  $(-1, 2)$  の近くで、関数  $y = f(x)$  のグラフ上の2点  $(-1, 2)$ 、 $(-1 + \frac{1}{n}, f(-1 + \frac{1}{n}))$  を通る直線

$$y = \frac{f(-1 + \frac{1}{n}) - f(-1)}{\frac{1}{n}}(x - (-1)) + 2$$

を考え、 $n$  が大きくなると、動点  $(-1 + \frac{1}{n}, f(-1 + \frac{1}{n}))$  が定点  $(-1, 2)$  に近づくアニメーション画面 (図5) を提供し、▶ をクリックさせて観察する。

### 2. 計算式

$$\frac{f(-1 + \frac{1}{n}) - f(-1)}{\frac{1}{n}} = -1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} \rightarrow -2(n \rightarrow \infty)$$

を見せて、この値が微分係数  $f'(-1)$  で、点  $(-1, f(-1))$  における接線の方程式は

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

として簡単に計算できる“数学の有用性”を強調する画面

3. 導関数  $f'(x)$  の値が正 (負) であるとき、関数  $y = f(x)$  のグラフは増加 (減少) していることをビジュアルに感得させるために、関数  $f(x) = x(x - a)(x - 2)$  と  $f(x) = x^3 + ax$  に対して、それぞれ別の画面を用意し、 $a$  の値をクリックで変化させても、 $y = f(x)$  と  $y = f'(x)$  のグラフの関係は常にそうであることを示す画面

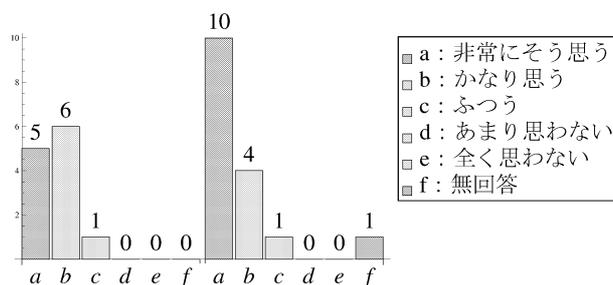
### 教材 4.2 (I) の検証 1

ほとんどの学生は、接線の方程式を求めることができる。しかし、接線の意味について理解している学生は少ない。高校の現場でも、教えるのは難しいと思える。ここでは、まず、接線に興味を持ってもらうことをねらっている。

問「接線をグラフィカルに求めさせることは接線を理解させる数学的活動になると思いますか」に対するアンケート結果は表2になった。

表 2

平成 22 年度 平成 22 年度



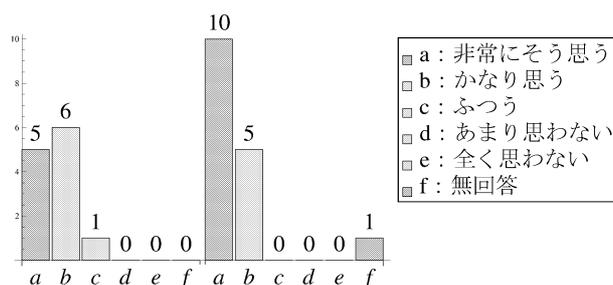
## 教材 4.2 (II) 3. の検証

ここでは、導関数  $f'(x)$  の値の正・負が  $f(x)$  の増減を示すアニメーションを、自分自身の手で操作する効果で、その内容が深く理解されることをねらっている。

問「関数とその導関数のアニメーションは、導関数の正・負とグラフの増減の関係を理解させるのに役に立つと思いますか」のアンケート結果は表 3 になった。

表 3

平成 22 年度 平成 22 年度



## 4.3 Mathematica を活用して教授する

多くの学生は、簡単な図形の面積を積分の計算で求めることはできるが、あくまで公式の適用に終始し、「どのような計算しているのか」についてそれ以上学ぼうとしない。積に分けて計算する積分計算の「すごさ」を身につけてほしい。そこで、最も簡単な  $n$  等分による近似計算から積分の概念を導く。実際の計算は *Mathematica* にさせて、考え方だけを学ぶ教材を提供した。

(i) 教材は、自分自身でタイプさせて、教科書を読む代わりにタイピング操作でそれを代用させようというものである。作成するプログラムは非常に短いので同時に考え方も学べるはずと期待している。

