数理解析研究所講究録
第 1735 巻 2011 年 140-147

DGS 環境における CAS ならびに関数グラフ機能の利用の可能性の検討 — GeoGebra を用いた関数の積に対する一考察 —

清水 克彦*, 嶋村 元太郎**
Katsuhiko Shimizu, Gentaro Shimamura
東京理科大学*, 東京理科大学科学教育研究科科学教育専攻**
Tokyo University of Science*,
Graduate School of Mathematics and Science Education**, TUS

1 はじめに

本稿では，数学教育用ソフトウエアの一つの形態としての統合的数学教育環境を提供するソフトウエアに注目し，その可能性を検討する．大学の数学教育においては，Mathematica や Maple などの数式処理ソフトウエアを中心にして，数学教育用ソフトウエアの使用が工学部や理学部等で徐々に増加しつつある．それに対して，中学校・高等学校の数学教育では，様々な数学教育用ソフトウエアが開発され，試行的な実践が数多くなされ，その効果についての研究が進められているにも関わらず，その利用が日常的に行われているとは言えない状況にある．

米国やヨーロッパにおいてグラフ電卓 (Graphic Calculator) が学校数学において非常に活用され，中国においてもその利用が普及しつつある．その理由として，1 台のグラフ電卓が，グラフ描画を関数で利用したり，表計算を統計で利用したり，図形ソフトを幾何で利用したりと，数学教育の多くの内容や場面で使用できるという点を挙げることができる．本稿で検討する Geogebra は，関数のグラフ描画，その図形的な扱い，数式処理機能と 1 つのソフトウエアでありながら，学校数学の教育の様々な場面で活用することができる「統合的数学教育環境」となっている．また，このような「統合的数学教育環境」を与える数学教育環境では，様々な場面で活用できるという利便性だけではなく，これまでの関数ソフトや動的図形ソフトウエア (Dynamic Geometry Software:DGS) などがもたらすことができない新しい学習機会を提供できる可能性もある．本稿では，その点についても検討する．

2 従来の数学教育用ソフトウエアと Geo Gebra

これまで学校数学で利用されてきている代表的な数学教育用ソフトウエアを挙げてみる．関数グラフソフトウエアとしては，グラフ電卓に付随しているものが代表的であり，日本では GRAPES を挙げることができる．図形ソフトウエアや動的幾何ソフトウエアでは，普及率からいえば Cabri Geometry と Geometer's SketchPad，さらに Cinderella が代表的であり，日本では飯島康之氏の開発した Geometric Constructor などを挙げるこ

とができる．関数ならびに微積分用のソフトウエアとしては，Mathematics Unlimited があり，微積分の数式処理では Derive などが利用されてきた．確率・統計の分野では NSF の援助を受けて開発された Fathom が著名であり，Excel が統計ソフトとして利用される場合も多い．

これらを利用者の立場から見ると，それぞれの領域の数学教育でコンピュータを活用しようとすると，それぞれのソフトウエアの利用法を習得し，インターフェイスの意味するところを理解しなくてはならない．このような状況が，グラフ電卓の利用が普及しても，個別の数学教育用ソフトウエアの利用があまり進まないということの一因であるかも知れない．このようななか，Knoppix Math に含まれているソフトウエアのなかには，これまでの複数の数学教育用ソフトウエアの機能を持つ，学校数学に「統合的数学教育環境」を与えるソフトウエアがみられる．その1つに Geo Gebra を挙げることができる．その名の通り図形ソフトウエアの機能と数式処理・関数ソフトウエアの機能を持つソフトウエアである．Geo Gebra は単に2つのソフトウエアの機能を合わせただけなく，図形と代数・関数の統合された数学教育用のソフトウエアとなっている．以下では，関数の積を題材として，統合された数学教育環境においてどのような数学学習が可能になるかについて検討する．

3 GeoGebraを用いた関数の積に対する一考察

関数の積に対する考察に関しては，これまで多くの教材が検討されてきた．垣花 (2009) は x の1次式で与えられる関数の積や商をグラフで見ることで，その演算で与えられた式の意味を考える活動が促されるとする教材を提示している．また，渡辺 (2008) はいくつかの直線の式 (x の1次式) の積で与えられる関数の極値の変化を観察する教材を提示している．これらを踏まえて，筆者は，関数の積についての教材を発展させるものとして GeoGebra 環境下での関数の積に対する考察について述べる．

3.1 積が2次関数となる関数の考察

垣花は，$f_1(x) = x + 2$, $f_2(x) = x - 3$ の積をグラフで見て考えるという教材例 (2009, p.634) を提示している．まず，この垣花の教材例から考察を行い，それと同時に GeoGebra の機能についても述べる．それから，発展させた内容として，積が2次関数となる関数についての考察を述べる．

3.1.1 垣花の教材例にみる関数の積の考察

$f_1(x) = x + 2$, $f_2(x) = x - 3$ の積を

$$f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$$

と定める．このとき，GeoGebra を用いて $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ のグラフの関係についての考察を行う．

これらの関数グラフの描画については，画面下部の「入力バー」から `f_1(x)=x+2`, `f_2(x)=x-3`, `f(x)=f_1(x)*f_2(x)` とそれぞれの数式を入力することで可能である．入力した数式やコマンドは画面左側の「数式ビュー」に，数式やコマンドが表すグラフや図形などは「グラフィックスビュー」にそれぞれ表示される (図1)．また，図形等を作図する場合には，画面上部の「ツールバー」にある作図ツールを用いることも可能である．

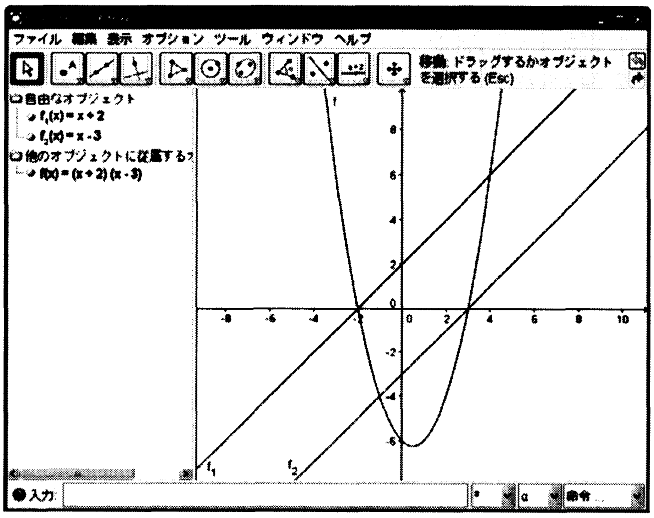


図 1: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ の数式 (左) とグラフ (右)

描画された $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ のグラフから推測されることとしては,

(a) $f(x)$ のグラフは $f_1(x)$, $f_2(x)$ のグラフと x 軸上で交わっている．

(b) $f_1(x)$, $f_2(x)$ それぞれと x 軸との交点の中点の x 座標は，$f(x)$ の頂点の x 座標と等しい．

(c) $f_1(x)$ の y 切片の値 (2) と $f_2(x)$ の y 切片の値 (-3) の積が，$f(x)$ の y 切片の値 (-6) になっている．

などが挙げられる．実際，数式 $f_1(x) = x+2$ を様々な x の一次式に変化させたり，$f_1(x)$, $f_2(x)$ のグラフをマウスで直接つまんで平行移動させたりすることで，数式とグラフ (図形) の変化の様子を確かめることができる．さらに，上記のそれぞれについて次のような操作を行うことで，より妥当性を検証することが可能となる．

(a) については，入力バーからコマンド **Root[f(x)]** などと入力することで，x 軸との交点が座標と図形オブジェクトの両方で与えられる．(b) については，(a) の場合にコマンド入力で得られた 2 つの点の中点をコマンド **Midpoint[ ]** や作図ツールを利用して与え，$f(x)$ の頂点の座標をコマンド **Extremum[f(x)]** を利用して与えれば確認することができる．また，その中点を通り x 軸に垂直な直線を作図ツールを用いて描けば，それが $f(x)$ の軸であることにも気づくことができる．(c) については，コマンド **Expand[f(x)]** と入力すれば，$f(x)$ を展開した数式 $g(x)$ が与えられ，その定数項から確認できる．また，`f(0)` と入力しても同様に確かめられる．

このようにして，数式やコマンドの入力などのCAS的な操作と，点のプロットや直線の作図などのDGS的な操作の両方を1つの環境の中で同時的に行うことが可能である．

3.1.2 関数の積・因数分解の関係

ここで $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ のグラフの変化に着目すると，$f_1(x)$ または $f_2(x)$ が変化することで，これらの積で表される $f(x)$ も変化していることに容易に気づくことができる．これは，これら3つの関数の定義の順序，そして数式バーからの入力の順序と関係しているといえる．DGS環境でいうところの，作図手順にあたる考え方と同じである．