最初に配布したのは、タイプする式の記された以下のような PDF ファイルである。関数の定義の仕方やコマンド `Sum` については、教員が補助的に指導した方が効果的だと考えている。

**例題**  $f(x) = x^2$  に対して、区間  $[0, 1]$  上で積分の原理を観察せよ。

タイピング：

(1) 関数の定義

```
Clear[f];f[x_]:=x^2;f[x]
```

## (2) 積和の定義

```
Clear[S];S[n_]:=Sum[f[(i-1)/n]*(1/n),{i,1,n}];S[2]
```

次に、S[3] や S[10] を *Mathematica* に計算させる。

```
{S[3],S[10]}
```

さらに、大きな  $n$  に対して、自由に計算させる。例えば、S[n] の値が 0.333333 になるような最小の自然数  $n$  を見つけさせる活動もある。このような活動を通して、定積分

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

の考え方を理解させる。

(ii) 続いて、ダウンロードした NBP ファイルを利用する。このファイルには以下のように原始関数をイメージ化させるプログラムが記されている。

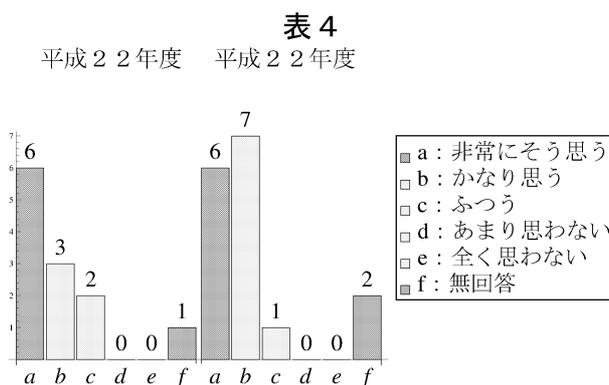
例題のような区分求積法の考え方で、関数  $f(x) = \cos x$  と区間  $[0, 2\pi]$  に対し、区間を点  $x_i = \frac{2i\pi}{n}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) で  $n$  等分する。 $y_k$  を、点  $x_k$  までの積和

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) \times \frac{a}{n}$$

として定義する。ただし  $y_0 = 0$ 。ここで、値  $y_0, y_1, \dots, y_n$  の挙動がグラフィカルにわかるように点  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) を順に結び、折れ線として描かれるようになっている。▶ をクリックして自然数  $n$  を大きくすると、この折れ線グラフが関数  $\cos x$  の原始関数  $\sin x$  のグラフに近づくようになっている ([7])。

## 教材 4.3 (i) の検証

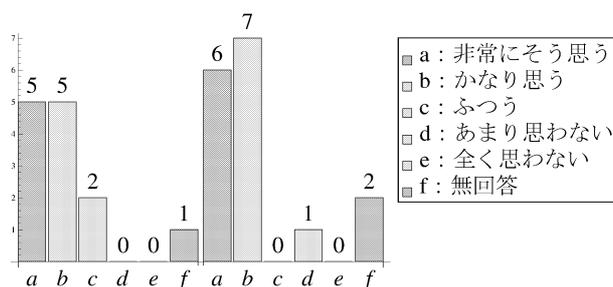
問「パソコンで積和（リーマン和）を計算させることは、積分の考え方を理解させる数学的活動になると思いますか」に対するアンケート結果は表 4 になった。