表 1: 関数の積の組み合わせ

$f(x)$	$=$	$f_1(x)$	$\times$	$f_2(x)$
$(x+2)(x-3)$	$=$	$(x+2)$	$\times$	$(x-3)$
	$=$	$2(x+2)$	$\times$	$\frac{1}{2}(x-3)$
	$=$	$\frac{4}{-3}(x+2)$	$\times$	$\frac{-3}{4}(x-3)$
		$\vdots$		$\vdots$

ここで，$f_1(x)$ または $f_2(x)$ が変化しても $f(x)$ が変化しないような場合を考えると，表1のような組み合わせが挙げられる．つまり，$f(x)=(x+2)(x-3)$ を因数分解した時の因数をそれぞれ $f_1(x)$, $f_2(x)$ と考えればよいことになる．また，それぞれの x の係数には，互いに逆数となるような数を選ぶことで，積が変化しないような関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ を与えることができる．

このような関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ のグラフの関係についての考察は，次に示すような探究課題を考えることで得られる．

3.1.3 発展させた内容の考察 (積が2次関数となる関数の考察)

関数 $f(x)=(x+2)\times(x-3)$ とする．$f_1(x)\times f_2(x)=f(x)$ となるような関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ をパラメータ $m, n(\neq 0)$ を用いて，

$$f_1(x)=\frac{n}{m}(x+2), \quad f_2(x)=\frac{m}{n}(x-3)$$

と定める．このとき，$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ のグラフについて考察する．

「スライダー」を用いてパラメータ m または n を変化させると，今まで平行に与えられていた2つの直線 $f_1(x)$, $f_2(x)$ のグラフはともに回転するようにして交点をつくる．そしてこの交点を図形オブジェクトとして与えれば，その残像から x 軸上の交点を通る双曲線のような曲線が描かれていることがわかる (図2)．

この交点の軌跡を代数的に考えてみることにする．

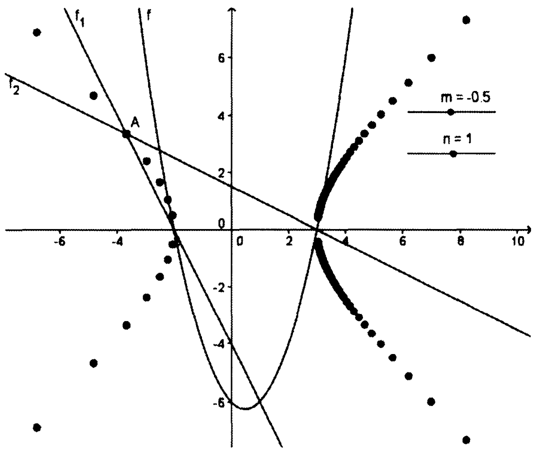


図 2: スライダーを用いて m を変化させた場合の $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の交点の軌跡

$y \neq 0$ の場合, $\begin{cases} y = \dfrac{n}{m}(x+2) \\ y = \dfrac{m}{n}(x-3) \end{cases}$ より，第一式を $\dfrac{m}{n} = \dfrac{(x+2)}{y}$ と変形して第二式に代入し，m, n を消去すれば

$$y^2 = (x+2)(x-3).$$

これを変形すると,

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{25/4} - \frac{y^2}{25/4} = 1$$

が得られる．この方程式は双曲線を表している．

$y = 0$ の場合は第一式より $x = -2$, 第二式より $x = 3$ となるが, 互いの方程式を満たさないため不適である．したがって，交点の軌跡は双曲線であることが分かる (ただし, 点 $(-2, 0)$, $(3, 0)$ を除く).

入力バーから `(x-1/2)^2/(25/4)-y^2/(25/4)=1` と入力すれば確かに交点の残像と代数的に考えた結果のグラフが一致していることを確かめることができる．ここで, $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と一般化して考えてみると，交点の軌跡は次のように与えられることが分かる．

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a \neq 0,\ \alpha \neq \beta)$ とする．このとき，$f_1(x) \times f_2(x) = f(x)$ となるような関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ を，パラメータ m, n $(\neq 0)$ を用いて次のように定義する：

$$f_1(x) = a \cdot \frac{n}{m}(x-\alpha) \qquad f_2(x) = \frac{m}{n}(x-\beta).$$

このとき，$f_1(x)$, $f_2(x)$ のグラフの交点の軌跡は 2 次曲線

$$\begin{aligned} & y^2 = a(x-\alpha)(x-\beta) \\ \iff & \frac{(x-(\alpha+\beta)/2)^2}{((\alpha-\beta)/2)^2} - \frac{y^2}{a\left((\alpha-\beta)/2\right)^2} = 1 \end{aligned}$$

すなわち，

$$\begin{cases} a > 0 \text{ のとき，双曲線} \\ a < 0,\ a \neq -1 \text{ のとき，楕円} \\ a = -1 \text{ のとき，円} \end{cases}$$

から，点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を除いたものである (図3).

x^2 の係数 a や，x 軸上の交点を表す α, β, またパラメータ m, n などを「スライダー」で与えることで数値を容易に変えることができる.「スライダー」のような機能については，主に関数グラフソフトが持ち合わせている機能であり，パラメータを変化させたり，アニメーションを作成する場合に用いられる機能である. GeoGebra 環境下ではこのような関数グラフ機能も利用可能であり，この「スライダー」を用いることでグラフの様々な場合についての探究が可能となる.

3.2 積が3次関数となる関数の考察

これまで積が2次関数となる場合の関数について述べてきたが，さらに発展させた内容として，積が3次関数となる関数についても考察を試みる.

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ とする. このとき，$f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x) = f(x)$ となるような関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ をパラメータ m, n, ℓ $(\neq 0)$ を用いて次のように定める：

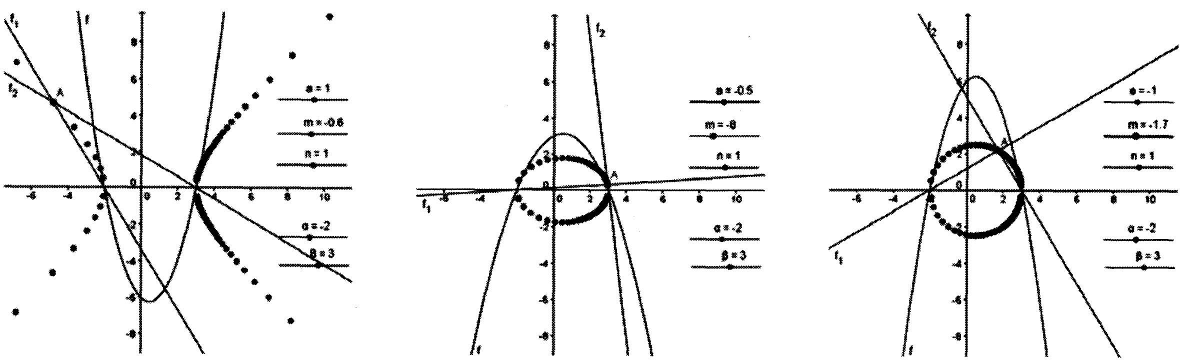
$$f_1(x) = a \cdot \frac{n}{m}(x-\alpha), \quad f_2(x) = \frac{\ell}{n}(x-\beta), \quad f_3(x) = \frac{m}{\ell}(x-\gamma).$$

このとき，共通のパラメータ n の変化による $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の交点の軌跡と，残りの直線 $f_3(x)$ との交点の軌跡について考察する.

$f_1(x)$ と $f_2(x)$ の交点の軌跡はパラメータ n によるものであるので，n を消去すると，

$$y^2 = a \cdot \frac{\ell}{m}(x-\alpha)(x-\beta)$$

となり，これは $a \cdot \dfrac{\ell}{m}$ の値により双曲線・楕円・円になることがわかる (ただし，$(\alpha, 0)$,



$a > 0$ の場合　　$a < 0$ の場合　　$a = -1$ の場合

図 3: $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の交点の軌跡の，a の値による場合分け

$(\beta, 0)$ を除く）．さらにこの交点の軌跡と残りの直線 $f_3(x)$ との交点の軌跡は，ℓ, m を消去することで

$$y^3 = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と与えられる (ただし，$(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$, $(\gamma, 0)$ を除く)．