## 教材 4.3 (ii) の検証

問「原始関数を折線で近似するアニメーションは、原始関数のイメージ化に役に立つと思いますか」のアンケート結果は表 5 になった。

表 5  
平成 22 年度 平成 22 年度



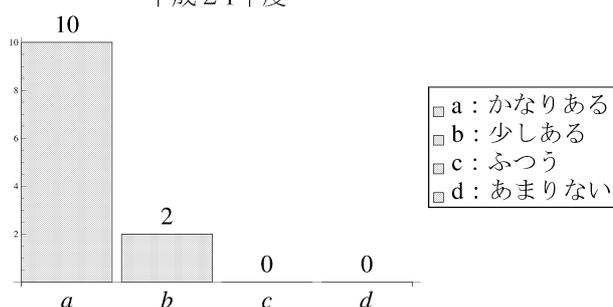
#### 4.4 総合的な検証

以下は、講習の最後に実施する筆記試験において、評価には無関係とお断りをして行った総合的なアンケート調査の問と結果である。

##### 検証 1

問「パソコンを活用する数学の授業に興味がありますか」に対するアンケート結果は表 6 になった（平成 21 年度：受講者 12 名）。

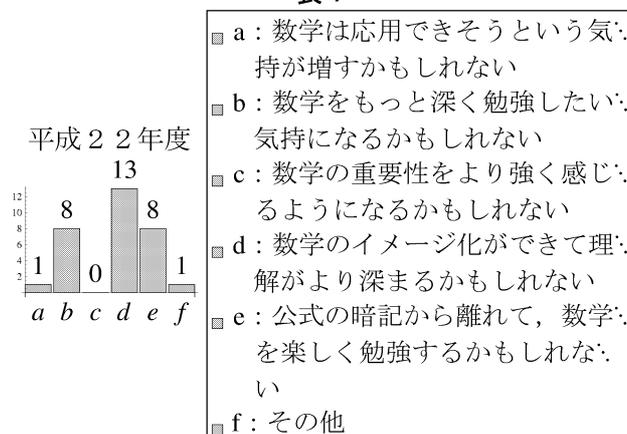
表 6  
平成 21 年度



##### 検証 2

問「この講習を通してお感じになったことが、以下の項目に該当するものがあればその項目に○をつけてください。」に対するアンケート結果は表 7 になった（平成 22 年度：受講者 16 名）。

表 7



- a: 数学は応用できそうという気が増すかもしれない
- b: 数学をもっと深く勉強したい: 気持ちになるかもしれない
- c: 数学の重要性をより強く感じるようになるかもしれない
- d: 数学のイメージ化ができて理解がより深まるかもしれない
- e: 公式の暗記から離れて、数学: を楽しく勉強するかもしれない
- f: その他

**検証3** 以下は、筆記試験の問題「アニメーションなどパソコンを活用した授業について、現場での教育環境を考慮しその是非について簡潔に論じてください」の解答より抜粋したものである。ただし、文言はほぼそのままである。

- a. パソコン活用について肯定的な意見。理由として (1) 目でみて学ぶことは生徒の興味、関心を引き出す。(2) チョークと板書での限界を超えて教授できる。(3) アニメーション等、視覚にうったえることで理解が深まる効果がある。(4) アニメーション等を活用すれば、教師も説明しやすいし、生徒側もイメージしやすいのではないか。(5) 公式を覚えて計算して解くだけという現実では、数学のおもしろさがわからず終わってしまう。また指導者側からみても、指導する上で助けになる。
- b. パソコン活用について否定的な意見。理由として (1) 限られた時間内に教科書を終わらせることに四苦八苦している。(2) 教員のパソコン能力（スキル）を上げる必要がある。(3) パソコンが使える環境（ハード、ソフト面）の整備が必要(4) IT 実験室への移動、授業の流れの中断、過重な受験指導があり、実践しにくい。(5) 生徒一人一台のパソコンがない、またソフトが充実していない。(6) 一人1台、生徒40人に教員一人という状況ではなかなか困難である。(7) シラバスが存在しているので、パソコンを利用する時間はない。(8) 大学受験に特化したカリキュラムの中では、アニメーションやパソコンを数学で活用しても担当教員の労が多い割には学力が付かない。

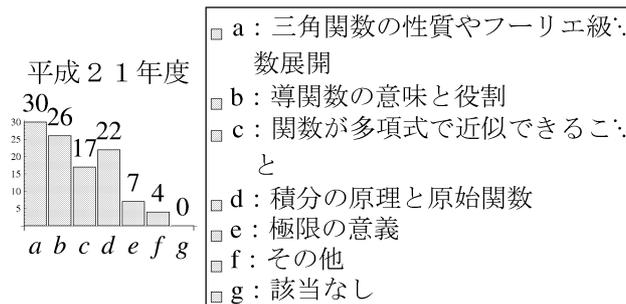
## 4 教材の検証2（学生のアンケート）

教養ゼミナール「Mathematica で数学を学ぶ」の授業において継続的にアンケート調査を実施している。その結果，“わかりやすい”また，“内容の理解をさらに深めることができる”という調査結果を得ている（[4], [5], [6]）。

平成21度の授業の最終日（平成22年1月13日）において、アンケート調査（受講者61名で、その内訳は1年36名、2年5名、3年19名、4年1名）を実施した。この調査を通し、数学の内容に関する理解の深まりについてその傾向を明らかにし、モチベーションに関する結果については、教員側からの結果と合わせて検証する。