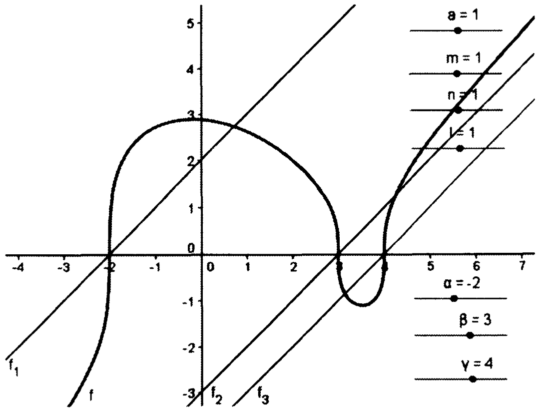


図 4: $y^3 = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のグラフ

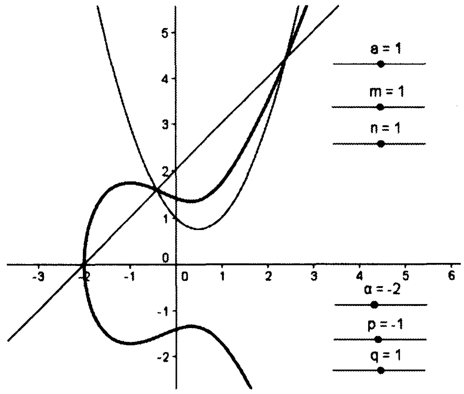


図 5: $y^2 = a(x-\alpha)(x^2+px+q)$ のグラフ

2 次関数となる関数の積を考えた場合と同様にしてパラメータを 2 回に分けて消去していくと，求めたい軌跡の方程式を得ることができる．実際にこの軌跡はどのようなグラフであるのか確かめるために，入力バーから **y=cbrt(a(x-α)(x-β)(x-γ))** と入力してグラフを描くと，S 字を描くようなグラフが得られる (図 4)．$f_1(x)$ と $f_2(x)$ の交点の軌跡も同様に描画した上で，パラメータ m, ℓ を変化させると，確かに交点の軌跡であるのではないかと確認できる．また，次のような積の分け方も考えられる．

$f(x) = a(x-\alpha)(x^2+px+q)$ とし，$f_1(x) \times f_2(x) = f(x)$ となるような関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ をパラメータ $m, n\ (\neq 0)$ を用いて

$$f_1(x) = a \cdot \frac{n}{m}(x-\alpha), \qquad f_2(x) = \frac{m}{n}(x^2+px+q)$$

と定める．このとき，$f_1(x)$, $f_2(x)$ の交点の軌跡を考察する．

パラメータ m, n を消去すれば，

$$y^2 = a(x-\alpha)(x^2+px+q)$$

と与えられる．ただし，$(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$, $(\gamma, 0)$ を除く (β, γ は x についての 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の実数解である)．同様にして，

y=sqrt(a(x-α)(x^2+px+q))
y=-sqrt(a(x-α)(x^2+px+q))

と入力すれば，楕円曲線のようなグラフが得られる (図 5)．

パラメータ p, q を変化させると，放物線 $f_2(x)$ は x 軸と共有点を持つことがある．その個数によって，軌跡のグラフの概形を分類することも可能である．

3.3 まとめ

本稿では，関数の積に対する考察として，積が2次関数，3次関数となる関数の交点の軌跡について考察を行った．この考察を教材として活用する際には，次のような活動の促進が学習者に期待される．

- パラメータを変化させることで数式の面では傾きの変化として，図形の面では直線の回転としてなど，多角的な視点から変化を捉えることができる．
- 関数の積や因数分解を考察することで，数式間の関係や表示されたグラフ (図形) 間の関係を考える活動につながる．また，数式とグラフ (図形) の変化を対応づけることで，数式とグラフ (図形) の関係を考えることにもつながる．
- 軌跡についての仮説を立て，その数式を入力し表示することでその妥当性を検証するというトップダウン的なアプローチが可能になる．
- 2次関数の x^2 の係数を a として与えることや，2次関数だけでなく3次関数や4次関数の場合について考えることなど，より探究的な活動へ拡張される．

4 おわりに

本稿で検討したように，Geo Gebra のような「統合的数学教育環境」では，図形ならびに代数・関数のように個々の領域の学習に同一のソフトウエアが活用できるのみならず，ある数学的対象に対して図形的視点と関数的視点というように様々な観点からの概念形成や問題解決のアプローチが自然と可能となる．さらに，数式的操作と図形的操作が同一のソフトウエアのなかで行われるために，それぞれの操作が相互作用的に働きあい，それによって推論が進められる．このような新しい学習機会がもたらされる点は，先の利便性よりも注目すべき，このような特徴を持つ数学教育用ソフトウエアを活用する利点であろう．

参考文献

[1] GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/) 2010年5月25日最終確認.

[2] 垣花京子 (2009)「数学教育における創造性の育成とテクノロジーの役割 (2)—ICT 活用教材の逆思考に関する考察—」,『第42回数学教育論文発表会論文集』, pp.631-636.

[3] 渡辺信 (2008)「創造的活動としての「数学的活動」のためのグラフ電卓」,『T^3 Japan 第12回年会冊子』, pp.142-145.