(i) 理解の深まりに関する調査として、問「この授業の成果として、この授業を受ける前と比べて数学的意味がより明瞭になった部分が、以下にあればその項目に○をつけてください。複数個可。」に対するアンケート結果は表8になった。

表8



(ii) モチベーションに関する調査として、問「この授業を通して感じたことが、以下の項目に該当するものがあればその項目に○をつけてください。複数個可。」に対するアンケート結果は表 9 になった。

表 9

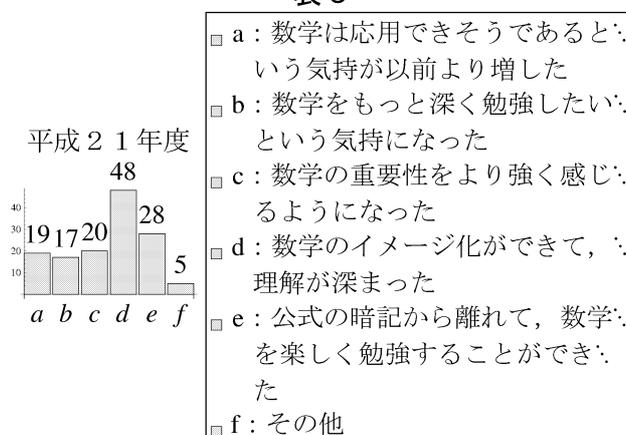


表 7 と表 9 から、項目「数学のイメージ化ができて理解が深まる」は、教員の大多数 (16 名中 13 名) から支持され、学生からも圧倒的な評価を得ていることがわかる。また、項目「公式の暗記から離れて、数学を楽しく勉強することができる」についても、教員、学生の両方の側からかなり支持されていることに注目したい。

また、他の項目では、「数学をもっと深く勉強したいという気持ちになる」が教員側からかなり支持を得た反面、学生側では、「数学は応用できそうだという気持ちが以前より増した、数学の重要性をより強く感じるようになった」の項目を加えて平均化された。

以上の検証を通し、我々の教材は教員、学生の両方から同意を得たと判断される。

## 5 まとめ

教員講習では、ほぼ全員がパソコンを活用する授業に興味を示した。また我々が提案している教材は教員からも支持され、学生には“わかりやすい”という評価だけでなく、モチベーションも高揚させる効果がある。ここで留意したいのは、*Mathematica* のアニメーションに代表されるような「動き」である。「動き」が従来の教育の中で達成できなかった新しいイメージ造りに貢献していると考えられる。

パソコンを活用して、数式処理ソフトが提供するアニメーション処理能力を利用して、「数学を教える」ことについては誰もがその有効性を認めざるを得ない。しかし、教員の感想からも伺えるように、現状の体制ではかなり困難である。

21世紀の数学教育を視野に入れた場合、生徒・学生のためにも、この困難を粘り強く乗り越えていかねばならない。また、数式処理ソフトの差異にこだわらず、困難を乗り越えるべく良い知恵を共有しながら、これから前進できるかが問われている。

## 参考文献

- [1] 文部科学省, 中学校学習指導要領解説 数学編, 平成 21 年 7 月, 教育出版
- [2] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編, 平成 21 年 12 月, 実況出版
- [3] Cheryl D Roddick, Differences in learning outcomes: Calculus & *mathematica* vs. traditional calculus, *Primus* XI(2), 2001, 161-184.
- [4] 山本修一: マルチメディア教材を活用する大学数学の指導～情報化社会における新しい数学教育を目指して～, 大学教育と情報 (私立大学情報教育協会誌), Vol. 16, No. 1, pp. 15-17, 2007
- [5] 山本修一: *Mathematica* を活用する数学教育－数学的性質の視覚的に関連付けられた理解の上にも－, 日本大学理工学部一般教育教室彙報, 第 82 号, pp. 15-25, 2007
- [6] S. Yamamoto and N. Ishii: A way of computer use in mathematics teaching - The effectiveness that visualization brings -, Proc. of the 10th International conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project, Sep. 11-17, University of Applied Sciences, Dresden, pp. 606-610, 2009
- [7] 山本修一, 新しい数学力を培うパソコンを活用した積分の授業, 日本科学教育学会年会論文集 34, 437-438, 2010